S. G. Michlin

Lehrgang der mathematischen Physik

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

S. G. MICHLIN

LEHRGANG DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

HERAUSGEGEBEN VON DER
DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
ZENTRALINSTITUT FÜR MATHEMATIK UND MECHANIK

I. ABTEILUNG
MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER

BAND XV

LEHRGANG DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

S. G. MICHLIN



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1972

S. G. MICHLIN

LEHRGANG DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

In deutscher Sprache herausgegeben
von
Prof. Dr. rer. nat. habil. F. KUHNERT
und
Prof. Dr. rer. nat. habil. S. PRÖSSDORF

Mit 49 Abbildungen

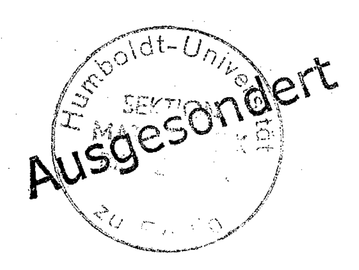


AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1972

С. Г. Михлин
Курс математической физики

Erschienen im Verlag „Nauka“, Moskau

Deutsche Übersetzung:
Prof. Dr. rer. nat. habil. SIEGFRIED PRÖSSDORF
Karl-Marx-Stadt (Teil I – V),
Dr. rer. nat. BERND SILBERMANN,
Karl-Marx-Stadt (Teil VI – VII, Anhänge)



Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, 108 Berlin, Leipziger Straße 3—4

Lizenznummer: 202 · 100/402/72
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 582 Bad Langensalza
Bestellnummer: 761470 4 (5794) · ES 19 B 4
Printed in German Democratic Republic

BERICHTIGUNGEN

Seite 48, Zeile 13 v. u.

lies: $\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{x-c}{\lambda}$ statt: $\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{c-x}{\lambda}$

Seite 134, Zeile 6 v. o.

lies: $K'_\varepsilon(x, \xi) = \begin{cases} 0, & r \geqq \varepsilon, \\ K(x, \xi), & r < \varepsilon, \end{cases}$ statt: $K(x, \xi) = \{\ldots$

Seite 300, Zeile 1 v. u.

lies: $W_0(x) = \{\ldots$ statt: $P_0(x) = \{\ldots$

Seite 306, Zeile 1 v. u.

lies: $|V(y) - V(x)| \leqq |V'(y)| + |V'(x)| + |V''(y) - V''(x)|$

statt: $|V(y) - V(x)| \leqq |V'(y)| + |V'(x)| + |V''(y) - V''||(x)|$

Seite 319, Zeile 5 v. u.

lies: ... NEUMANNschen Problems für ... statt: ... NEUMANNschen für ...

Seite 327, Zeile 11 v. u.

lies: $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ statt: $x_2^2 + x_2^2 = R^2$

Seite 387, Zeile 1 v. o.

lies: $\ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{m-1}(y_1, x_2, \ldots, x_m)\, e^{-i x_1 y_1}\, dy_1 =$

statt: $\ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, x_m)\, e^{-i x_1 y_1}\, dy_1 =$

Seite 438, Zeile 5 v. o.

lies: $\ldots [a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2]_+^\lambda \quad (5)$

statt: $\ldots [a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2]_+^\xi . \quad (5)$

5794 MICHLIN, Mathematische Physik

VORWORT

Das dem Leser vorgelegte Buch stellt eine Erweiterung von Vorlesungen über mathematische Physik dar, die ich im Laufe der letzten Jahre vor Mathematikstudenten der Leningrader Universität gehalten habe.

Wie die meisten Lehrbücher auf diesem Gebiet enthält das vorliegende Buch nur die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, fast ausschließlich zweiter Ordnung. Natürlicherweise nehmen die am weitesten entwickelten und für die Anwendungen wichtigsten drei Gleichungstypen — die elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Gleichungen — in einem solchen Buch den ersten Platz ein.

Die zuletzt genannten zwei Gleichungstypen lassen sich, zumindest im Lokalen, als abstrakte gewöhnliche Differentialgleichungen auffassen, welche die gesuchte Funktion außerdem unter dem Symbol eines elliptischen Differentialoperators enthalten. Daraus kann man ableiten, daß der elliptische Typ den grundlegenden Gleichungstyp für die klassische mathematische Physik darstellt und daß man das Studium gerade mit diesem Typ beginnen muß.

Im Buch offenbaren sich die besondere Rolle und der hohe Entwicklungsstand der positiv-definiten Probleme (d. h. der Probleme mit einer positiv-definiten Energie). Diese lassen sich leicht mit der Variationsmethode behandeln, wobei es gelingt, auf natürliche Weise den Begriff der verallgemeinerten Lösung einzuführen. Ein derartiger Zugang ermöglicht es, ohne zusätzlichen Aufwand die Lösungen vieler positiv-definiter Probleme zu erhalten und damit sofort weit über den Rahmen eines klassischen Lehrbuches hinauszugehen.

Ich halte es für zweckmäßig, vor der Behandlung der nicht stationären Gleichungen und der FOURIERschen Methode die Theorie des Eigenspektrums für positiv-definite Operatoren darzulegen, was mit Hilfe der Variationsmethode leicht möglich ist. Auf der Grundlage dieser Theorie wird das gemischte Randwertproblem für nicht stationäre Gleichungen gelöst: Die FOURIERsche Methode führt auf die Entwicklung nach dem Eigenspektrum, wodurch sich ohne große Mühe eine Begründung dieser Methode über den Begriff der verallgemeinerten (in gewissen Fällen auch der klassischen) Lösung geben läßt. Die Spektralzerlegung benutzen wir auch für die Lösung des CAUCHYschen Problems; für die

Gleichungen mit konstanten Koeffizienten — die Wärmeleitungs- und die Wellengleichung — läßt sich dieses Problem allerdings einfacher und hinreichend allgemein über die koordinatenweise FOURIER-Transformation lösen.

Einen ihr gebührenden Platz nimmt im Buch auch die Potentialtheorie ein. Wie man nämlich z. B. an den DIRICHLETschen und NEUMANNschen Problemen für die LAPLACE-Gleichung im Falle eines unendlichen Gebietes oder am Problem der Richtungsableitung erkennt, kann man sich nicht nur auf positiv-definite Probleme beschränken. Die potentialtheoretische Methode behandeln wir am Beispiel der LAPLACE-Gleichung, da sie sich hier leichter anwenden läßt und sofort überzeugende Resultate liefert.

Die gesamte Darlegung erfolgt für den allgemeinen Fall eines mehrdimensionalen Raumes.

Die oben genannten Aspekte führen zu folgendem Aufbau des Buches. Der Haupttext ist in sieben Teile von unterschiedlichem Umfang gegliedert. Die ersten drei Teile haben vorbereitenden Charakter; dem Teil II („Elemente der Variationsrechnung") kommt außerdem eine gewisse selbständige Bedeutung zu. Der etwas kürzere Teil IV enthält den notwendigen formalen Apparat sowie die Formulierung der Grundbegriffe und die Aufgabenstellung für die wichtigsten Probleme.

Teil V ist umfangmäßig der größte, was sich voll und ganz durch die besondere Rolle der elliptischen Differentialgleichungen erklären läßt. Wir heben in diesem Teil das letzte Kapitel hervor, das dem Problem der Richtungsableitung in einem zweidimensionalen Gebiet gewidmet ist, einem Problem, dessen Index von Null verschieden sein kann.

Im Teil VI werden die Wärmeleitungs- und die Wellengleichung sowohl mit konstanten als auch mit variablen Koeffizienten untersucht. Eine Vereinigung beider Gleichungen in einem Teil erscheint mir sinnvoll: Ungeachtet der unterschiedlichen Eigenschaften lassen sich beide Gleichungen mit analogen Methoden lösen. Der umfangmäßig kleine Teil VII ist dem Korrektheitsbegriff bei Problemen der mathematischen Physik gewidmet.

Das Buch enthält außerdem vier kurze Anhänge, in denen einige neuere Ideen und Ergebnisse aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen dargelegt sind. Von mir stammt lediglich der Anhang 1. Die Herren W. M. BABITSCH, W. G. MAZJA und I. J. BAKELMAN haben sich freundlicherweise bereit erklärt, die übrigen Anhänge zu verfassen; ihnen möchte ich hiermit aufrichtig danken.

Die Konzeption und den Hauptinhalt dieses Buches habe ich wiederholt mit meinen Kollegen vom Lehrstuhl für mathematische Physik an der Leningrader Universität, der von Akademiemitglied W. I. SMIRNOW geleitet wird, erörtert. Ihnen allen möchte ich meine tiefe Dankbarkeit ausdrücken. Zu besonderem Dank bin ich den Herren W. M. BABITSCH und W. G. MAZJA verpflichtet, deren Hinweise ich an mehreren Stellen des Buches benutzt habe. Auf ihren Überlegungen sind insbesondere die Ausführungen über die LJAPUNOW-Flächen im

Kapitel 18 aufgebaut. Weiter möchte ich meinen Hörern I. N. Kroll, S. M. Minejew und K. G. Semjonow für die Hilfe bei der Vorbereitung des Manuskriptes danken. Schließlich bin ich dem Redakteur des Buches W. W. Arestow zu Dank verpflichtet, der das Manuskript sehr aufmerksam gelesen und wesentlich zu dessen Verbesserung beigetragen hat.

Leningrad, Januar 1968 S. Michlin

VORWORT ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Beim Aufbau des vorliegenden Lehrganges habe ich mich von zwei grundsätzlichen Überlegungen leiten lassen:

1. Gegenwärtig kann man nicht die Theorie der partiellen Differentialgleichungen darlegen, ohne in vollem Umfang das Arsenal der Ideen und Mittel der Funktionalanalysis auszunutzen.
2. In einem Lehrgang der mathematischen Physik spielen die elliptischen Gleichungen die dominierende Rolle. Bei den Änderungen, die ich für die deutsche Ausgabe geschaffen habe, war ich bemüht, den genannten Tendenzen verstärkt Rechnung zu tragen.

Ich will die wichtigsten Änderungen aufzählen:

Bei einer Reihe von Sätzen sind die Formulierungen verbessert und die Beweise vereinfacht worden.
Der Zusammenhang zwischen den Begriffen der verallgemeinerten und der stetigen Ableitungen ist ausführlicher dargestellt worden.
Der Begriff der verallgemeinerten Divergenz wurde eingeführt und mit dessen Hilfe genau beschrieben, wie man die EULERsche Gleichung im Falle mehrerer Variabler aufzufassen hat.
Es wurde ein Kriterium dafür angegeben, daß ein Element des HILBERT-Raumes zum energetischen Raum eines gegebenen positiv-definiten Operators gehört.
Der Satz über die höheren Ableitungen des Volumenpotentials wurde verbessert:
Wir beweisen, daß diese Ableitungen einer gewissen LIPSCHITZ-Klasse angehören, wenn die Dichte des Potentials aus einer analogen Klasse genommen wird.
Schließlich haben wir den Charakter der Anfangsbedingungen beim CAUCHY-Problem für die Wellengleichung mit variablen Koeffizienten näher untersucht.

Es ist mir eine Freude, die hohe Qualität der Übersetzung hervorzuheben, die von Prof. Dr. F. KUHNERT, Prof. Dr. S. PRÖSSDORF und Dr. B. SILBERMANN vortrefflich ausgeführt wurde.

Leningrad, Januar 1972 S. MICHLIN

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

Die mathematische Physik ist ein Teilgebiet der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Die Bezeichnung „Mathematische Physik" rührt daher, daß dieses Teilgebiet aus der Betrachtung einiger einfacher und wichtiger Probleme der Physik entstanden ist. Wir betrachten einige dieser Probleme.

1. Das Problem der schwingenden Saite. Wir nehmen an, daß die Ruhelage einer Saite mit der x-Achse übereinstimmt und die Schwingung derselben in der vertikalen Ebene erfolgt. Auf Grund irgendwelcher Ursachen sei die Saite aus dem Gleichgewichtszustand gebracht worden. Eine solche Ursache kann z. B. ein auf die Saite erfolgter Stoß sein. Dabei ändert die Saite ihre ursprüngliche Form; jeder Punkt der Saite erfährt einen gewissen Ausschlag. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß der Ausschlag senkrecht zur x-Achse und ständig in ein und derselben x, u-Ebene erfolgt (s. Abb. 1).

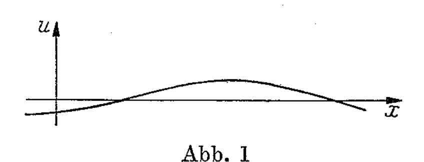


Abb. 1

Die Ordinate u liefert dann die Abweichung der Saite von der Ruhelage. Offensichtlich ist u eine Funktion zweier Veränderlicher — des Punktes x und der Zeit t: $u = u(x, t)$. Wir setzen voraus, daß die Saite homogen ist, einen konstanten Querschnitt besitzt und daß zur Zeit $t > 0$ auf die Saite keinerlei äußere Kräfte einwirken; außerdem soll die Saite nicht dehnbar sein und keinen Widerstand gegen Biegung besitzen. Dann kann man zeigen, daß die Funktion u der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

genügt. Dabei bedeutet a eine von den physikalischen Eigenschaften der Saite abhängige konstante Größe.

Gleichung (1) beschreibt die tatsächlichen Vorgänge genähert und ist nur im Falle kleiner Ausschläge der Saite anwendbar. Sie heißt *Wellengleichung* mit zwei unabhängigen Veränderlichen oder *Saitenschwingungsgleichung.*

Schwierigere physikalische Probleme führen auf Differentialgleichungen, die mit Gleichung (1) eine gewisse Ähnlichkeit besitzen, aber von komplizierterer Gestalt sind. So werden die Transversalschwingungen einer dünnen Membran, welche in der Ruhelage ein Gebiet der x, y-Ebene einnimmt (s. Abb. 2), unter

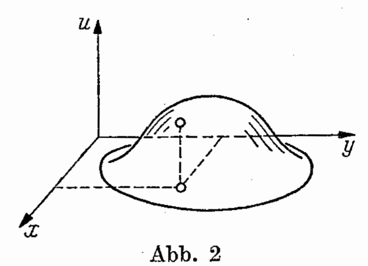


Abb. 2

entsprechenden Voraussetzungen durch folgende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad a = \text{const.} \tag{2}$$

Gleichung (2) heißt *Membranschwingungsgleichung* oder *Wellengleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen.* Ähnlich wie die Saitenschwingungsgleichung beschreibt auch Gleichung (2) nur kleine Schwingungen der Membran.

Die *Wellengleichung mit vier unabhängigen Veränderlichen* hat die Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Diese Gleichung bestimmt z. B. das Geschwindigkeitsfeld eines schwingenden Gases, wenn man voraussetzt, daß die Geschwindigkeiten der Gasteilchen klein sind und außerdem ein Potential besitzen; letzteres bedeutet, daß eine Funktion u existiert derart, daß für den Geschwindigkeitsvektor v eines Gasteilchens die Beziehung $v = \operatorname{grad} u$ gilt.

2. Wir betrachten einen homogenen festen Körper und stellen uns vor, daß ein gewisser Teil seiner Oberfläche erhitzt wird. Dann entsteht in diesem Körper ein Temperaturfeld, wobei die Temperatur im Körper offensichtlich von Punkt zu Punkt verschieden ist und sich außerdem noch mit der Zeit ändert. Folglich ist die Temperatur u eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t:

$$u = u(x, y, z, t)\,.$$

Man kann nun beweisen, daß diese Funktion eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k = \text{const}, \tag{4}$$

erfüllt.

Der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

heißt gewöhnlich LAPLACE-*Operator* der Funktion u und wird mit dem Symbol Δ bezeichnet:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

Gleichung (3) läßt sich somit auch in der Form

$$\Delta u = k \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4'}$$

schreiben.

Gleichung (4) [oder (4')] heißt *Wärmeleitungsgleichung*. Sie ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese Gleichung war bereits EULER bekannt, sie wird aber häufiger mit dem Namen FOURIER in Zusammenhang gebracht.

3. Betrachtet man den stationären Wärmeleitungsprozeß, dann ist u eine Funktion der Ortskoordinaten und von der Zeit unabhängig:

$$u = u(x, y, z) .$$

Gleichung (4) nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

oder

$$\Delta u = 0 . \tag{5'}$$

Gleichung (5) [oder (5')] heißt LAPLACE-*Gleichung*; sie stellt eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

In den oben behandelten Beispielen wurden wir immer auf eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt. Mit diesen Gleichungen sind allerdings die Anwendungen der mathematischen Physik keineswegs erschöpft.

Für die Anwendungen in der Physik sind viele lineare Differentialgleichungen höherer Ordnungen von Interesse. Nicht selten führen Aufgaben aus der Geometrie und der Physik auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen sowie auch auf Systeme von Differentialgleichungen. So sind z. B. Differentialgleichungssysteme aus der Elastizitätstheorie, der Hydrodynamik und der Elektrodynamik hinreichend bekannt.

Die oben genannten Differentialgleichungen — die Wellen-, die Wärmeleitungs- und die LAPLACE-Gleichung — entsprechen verschiedenen physikalischen Problemen, sie sind aber auch aus mathematischer Sicht verschieden. Sie sind nämlich Vertreter der drei wichtigsten Typen von partiellen Differentialgleichungen: des *hyperbolischen*, des *parabolischen* und des *elliptischen Typs*. Das Studium dieser Gleichungstypen ist Gegenstand der mathematischen Physik,

und diesem ist auch das vorliegende Buch gewidmet. Man muß jedoch betonen, daß mit diesen drei Typen die Mannigfaltigkeit der partiellen Differentialgleichungen nicht erschöpft ist; wir zeichnen die genannten Typen deshalb aus, weil sie am vollständigsten untersucht und für die Anwendungen am wichtigsten sind.

Einige Worte zu den im Buch verwendeten Bezeichnungen sowie zum System der Numerierung:

Der m-dimensionale euklidische Raum wird mit dem Symbol E_m bezeichnet. Ist z. B. ein Punkt dieses Raumes mit dem Buchstaben x bezeichnet worden, dann bezeichnen wir die cartesischen Koordinaten dieses Punktes mit $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Wiederholt wird über Teilmengen des Raumes E_m verschiedener Dimensionen, am häufigsten über ein Gebiet oder über eine $(m - 1)$-dimensionale Fläche, zu integrieren sein. Eine solche Integration bezeichnen wir, unabhängig von der Vielfachheit des Integrals, stets nur mit einem Integralzeichen. Wenn die Integrationsvariable z. B. mit dem Buchstaben x bezeichnet wird, dann kennzeichnen wir das LEBESGUEsche Maßelement im Raum E_m (das sog. „Volumenelement") mit dx. Das Maßelement auf einer Fläche (das sog. „Element des Flächeninhaltes") bezeichnen wir mit dS, $d\Gamma$ usw., wenn mit S, Γ usw. die entsprechende Fläche bezeichnet wird. Wenn M eine Punktmenge im Raum E_m bedeutet, dann bezeichnen wir mit $\overline{M}$ die Abschließung dieser Menge. Ist insbesondere Ω ein gewisses Gebiet im Raum E_m und Γ dessen Rand, dann gilt $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Im weiteren verwenden wir häufig die folgende Symbolik: Wenn ein Gebiet mit dem Buchstaben Ω bezeichnet wird, dann kennzeichnen wir mit $|\Omega|$ das Volumen dieses Gebietes. Analog bezeichnen wir mit $|\Gamma|$ den Flächeninhalt der Fläche Γ.

Die Oberfläche der Kugel vom Radius R im Raum E_m wird mit S_R bezeichnet. Für ihren Flächeninhalt ergibt sich

$$|S_R| = R^{m-1} \, |S_1| \, ,$$

wobei S_1 die Einheitssphäre bedeutet.

Bekanntlich gilt die Formel

$$|S_1| = \frac{2\,\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

dabei ist Γ das EULERsche Integral zweiter Art (die Gammafunktion).

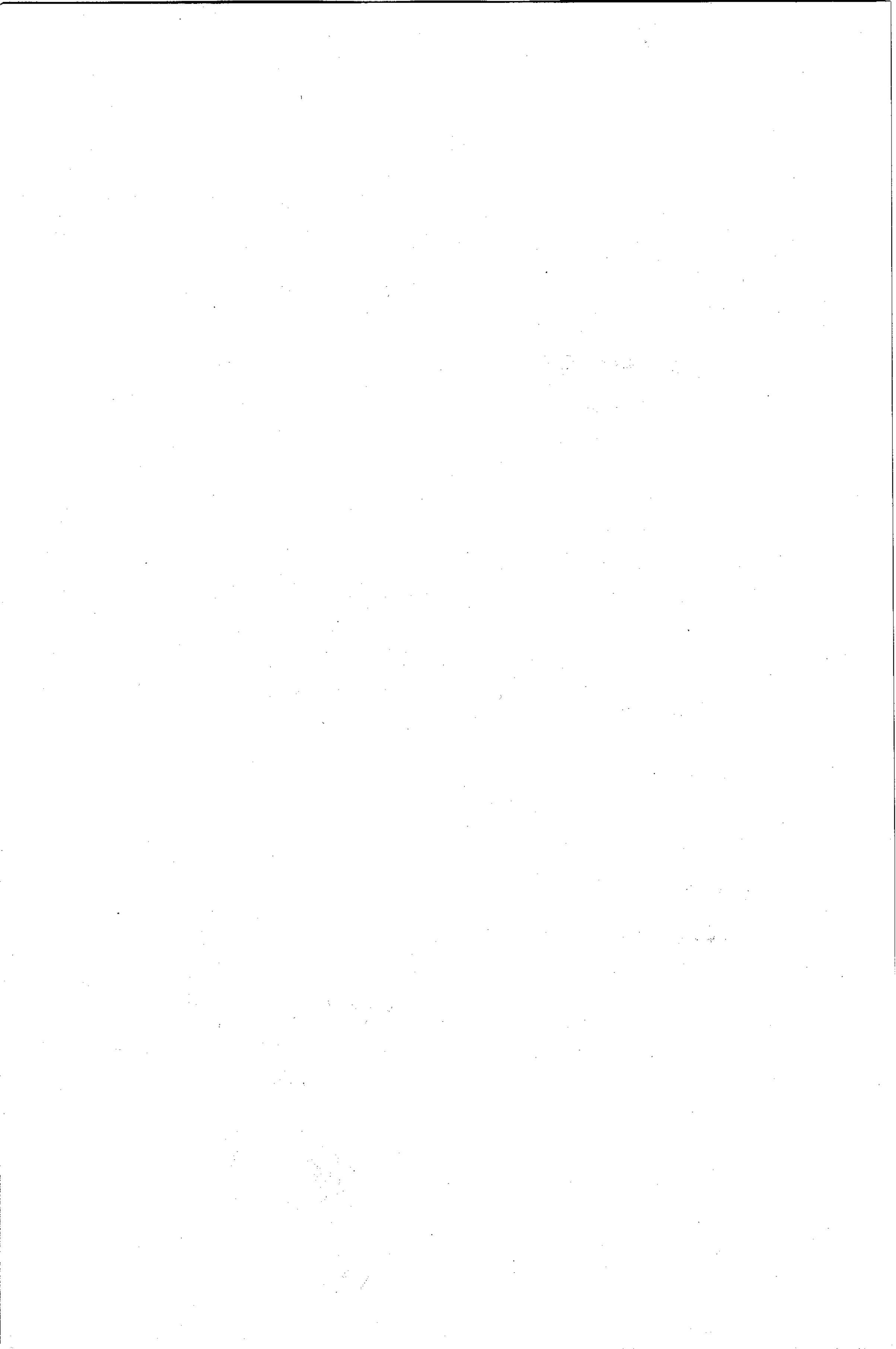
Es sei G eine Teilmenge des Raumes E_m. Die Menge der auf G stetigen und beschränkten Funktionen bezeichnen wir mit $C(G)$; die Beschränktheitsforderung kann natürlich weggelassen werden, wenn die Menge G kompakt ist.

Mit $C^{(k)}(G)$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen, die auf G stetige und beschränkte Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich besitzen. Im weiteren wird am häufigsten der Fall $G = \overline{\Omega}$ auftreten, wobei Ω ein endliches Gebiet ist.

Dabei lassen wir auch den Fall $k = \infty$ zu und bezeichnen mit $C^{(\infty)}(G)$ die Menge der Funktionen, die auf G stetige und beschränkte Ableitungen sämtlicher Ordnungen besitzen.

Die einzelnen Kapitel dieses Buches sind durchgehend numeriert; dagegen hat jedes Kapitel seine eigene Numerierung der Paragraphen. Bei Hinweisen auf eine Formel innerhalb eines Paragraphen wird nur die Nummer dieser Formel angegeben; bei Hinweisen auf eine Formel eines anderen Paragraphen innerhalb eines Kapitels wird in Klammern zuerst die Nummer des Paragraphen und danach die Nummer der Formel angezeigt. Will man auf eine Formel eines anderen Kapitels verweisen, dann werden in Klammern die Nummern des Paragraphen und der Formel angegeben und außerhalb der Klammern wird die Nummer des Kapitels genannt.

Am Schluß des Buches ist in einem kurzen Verzeichnis die Literatur für jeden Teil sowie für die einzelnen Anhänge zusammengestellt. In ihm sind die grundlegenden Lehrbücher und Monographien (seltener Zeitschriftenartikel) zu finden, die sich auf den entsprechenden Teil beziehen. Auf diese Literatur wird gelegentlich im Text verwiesen. Bei solchen Hinweisen wird in eckigen Klammern die Nummer angegeben, die das zitierte Werk im Literaturverzeichnis des betreffenden Teiles besitzt.



Teil I

Mittelfunktionen und verallgemeinerte Ableitungen

KAPITEL 1

MITTELFUNKTIONEN

§ 1. Der Mittelungskern[1])

Es seien x und y beliebige Punkte des Raumes E_m und h eine beliebige positive Zahl. Eine Funktion $\omega_h(x, y)$ nennen wir *Mittelungskern*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Die Funktion $\omega_h(x, y)$ hängt nur von h und r ab, wobei r den Abstand zwischen den Punkten x und y bezeichnet: $r = |x - y|$. Dementsprechend werden wir gewöhnlich $\omega_h(r)$ an Stelle von $\omega_h(x, y)$ schreiben.

2. $\omega_h(r) > 0\,, \qquad r < h\,,$
   $\omega_h(r) = 0\,, \qquad r \geqq h\,.$

3. $\int\limits_{r<h} \omega_h(r)\,dy = \int\limits_{r<h} \omega_h(r)\,dx = 1\,.$

4. $\omega_h(r)$ ist beliebig oft differenzierbar nach den cartesischen Koordinaten der Punkte x und y.

Wir überzeugen uns von der Existenz wenigstens eines solchen Kernes. Es sei

$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}}, & r < h\,, \quad c_h = \text{const} > 0\,; \\ 0\,, & r \geqq h\,. \end{cases} \tag{1}$$

Die Eigenschaften 1 und 2 sind offensichtlich. Die Eigenschaft 3 ist erfüllt, wenn wir

$$c_h = \left\{ \int\limits_{r<h} e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}}\,dy \right\}^{-1} \tag{2}$$

setzen.

Wir bemerken noch, daß man dem Integral (2) eine einfachere Form geben kann. Zu diesem Zweck führen wir Kugelkoordinaten mit x als Mittelpunkt ein

---

[1]) Der Begriff des Mittelungskernes und der damit in engem Zusammenhang stehende Begriff der Mittelfunktion (s. § 2) wurden erstmalig von W. A. Steklow eingeführt. Weiterentwickelt wurden diese Begriffe von S. L. Sobolew, dessen Ideen wir hier auch darlegen. S. L. Sobolew führte auch den Begriff der verallgemeinerten Ableitungen ein, von denen im Kap. 2 die Rede ist, und untersuchte deren Eigenschaften.

und benutzen dabei die bekannte Formel $dy = r^{m-1} dr\, dS_1$. Danach substituieren wir $r = ht$. Dann ergibt sich für c_h der Ausdruck

$$c_h = \frac{1}{h^m |S_1|} \left\{ \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} t^{m-1} dt \right\}^{-1}.$$

Wir beweisen jetzt die Eigenschaft 4. Da die Funktion (1) symmetrisch bezüglich x und y ist, so genügt es, die unendliche Differenzierbarkeit dieser Funktion nach den Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_m$ bei festem x nachzuprüfen. Dafür genügt es wiederum zu zeigen, daß die genannte Funktion Ableitungen beliebig hoher Ordnung nach r besitzt. Letzteres ist offensichtlich, wenn $r < h$ oder $r > h$ ist, wobei im Fall $r > h$ sämtliche Ableitungen gleich Null sind. Es ist deshalb hinreichend zu beweisen, daß die Funktion (1) für $r = h$ Ableitungen beliebiger Ordnung nach r besitzt, die alle gleich Null sind und daß die für $r < h$ berechneten Ableitungen mit $r \to h$ gegen Null streben.

Den Beweis führen wir für die erste Ableitung; für die höheren Ableitungen verläuft der Beweis analog.

a) Die Funktion $\omega_h(r)$ ist stetig für $r = h$. In der Tat folgt aus Formel (1), daß $\omega_h(h+0) = 0 = \omega_h(h)$ ist. Andererseits gilt

$$\omega_h(h-0) = c_h \lim_{r \to h-0} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0$$

wegen

$$-\frac{h^2}{h^2-r^2} \xrightarrow[r \to h-0]{} -\infty .$$

b) Die Ableitung $\omega_h'(h)$ existiert und ist gleich Null. Es ist nämlich

$$\lim_{r \to h+0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{h-r} = \lim_{r \to h+0} 0 = 0 .$$

Gleichzeitig gilt

$$\lim_{r \to h-0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r-h} = \lim_{r \to h-0} \frac{e^{-\frac{h^2}{r^2-h^2}}}{r-h} = 0 ,$$

wovon man sich z. B. mit Hilfe der L'Hospitalschen Regel überzeugen kann. Somit existiert also der Grenzwert

$$\lim_{r \to h} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r-h} = \omega_h'(h)$$

und ist gleich Null.

c) Es gilt die Relation

$$\lim_{r \to h-0} \omega_h'(r) = c_h \lim_{r \to h-0} \frac{2\, r\, h^2}{(h^2-r^2)^2}\, e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0 ,$$

die sich ebenfalls mit Hilfe der L'Hospitalschen Regel leicht nachprüfen läßt.

Also existiert die erste Ableitung $\omega_h'(r)$ und ist für beliebiges r stetig. Genauso weist man die Existenz und Stetigkeit der folgenden Ableitungen nach. Die Eigenschaft 4 ist bewiesen.

§ 2. Mittelfunktionen

Es sei Ω ein endliches Gebiet des Raumes E_m und $u(y)$ eine auf Ω summierbare Funktion. Wir setzen diese Funktion außerhalb Ω fort, indem wir sie dort gleich Null setzen. Es sei x ein beliebiger Punkt des Raumes E_m. Wir setzen

$$u_h(x) = \int_\Omega \omega_h(r)\, u(y)\, dy \,, \tag{1}$$

wobei $\omega_h(r)$ irgendein Mittelungskern ist, der die Eigenschaften 1—4 aus § 1 besitzt. Die Funktion u_h heißt *Mittelfunktion* bezüglich u; die Zahl h heißt *Radius der Mittelung*. Die Mittelfunktion kann man noch in zwei weiteren Formen darstellen:

1. Beachtet man, daß $u(y) = 0$ ist für $y \notin \Omega$, so kann man das Integral (1) auf den gesamten Raum ausdehnen, und dann gilt

$$u_h(x) = \int_{E_m} \omega_h(r)\, u(y)\, dy \,. \tag{1a}$$

2. Infolge der Eigenschaft 2 des Mittelungskernes braucht man nicht über den gesamten Raum zu integrieren, sondern nur über die Kugel vom Radius h mit dem Mittelpunkt x:

$$u_h(x) = \int_{r<h} \omega_h(r)\, u(y)\, dy \,. \tag{1b}$$

Wir erwähnen die einfachsten Eigenschaften der Mittelfunktionen:

1. Die Mittelfunktion ist im ganzen Raum beliebig oft differenzierbar; ihre Ableitungen beliebiger Ordnung erhält man durch Differentiation unter dem Integralzeichen in einer beliebigen der Formeln (1), (1a), (1b).

Wir beweisen z. B., daß

$$\frac{\partial u_h(x)}{\partial x_j} = \int_\Omega u(y)\, \frac{\partial \omega_h(r)}{\partial x_j}\, dy \tag{*}$$

ist.

Es seien $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m$ die Koordinaten des Punktes x. Mit x' bezeichnen wir den Punkt mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + \lambda$, $x_{j+1}, \ldots, x_m$. Schließlich sei $r' = |x' - y|$. Wir bilden den Ausdruck

$$\frac{u_h(x') - u_h(x)}{\lambda} = \int_\Omega u(y)\, \frac{\omega_h(r') - \omega_h(r)}{\lambda}\, dy$$

$$= \int_\Omega u(y)\, \frac{\partial \omega_h(r^*)}{\partial x_j}\, dy \,.$$

Dabei bedeutet $r^* = |x^* - y|$, und x^* ist ein gewisser Punkt auf dem Geraden-

stück, das die Punkte x und x' miteinander verbindet. Die Ableitung $\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial x_j}$ ist stetig und somit gleichmäßig stetig in $\bar{\Omega}$. Dann läßt sich zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\lambda_0(\varepsilon)$ finden derart, daß gilt

$$\left| \frac{\partial \omega_h(r^*)}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_h(r)}{\partial x_j} \right| < \varepsilon \left\{ \int_\Omega |u(y)| \, dy \right\}^{-1}.$$

Somit ist

$$\left| \frac{u_h(x') - u_h(x)}{\lambda} - \int_\Omega u(y) \frac{\partial \omega_h(r)}{\partial x_j} dy \right| < \varepsilon ,$$

und die Formel (*) ist bewiesen. Durch vollständige Induktion überzeugt man sich nun leicht davon, daß die Mittelfunktion $u_h(x)$ stetige Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt, welche man durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhält. Die Ableitungen der Mittelfunktion lassen sich nach einer beliebigen der folgenden Formeln berechnen:

$$\frac{\partial^k u_h}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} = \int_\Omega \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial u_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} u(y) \, dy , \tag{2}$$

$$\frac{\partial^k u_h}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} = \int_{E_m} \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} u(y) \, dy , \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^k u_h}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} = \int_{r<h} \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} u(y) \, dy . \tag{2b}$$

2. Die Mittelfunktion ist gleich Null in allen Punkten, deren Abstand zum Gebiet[1]) Ω nicht kleiner als h ist. In diesem Fall liegt nämlich die Kugel $r < h$ ganz außerhalb Ω, und unter dem Integralzeichen in (1b) steht $u(y) \equiv 0$.

Somit kann die Mittelfunktion nur in dem Gebiet nicht identisch gleich Null sein, welches wir mit $\Omega^{(h)}$ bezeichnen und das man wie folgt erhält: Um jeden Punkt $x \in \Omega$ beschreiben wir eine Kugel vom Radius h mit dem Mittelpunkt x; die Vereinigung dieser Kugeln ist $\Omega^{(h)}$. Offenbar gilt $\Omega^{(h)} \supset \Omega$. Wenn z. B. Ω eine Kugel vom Radius R ist, dann stellt $\Omega^{(h)}$ eine zu Ω konzentrische Kugel vom Radius $R + h$ dar.

§ 3. Konvergenz der Mittelfunktionen

Satz 1.3.1. *Ist $u \in C(\Omega)$, so gilt für die Mittelfunktionen*

$$u_h(x) \underset{h \to 0}{\to} u(x)$$

gleichmäßig in jedem abgeschlossenen inneren Teilgebiet[2]) des Gebietes Ω.

[1]) Der Abstand vom Punkt x zu Ω wird durch die Formel

$$\varrho(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} |x - y|$$

definiert. Offensichtlich ist $\varrho(x, \Omega) = 0$ für $x \in \Omega$.

[2]) Teilgebiet des Gebietes Ω heißt jedes Gebiet $\Omega' \subset \Omega$. Dabei heißt Ω' inneres Teilgebiet, wenn seine Abschließung $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ ist, d. h. wenn Ω' zusammen mit seinem Rand im Inneren von Ω liegt.

Beweis. Es sei Ω' ein inneres Teilgebiet des Gebietes Ω. Wir konstruieren ein Gebiet Ω'', das ein inneres Teilgebiet von Ω ist und das seinerseits Ω' als inneres Teilgebiet enthält (Abb. 3).

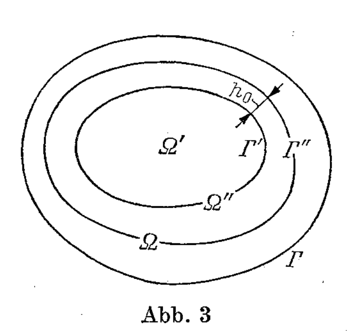


Abb. 3

Die Ränder der Gebiete Ω' und Ω'' bezeichnen wir entsprechend mit Γ' und Γ''; h_0 sei der kleinste Abstand zwischen den Punkten der Ränder Γ' und Γ''. Wir wählen $h < h_0$. Auf Grund der Formel (2b) und der Eigenschaft 3 des Mittelungskernes aus § 1 erhalten wir

$$u_h(x) - u(x) = \int_{r<h} [u(y) - u(x)]\, \omega_h(r)\, dy\,. \tag{1}$$

Ist $x \in \overline{\Omega'}$, so ist im Integral (1) $y \in \overline{\Omega''}$. Im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega''}$ ist die stetige Funktion u gleichmäßig stetig, und deshalb gilt für eine beliebig kleine positive Zahl ε: $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$ für $r \leqq h$ bei hinreichend kleinem h. Unter Berücksichtigung von $\omega_h(r) \geqq 0$ (Eigenschaft 2) erhalten wir aus Formel (1)

$$|u_h(x) - u(x)| \leqq \varepsilon \int_{r<h} \omega_h(r)\, dy = \varepsilon\,.$$

Der Satz ist somit bewiesen.

Satz 1.3.2. *Bei der Mittelung kann sich die Norm im Raum $L_2(\Omega)$ nicht vergrößern.*

Beweis. Es sei $u \in L_2(\Omega)$. Wir beweisen, daß in der Metrik von $L_2(\Omega)$

$$||u_h|| \leqq ||u|| \tag{2}$$

gilt.

Wir schätzen das Quadrat der Mittelfunktion nach der Cauchy-Bunjakowskischen Ungleichung ab:

$$u_h^2(x) = \left\{\int_\Omega u(y)\, \omega_h(r)\, dy\right\}^2 = \left\{\int_\Omega u(y) \sqrt{\omega_h(r)} \sqrt{\omega_h(r)}\, dy\right\}^2 \leqq$$
$$\leqq \int_\Omega u^2(y)\, \omega_h(r)\, dy \int_\Omega \omega_h(r)\, dy \leqq \int_\Omega u^2(y)\, \omega_h(r)\, dy\,, \tag{3}$$

da auf Grund der Eigenschaft 2 des Mittelungskernes

$$\int_\Omega \omega_h(r)\, dy = \int_{\Omega \cap (r<h)} \omega_h(r)\, dy \leqq \int_{r<h} \omega_h(r)\, dy = 1$$

ist. Durch Integration der Ungleichung (3) über das Gebiet Ω erhalten wir

$$||u_h||^2 = \int_\Omega u_h^2(x)\,dx \leqq \int_\Omega u^2(y)\left[\int_\Omega \omega_h(r)\,dx\right]dy \leqq \int_\Omega u^2(y)\,dy = ||u||^2\,,$$

was zu beweisen war.

Satz 1.3.3. *Ist $u \in L_2(\Omega)$, so gilt*

$$||u - u_h||_{L_2(\Omega)} \underset{h\to 0}{\to} 0\,.$$

Beweis. Bekanntlich[1]) läßt sich für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein Polynom f angeben derart, daß

$$||u - f||_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Wir wenden die Dreiecksungleichung an:

$$||u - u_h|| \leqq ||u - f|| + ||f - f_h|| + ||f_h - u_h||\,.$$

Nach Satz 2 ist

$$||f_h - u_h|| \leqq ||f - u||$$

und somit

$$||u - u_h|| \leqq 2\,||f - u|| + ||f - f_h|| < \frac{2\varepsilon}{3} + ||f - f_h||\,.$$

Wir wählen ein Gebiet Ω_1, für das Ω ein eigentliches inneres Teilgebiet ist. Das Polynom f ist stetig in Ω_1, deshalb gilt

$$f_h \underset{h\to 0}{\to} f$$

gleichmäßig in einem beliebigen inneren abgeschlossenen Teilgebiet von Ω_1, insbesondere in $\overline{\Omega}$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz in einem abgeschlossenen Gebiet folgt aber die Konvergenz im Mittel, und für hinreichend kleine h ist

$$||f - f_h||_{L_2(\Omega)} < \frac{1}{3}\varepsilon\,.$$

Hieraus folgt nun leicht unsere Behauptung.

Definition. Eine Funktion heißt *finit* in einem endlichen Gebiet Ω, wenn sie in Ω beliebig oft differenzierbar ist und nur in einem gewissen inneren Teilgebiet des Gebietes Ω von Null verschieden ist. Eine finite Funktion kann man auch noch anders definieren. Es sei Γ der Rand des Gebietes Ω. *Randstreifen* des Gebietes Ω heißt die Menge aller Punkte dieses Gebietes mit der Eigenschaft, daß ihr Abstand zu Γ nicht größer ist als eine gegebene Konstante δ, die man die *Streifenbreite* nennt. Eine Funktion heißt finit in Ω, wenn sie in Ω beliebig oft differenzierbar ist und wenn sie in einem gewissen Randstreifen des Gebietes Ω verschwindet.

Den Randstreifen des Gebietes Ω mit der Breite δ bezeichnen wir mit Ω_δ.

---

[1]) Siehe z. B. W. I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. V, 2. Auflage, Berlin 1962, S. 152 (Übersetzung aus dem Russischen).

Wenn Ω ein unendliches Gebiet ist, dann verlangen wir noch von der finiten Funktion, daß sie außerhalb einer gewissen Kugel (welche von der Funktion selbst abhängt) verschwindet.

Die Menge der in einem gegebenen Gebiet Ω finiten Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(\Omega)$.

Satz 1.3.4. *Die Menge $\mathfrak{F}(\Omega)$ ist dicht im Raum $L_2(\Omega)$.*

Beweis. Es ist zu beweisen, daß man eine beliebige Funktion $u \in L_2(\Omega)$ in der Metrik von $L_2(\Omega)$ durch eine finite Funktion mit einer beliebigen Genauigkeit approximieren kann.

Wir wählen die Zahl δ derart, daß das Maß des Streifens Ω_δ hinreichend klein ist, nämlich: Wir geben $\varepsilon > 0$ vor und wählen δ so, daß gilt

$$\int_{\Omega_\delta} u^2\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Wir betrachten die durch die Gleichung

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_\delta, \\ 0, & x \in \Omega_\delta \end{cases}$$

definierte Funktion. Offenbar ist $v \in L_2(\Omega)$; dabei gilt

$$\|u - v\|^2 = \int_{\Omega_\delta} u^2\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

und folglich

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Wir nehmen $h < \frac{\delta}{2}$ und konstruieren die Mittelfunktion $v_h(x)$. Diese ist finit in Ω, da sie beliebig oft differenzierbar ist und gleich Null ist im Randstreifen $\Omega_{\delta-h}$ (siehe Eigenschaften 1 und 2 der Mittelfunktion aus § 2). Nach dem Satz 1.3.3 kann man eine Zahl h_0 wählen derart, daß für $h < h_0$ gilt

$$\|v - v_h\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Aus der Dreiecksungleichung und den Beziehungen (4) und (5) folgt nun

$$\|u - v_h\| \leqq \|u - v\| + \|v - v_h\| < \varepsilon, \qquad h < h_0.$$

Der Satz ist bewiesen.

Folgerung 1.3.1. *Wenn eine Menge $M \subset L_2(\Omega)$ die Menge aller in Ω finiten Funktionen enthält, dann ist M dicht in $L_2(\Omega)$.*

Übungsaufgaben

1. Man beweise, daß die Mittelung die Norm im Raum $L_p(\Omega)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ nicht vergrößert.

2. Man beweise, daß für $u \in L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ gilt

$$\|u - u_h\|_{L_p} \underset{h \to 0}{\to} 0 .$$

3. Man kann Mittelungskerne betrachten, die die Eigenschaften 1, 2 und 3, jedoch nicht die Eigenschaft 4 besitzen. Das einfachste Beispiel eines solchen Kernes ist

$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h, & r < h \\ 0, & r \geqq h, \end{cases}$$

wobei c_h eine geeignet gewählte Konstante ist. Es ist die Konstante c_h zu bestimmen und zu beweisen, daß gilt:

a) Ist $u \in L(\Omega)$, so ist $u_h \in C(\overline{\Omega})$; ist $u \in C^{(k)}(\overline{\Omega})$, so ist $u_h \in C^{(k+1)}(\overline{\Omega \setminus \Omega_h})$.

b) Es gelten die Sätze 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 sowie die Behauptungen der Übungsaufgaben 1 und 2.

KAPITEL 2

VERALLGEMEINERTE ABLEITUNGEN

§ 1. Der Begriff der verallgemeinerten Ableitung

Einleitend werden wir eine wichtige Formel der Integralrechnung herleiten, die unter der Bezeichnung *Formel der partiellen Integration* bekannt ist.

Es sei Ω ein endliches Gebiet des m-dimensionalen euklidischen Raumes, das durch die stückweise glatte Fläche Γ begrenzt wird. Wir erinnern an die GAUSS-OSTROGRADSKIsche Formel

$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_k}\, dx = \int_\Gamma P \cos(\nu, x_k)\, d\Gamma ,$$

hierbei ist ν die bezüglich Ω äußere Normale der Fläche Γ. Von der Funktion $P(x)$ genügt es zu fordern, daß sie der Klasse $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ angehört.

Wir betrachten das Integral

$$\int_\Omega P \frac{\partial Q}{\partial x_k}\, dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}(PQ)\, dx - \int_\Omega Q \frac{\partial P}{\partial x_k}\, dx$$

mit $P, Q \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$. Ersetzt man das erste Integral auf der rechten Seite nach der GAUSS-OSTROGRADSKIschen Formel, so erhält man die Formel für die partielle Integration

$$\int_\Omega P \frac{\partial Q}{\partial x_k}\, dx = -\int_\Omega Q \frac{\partial P}{\partial x_k}\, dx + \int_\Gamma PQ \cos(\nu, x_k)\, d\Gamma .$$

Wir erwähnen einige Folgerungen aus dieser Formel. Wenn eine der Funktionen P oder Q auf Γ gleich Null ist, dann verschwindet das Oberflächenintegral und man erhält die einfache Formel

$$\int_\Omega P \frac{\partial Q}{\partial x_k}\, dx = -\int_\Omega Q \frac{\partial P}{\partial x_k}\, dx .$$

Wir betrachten jetzt ein Integral von etwas komplizierterer Gestalt:

$$\int_\Omega P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}\, dx .$$

Wenn die Funktion P die nötigen stetigen Ableitungen besitzt, dann kann man dieses Integral k-mal partiell integrieren, so daß die Funktion Q unter dem Integralzeichen des Raumintegrals von der Differentiation befreit wird:

$$\int_\Omega P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = - \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx +$$

$$+ \int_\Gamma P \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \cos(\nu, x_1)\, d\Gamma = \cdots$$

$$\cdots = (-1)^k \int_\Omega Q \frac{\partial^k P}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx + \int_\Gamma R(P, Q)\, d\Gamma .$$

$R(P, Q)$ bezeichnet einen Ausdruck, der von den Funktionen P, Q und deren Ableitungen bis zur $(k-1)$-ten Ordnung einschließlich abhängt.

Wir betrachten die Menge $\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ aller Funktionen, die in $\bar{\Omega}$ stetig und k-mal stetig differenzierbar sind und die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ einschließlich auf dem Rand des Gebietes Ω verschwinden. Offenbar gilt $\mathfrak{M}^{(k+1)}(\Omega) \subset \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ und $\mathfrak{F}(\Omega) \subset \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ für beliebiges k.

Es seien $u(x)$ und $v(x)$ in Ω summierbare Funktionen, und für eine beliebige Funktion $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ gelte die Identität

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_\Omega v \varphi\, dx . \tag{1}$$

Dann heißt v *verallgemeinerte Ableitung* k-ter Ordnung der Funktion u im Gebiet Ω. Als Bezeichnung für die verallgemeinerte Ableitung benutzt man das übliche Symbol: Man schreibt

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} . \tag{2}$$

Satz 2.1.1. *Die verallgemeinerte Ableitung* (2) *ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es ist folgendes zu zeigen. Wenn $u(x)$ eine in Ω summierbare Funktion ist und wenn zwei ebenfalls in Ω summierbare Funktionen $v_1(x)$ und $v_2(x)$ existieren, die für beliebiges $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ die Beziehungen

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_\Omega v_1 \varphi\, dx ,$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_\Omega v_2 \varphi\, dx \tag{3}$$

erfüllen, dann ist $v_1(x) \equiv v_2(x)$. Wie gewöhnlich sehen wir zwei Funktionen als gleich an, wenn sie äquivalent sind (d. h. wenn sie höchstens auf einer Menge vom Maß Null verschieden sind).

Zieht man die zweite der Gleichungen (3) von der ersten ab und setzt $v_1(x) - v_2(x) = w(x)$, so erhält man die für beliebiges $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ gültige Beziehung

$$\int_\Omega w(x)\,\varphi(x)\,dx = 0\,. \tag{4}$$

Wir beweisen, daß Gleichung (4) für eine beliebige beschränkte meßbare Funktion $\varphi(x)$ gilt, die in einem gewissen Randstreifen verschwindet. Es sei $\varphi(x)$ eine solche Funktion, und sie sei gleich Null in einem Streifen der Breite δ. Wir wählen $h < \frac{\delta}{2}$ und bilden die Mittelfunktion $\varphi_h(x)$. Diese ist beliebig oft differenzierbar und gleich Null in einem Randstreifen der Breite $\delta - h$. Somit ist $\varphi_h \in \mathfrak{F}(\Omega)$ und erst recht $\varphi_h \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Für die Funktion $\varphi_h(x)$ gilt die Beziehung:

$$\int_\Omega w(x)\,\varphi_h(x)\,dx = 0\,. \tag{5}$$

Man sieht leicht, daß für beliebiges h die Funktionen $\varphi_h(x)$ durch ein und dieselbe Konstante beschränkt sind: Wenn gilt $|\varphi(x)| < N = \text{const}$, so ist

$$|\varphi_h(x)| = \Big|\int_{r<h} \varphi(y)\,\omega_h(r)\,dy\Big| \leqq N \int_{r<h} \omega_h(r)\,dy = N\,.$$

Eine in Ω beschränkte und meßbare Funktion φ ist in jedem Fall quadratisch summierbar in Ω. Aus dem Satz 1.2.3 folgt

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L_2(\Omega)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Nach dem bekannten Satz über im Mittel konvergente Funktionenfolgen[1]) läßt sich eine Zahlenfolge $h_n \to 0$ auswählen derart, daß fast überall in Ω gilt

$$\varphi_{h_n}(x) \to \varphi(x)\,.$$

In der Beziehung (5) setzen wir $h = h_n$.

Der Integrand des Integrals (5) ist durch die summierbare Funktion $N|w(x)|$ beschränkt, und für $n \to \infty$ konvergiert er fast überall gegen die Funktion $w(x) \times \varphi(x)$. Nach dem bekannten Satz von Lebesgue über den Grenzübergang unter dem Integralzeichen erhalten wir

$$\int_\Omega w(x)\,\varphi(x)\,dx = 0\,,$$

was zu beweisen war. Jetzt setzen wir in der Gleichung (4)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \Omega_{\delta/2}\,,\\ \operatorname{sign} w(x)\,, & x \in \Omega' = \Omega \setminus \Omega_{\delta/2}\,.\end{cases}$$

Wir erhalten dann

$$\int_{\Omega'} |w(x)|\,dx = 0\,. \tag{6}$$

---

[1]) Siehe z. B. I. P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, 2. Auflage, Berlin 1961, S. 167 (Übersetzung aus dem Russischen).

und folglich ist $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Da die Zahl $\delta > 0$ beliebig war, so ist $w(x) \equiv 0$ in Ω. Der Satz ist bewiesen.

Wenn die Funktion $u(x)$ in Ω zusammen mit ihren Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich stetig ist, dann existieren ihre verallgemeinerten Ableitungen k-ter Ordnung, und diese stimmen mit den gewöhnlichen Ableitungen überein. In der Tat kann man das Integral auf der linken Seite der Formel (1) k-mal partiell integrieren. Dabei verschwinden die Oberflächenintegrale, da auf dem Rand des Gebietes Ω die Funktion φ und ihre Ableitungen bis zur $(k-1)$-ten Ordnung einschließlich gleich Null sind. Als Ergebnis erhalten wir die Beziehung

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_\Omega \varphi \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx , \tag{7}$$

wobei rechts die gewöhnliche (stetige) Ableitung von u steht. Gleichung (7) zeigt, daß in diesem Fall die verallgemeinerte Ableitung existiert und gleich ist der stetigen Ableitung

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} .$$

Wir behandeln jetzt einige Beispiele.

Beispiel 1. Es sei Ω das Intervall $(-1, 1)$. Die Funktion $u(x) = |x|$ besitzt die verallgemeinerte Ableitung $u'(x) = \operatorname{sign} x$. Wenn nämlich $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$ ist, so ist $\varphi(x)$ stetig differenzierbar auf dem Segment $[-1, +1]$ und $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Es gilt

$$\int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} x \varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} x \varphi'(x)\, dx .$$

Nach partieller Integration erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} \varphi(x) \operatorname{sign} x\, dx ,$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

Beispiel 2. Die Funktion $\operatorname{sign} x$ hat im Intervall $(-1, 1)$ keine verallgemeinerte erste Ableitung (obgleich sie, ebenso wie die Funktion $|x|$, eine stetige Ableitung für $x \neq 0$ besitzt). Um sich davon zu überzeugen, bilden wir das Integral

$$\int_{-1}^{1} \varphi'(x) \operatorname{sign} x\, dx = -\int_{-1}^{0} \varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} \varphi'(x)\, dx = -2\varphi(0) , \tag{8}$$

wobei $\varphi \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, 1)$ ist.

Es existiert keine Funktion $v(x)$, die im Intervall $(-1, 1)$ summierbar ist und die für eine beliebige Funktion $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$ die Beziehung

$$\int_{-1}^{+1} v(x) \varphi(x)\, dx = 2\varphi(0) . \tag{9}$$

erfüllt.

In der Tat: Nehmen wir an, daß eine solche Funktion existiert. Dann ist die Funktion

$$V(x) = \int_0^x v(y)\, dy$$

auf dem Segment $[-1, 1]$ absolut stetig und besitzt dort die summierbare Ableitung $v(x)$. Durch Anwendung der partiellen Integration auf das Integral (9) erhalten wir unter Verwendung der Formel (8) folgende Beziehung:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi'(x)\,[\operatorname{sign} x - V(x)]\,dx = 0\,.$$

Diese gilt für eine beliebige Funktion $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$. Dann ist aber[1])

$$\operatorname{sign} x = V(x) + \text{const}\,, \qquad x \in (-1, +1)\,,$$

was nicht möglich ist, da im Punkte $x = 0$ die linke Seite unstetig, die rechte Seite dagegen stetig ist.

Beispiel 3. Die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ seien stetig auf dem Segment $[-1, 1]$, aber in keinem seiner Punkte differenzierbar. Man kann dann beweisen, daß die im Quadrat $0 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$ stetige Funktion zweier Veränderlicher

$$u(x) = u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \tag{10}$$

keine verallgemeinerten ersten Ableitungen hat. Dennoch besitzt diese Funktion eine verallgemeinerte Ableitung zweiter Ordnung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}$, und diese Ableitung ist gleich Null. Um das festzustellen, genügt es zu beweisen, daß für eine beliebige Funktion $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$, wobei Ω das Quadrat $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$ bedeutet, die folgende Beziehung gilt:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} u\,(x_1, x_2)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_1\,dx_2 = 0\,.$$

Diese Beziehung ergibt sich aber aus den Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} u(x_1, x_2)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x_1)\left\{\int_{-1}^{+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_2\right\}dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2)\left\{\int_{-1}^{+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_1\right\}dx_2 =$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x_1)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Bigg|_{x_2=-1}^{x_2=+1} dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Bigg|_{x_1=-1}^{x_1=+1} dx_2 = 0\,.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß aus der Existenz der verallgemeinerten Ableitung irgendeiner Ordnung keineswegs die Existenz der verallgemeinerten Ableitungen niedrigerer Ordnung folgt.

§ 2. Die einfachsten Eigenschaften der verallgemeinerten Ableitung

Satz 2.2.1. *Die Funktion $u(x)$ besitze im Gebiet Ω eine verallgemeinerte Ableitung $v(x)$ der Form (1.2). Dann ist im Gebiet $\Omega \setminus \Omega_h$ die Mittelfunktion dieser Ableitung gleich der entsprechenden Ableitung der Mittelfunktion.*

[1]) Siehe z. B. W. I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. V, 2. Auflage, Berlin 1962, § 52, Satz 12 (Übersetzung aus dem Russischen).

Beweis. Wir erinnern daran, daß Ω_h den Randstreifen des Gebietes Ω der Breite h bedeutet. Die Menge $\Omega^{(h)} = \Omega \setminus \Omega_h$ ist offen, und für $x \in \Omega \setminus \Omega_h$ ist der Abstand vom Punkt x zum Rand des Gebietes Ω größer als h (Abb. 4). Deshalb ist der Mittelungskern $\omega_h(r) \in \mathfrak{F}(\Omega)$. Nach Formel (1.1) gilt

$$\int_\Omega u(y) \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \ldots \partial y_m^{k_m}} dy = (-1)^k \int_\Omega v(y)\, \omega_h(y)\, dy = (-1)^k v_h(x) . \quad (1)$$

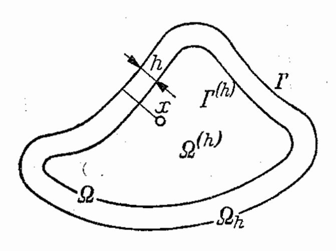


Abb. 4

Da der Mittelungskern $\omega_h(r)$ nur von der Differenz $x - y$ abhängt, so ist

$$\frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \ldots \partial y_m^{k_m}} = (-1)^k \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} .$$

Setzen wir dies in Gleichung (1) ein, so erhalten wir

$$v_h(x) = \frac{\partial^k u_h(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} ,$$

was zu beweisen war.

Satz 2.2.2. *Es sei Ω' ein Teilgebiet des Gebietes Ω. Wenn $v(x)$ die verallgemeinerte Ableitung*

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \quad (2)$$

der Funktion $u(x)$ im Gebiet Ω ist, dann ist $v(x)$ auch im Gebiet Ω' verallgemeinerte Ableitung von $u(x)$.

Beweis. Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega')$. Wir setzen die Funktion $\varphi(x)$ in $\Omega \setminus \Omega'$ gleich Null. Dann ist offenbar $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Auf die Funktionen $u(x)$ und $\varphi(x)$ wenden wir die Formel (1.1) an. Da auf beiden Seiten dieser Formel die Integrale über $\Omega \setminus \Omega'$ Null sind, so erhalten wir die Beziehung

$$\int_{\Omega'} u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_{\Omega'} v\, \varphi\, dx ,$$

was bedeutet, daß $v(x)$ verallgemeinerte Ableitung der Gestalt (2) von $u(x)$ im Teilgebiet Ω' ist.

Satz 2.2.3. *Es sei $v(x)$ im Gebiet Ω verallgemeinerte Ableitung von $u(x)$ der Gestalt* (2) *und $w(x)$ verallgemeinerte Ableitung von $v(x)$ der Gestalt*

$$w(x) = \frac{\partial^l v}{\partial x_1^{l_1}\, \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_m^{l_m}}.$$

Dann ist $w(x)$ in demselben Gebiet Ω verallgemeinerte Ableitung von $u(x)$ der Gestalt

$$w(x) = \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x_1^{k_1+l_1}\, \partial x_2^{k_2+l_2} \ldots \partial x_m^{k_m+l_m}}.$$

Beweis. Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k+l)}(\Omega)$. Dann ist $\dfrac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{l_1}\, \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_m^{l_m}} \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$, und nach Formel (1.1) ist

$$\int_\Omega u \frac{\partial^{k+l} \varphi}{\partial x_1^{k_1+l_1}\, \partial x_2^{k_2+l_2} \ldots \partial x_m^{k_m+l_m}}\, dx =$$

$$= (-1)^k \int_\Omega v \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{l_1}\, \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_m^{l_m}}\, dx. \tag{3}$$

Auf Grund derselben Formel (1.1) gilt auch

$$\int_\Omega v \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{l_1}\, \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_m^{l_m}}\, dx = (-1)^l \int_\Omega w\, \varphi\, dx.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (3) ein, so erhalten wir die Beziehung

$$\int_\Omega u \frac{\partial^{k+l} \varphi}{\partial x_1^{k_1+l_1}\, \partial x_2^{k_2+l_2} \ldots \partial x_m^{k_m+l_m}}\, dx = (-1)^{k+l} \int_\Omega w\, \varphi\, dx,$$

aus der nun der Satz 2.2.3 folgt.

§ 3. Grenzwerteigenschaften der verallgemeinerten Ableitungen

Im vorliegenden Paragraphen setzen wir voraus, daß sowohl die gegebenen Funktionen als auch deren verallgemeinerte Ableitungen, von denen im weiteren die Rede ist, im Gebiet Ω, das wir nach wie vor als endlich annehmen, quadratisch summierbar sind.

Satz 2.3.1. *Die Funktionen $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, mögen in Ω verallgemeinerte Ableitungen ein und derselben Gestalt besitzen:*

$$v_n(x) = \frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}.$$

Wenn beide Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ in der Metrik von $L_2(\Omega)$ entsprechend gegen die Grenzfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ konvergieren, so ist die Funktion $v(x)$ im Gebiet Ω verallgemeinerte Ableitung von $u(x)$ derselben Gestalt.

Beweis. Nach Definition der verallgemeinerten Ableitung gilt

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_\Omega v_n \varphi \, dx , \quad \varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega) . \tag{1}$$

Jedes der Integrale in Gleichung (1) stellt das Skalarprodukt zweier Funktionen aus $L_2(\Omega)$ dar. Nach dem erlaubten Grenzübergang im Skalarprodukt erhalten wir die Formel (1.1), und der Satz ist bewiesen.

Satz 2.3.2. *Es sei $v(x)$ verallgemeinerte Ableitung von $u(x)$ im Gebiet Ω:*

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} .$$

In einem beliebigen inneren Teilgebiet $\Omega' \subset \Omega$ läßt sich eine Folge beliebig oft differenzierbarer Funktionen $\{u_n(x)\}$ konstruieren derart, daß in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega')$ gilt

$$u_n \to u \text{ und } \frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} \to v . \tag{2}$$

Der Beweis ist sehr einfach. Man kann

$$u_n(x) = u_{h_n}(x)$$

wählen, wobei h_n eine gegen Null konvergente Folge positiver Zahlen ist. Dann folgt die erste der Beziehungen (2) aus dem Satz 1.3.3, die zweite Beziehung ergibt sich aus den Sätzen 1.3.3 und 2.2.1.

Satz 2.3.3. *Es sei Ω ein endliches Gebiet des Raumes E_m. Wenn eine gewisse Funktion der Klasse $L_2(\Omega)$ sämtliche verallgemeinerten Ableitungen erster Ordnung, welche stetig in Ω sind, besitzt, so ist diese Funktion in Ω stetig und stetig differenzierbar.*

Beweis. Sei $u(x)$ die genannte Funktion und $u_h(x)$ die entsprechende Mittelfunktion. Dann konvergiert $u_h(x) \underset{h \to 0}{\to} u(x)$ in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$; gleichzeitig konvergiert $\frac{\partial u_h}{\partial x_k} \to \frac{\partial u}{\partial x_k}$ gleichmäßig in $\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$ für eine beliebige positive Zahl δ. Dann existiert eine Folge $h_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$ derart, daß $u_{h_n}(x) \underset{n \to \infty}{\to} u(x)$ fast überall in Ω gilt. Wir halten δ fest und konstruieren in $\Omega \setminus \Omega_\delta$ einen Kubus Q, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Der Einfachheit halber setzen wir $u_{h_n}(x) = u_n(x)$ und wählen in Q einen Punkt x_0, in dem die Folge $\{u_n(x_0)\}$ konvergiert. Es sei x ein beliebiger Punkt des Kubus Q und L ein in diesem Kubus gelegener Polygonzug, der die Punkte x_0 und x miteinander verbindet und dessen einzelne Strecken parallel zu den Koordinatenachsen sind. Bezeichnet man mit ϱ den Radiusvektor des variablen Punktes ξ, dann gilt

$$u_n(x) = u_n(x_0) + \int_L \operatorname{grad} u_n(\xi) \, d\varrho .$$

Aus dieser Formel ersieht man, daß die Folge $\{u_n(x)\}$ in Q gleichmäßig konvergiert und die Funktion $u(x)$ folglich in Q stetig ist (genauer gesagt, einer stetigen Funktion äquivalent ist). Da man den Kubus stets so konstruieren kann, daß er einen beliebig vorgegebenen Punkt des Gebietes $\Omega \setminus \Omega_\delta$ enthält, so ist die Funktion u stetig in $\Omega \setminus \Omega_\delta$ und somit, da δ beliebig war, im gesamten Gebiet Ω.

Im Kubus Q gelten die Beziehungen

$$u_n(x) \to u(x)\,, \quad \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_k} \to \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \ (k = 1, 2, \ldots, m)\,,$$

wobei in beiden Fällen die Konvergenz gleichmäßig ist. Nach dem bekannten Satz über die Differentiation einer Funktionenfolge sind dann $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, die gewöhnlichen Ableitungen der Funktion $u(x)$, die somit in Ω stetig differenzierbar ist.

Folgerung 2.3.1. Wenn die Funktion $u \in L_2(\Omega)$ einen verallgemeinerten Gradienten besitzt und dieser in Ω identisch gleich Null ist, so ist in diesem Gebiet $u(x) \equiv \text{const}$.

§ 4. Der Fall einer unabhängigen Veränderlichen

Es erweist sich, daß im Falle einer unabhängigen Veränderlichen zwischen der Klasse der Funktionen, die eine verallgemeinerte erste Ableitung besitzen und der Klasse der absolut stetigen Funktionen ein enger Zusammenhang besteht. Wir erinnern daran, daß die Funktion $u(x)$ der reellen Veränderlichen x absolut stetig auf dem Segment $[a, b]$ ist, wenn eine auf diesem Segment summierbare Funktion $v(x)$ existiert derart, daß gilt

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt + \text{const}\,, \qquad x \in [a, b]\,.$$

Aus den bekannten Sätzen von Lebesgue folgt, daß die Funktion $u(x)$ fast überall auf dem Segment $[a, b]$ eine gewöhnliche Ableitung besitzt, die gleich $v(x)$ ist.

Satz 2.4.1. *Die Funktion $u(x)$ sei fast überall im Intervall (a, b) definiert und quadratisch summierbar und besitze in (a, b) eine verallgemeinerte, ebenfalls quadratisch summierbare Ableitung $v(x)$. Dann ist $u(x)$ einer Funktion äquivalent, die auf dem Segment $[a, b]$ absolut stetig ist und fast überall in (a, b) eine gewöhnliche Ableitung hat, die gleich $v(x)$ ist.*

Beweis. Das Segment $[\alpha, \beta]$ liege im Intervall (a, b). Nach dem Satz 2.3.2 existiert eine Folge von Funktionen $u_n(x) \in C^\infty[\alpha, \beta]$ derart, daß in der Metrik von $L_2(\alpha, \beta)$ gilt

$$u_n \to u\,, \quad u_n' \to v\,.$$

Nach der NEWTON-LEIBNIZschen Formel ist

$$u_n(x) - u_n(\alpha) = \int_\alpha^x u_n'(t)\,dt$$

und folglich

$$u_n(\alpha) = u_n(x) - \int_\alpha^x u_n'(t)\,dt\,. \tag{1}$$

Die rechte Seite der Gleichung (1) konvergiert in der Metrik von $L_2(\alpha, \beta)$ gegen die Grenzfunktion

$$u(x) - \int_\alpha^x v(t)\,dt\,.$$

Dann konvergiert in derselben Metrik auch die linke Seite. Für eine Folge konstanter Funktionen ist aber die Konvergenz im Mittel die gewöhnliche Konvergenz dieser Zahlenfolge. Somit existiert der Grenzwert der Folge $\{u_n(\alpha)\}$, den wir mit c bezeichnen:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\alpha) = c\,.$$

Lassen wir in Gleichung (1) n gegen ∞ streben, so finden wir

$$u(x) = \int_\alpha^x v(t)\,dt + c\,. \tag{2}$$

Die Beziehung (2) gilt fast überall auf dem Segment $[\alpha, \beta]$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber überall auf diesem Segment definiert und stetig. Wir nehmen jetzt an, die Gleichung (2) gelte überall auf $[\alpha, \beta]$. Das ist gleichbedeutend damit, daß wir die gegebene Funktion $u(x)$ durch eine andere, ihr äquivalente Funktion ersetzt haben. Nun ist die Funktion $u(x)$ absolut stetig auf dem Segment $[\alpha, \beta]$; offensichtlich ist auch $c = u(\alpha)$.

In Formel (2) kann x einen beliebigen Punkt des Intervalls (a, b) bedeuten, da wir mit α und β beliebig nahe an a bzw. b herangehen können. Wir halten α fest und gehen in Formel (2) mit $x \to b$. Da die Funktion $v(t)$ auf dem ganzen Intervall (a, b) summierbar ist, so hat die rechte Seite dieser Formel einen Grenzwert, der gleich ist

$$\int_\alpha^b v(t)\,dt + u(\alpha)\,.$$

Wenn wir

$$u(b) = \int_\alpha^b v(t)\,dt + u(\alpha)$$

setzen, dann erweist sich die Funktion $u(x)$ als absolut stetig auf dem Segment $[\alpha, b]$, wobei α ein beliebiger Punkt aus dem Intervall (a, b) ist.

Jetzt kann man eine neue Darstellung für die Funktion $u(x)$ angeben:

$$u(x) = u(b) - \int_x^b v(t)\,dt\,. \tag{3}$$

Für $x \to a$ hat die rechte Seite der Formel (3) den Grenzwert

$$u(b) - \int_a^b v(t)\, dt\,.$$

Setzen wir

$$u(a) = u(b) - \int_a^b v(t)\, dt\,,$$

so wird $u(x)$ zu einer auf dem ganzen Segment $[a, b]$ absolut stetigen Funktion.

Satz 2.4.2. *Die Funktion $u(x)$ sei fast überall auf dem Intervall (a, b) definiert, quadratisch summierbar und besitze eine verallgemeinerte k-te Ableitung $u^{(k)}(x) = v(x)$, die ebenfalls quadratisch summierbar ist. Dann ist die Funktion $u(x)$ einer Funktion äquivalent, die auf $[a, b]$ $(k - 1)$-mal stetig differenzierbar ist und die fast überall auf diesem Segment eine gewöhnliche Ableitung k-ter Ordnung $u^{(k)}(x) = v(x)$ besitzt. Dabei ist die Ableitung $u^{(k-1)}(x)$ absolut stetig auf dem Segment $[a, b]$.*

Auf den Beweis wollen wir verzichten. Er verläuft analog zum Beweis des Satzes 2.4.1.

§ 5. Die SOBOLEWschen Räume und Einbettungssätze

Es sei Ω ein endliches Gebiet im Raum E_m. Wir betrachten die Menge der Funktionen, die in Ω summierbar sind und in diesem Gebiet sämtliche verallgemeinerten Ableitungen einer gegebenen Ordnung l besitzen, welche in einer gewissen Potenz p, $1 < p < \infty$, summierbar sind. Die genannte Menge ist offenbar linear. Man kann sie in einen BANACH-Raum verwandeln, indem man folgende Norm einführt:

$$||u|| = \int_\Omega |u(x)|\, dx + \left\{ \int_\Omega \sum \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_l}} \right|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{1}$$

Im zweiten Integral wird über alle Indextupel $i_1, i_2, \ldots, i_l$ summiert, in denen jeder Index unabhängig von den übrigen die Werte $1, 2, \ldots, m$ durchläuft. Der auf diese Weise gewonnene Raum heißt SOBOLEW*scher Raum*; er wird durch das Symbol $W_p^{(l)}(\Omega)$ gekennzeichnet.

Man muß die Norm nicht unbedingt nach Formel (1) einführen: Im Raum $W_p^{(l)}(\Omega)$ ist jede Norm zulässig, die der Norm (1) äquivalent ist.

In der modernen Analysis und besonders in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen spielen die sogenannten „Einbettungssätze" eine große Rolle. Sie wurden zuerst von S. L. SOBOLEW gewonnen und später vielfach verschärft und verallgemeinert. Das Wesen der Einbettungssätze besteht in folgendem: Wenn das Gebiet Ω die sogenannte „Konusbedingung" erfüllt (siehe unter § 3, Kap. 16) und wenn die Funktion $u \in W_p^{(l)}(\Omega)$ ist, so besitzt sie sämtliche verallgemeinerten Ableitungen aller niedrigeren Ordnungen. Die Ableitungen der Ordnung kleiner l sowie die Funktion selbst sind in Ω summierbar in einer gewissen Potenz, die größer p ist. Diese Potenz ist um so höher, je niedriger die Ordnung der Ableitung ist.

Aus dem soeben Gesagten folgt: Wenn $l_1 < l$ ist, so gehört bei einem gewissen $p_1 > p$ jedes Element des Raumes $W_p^{(l)}(\Omega)$ zum Raum $W_{p_1}^{(l_1)}(\Omega)$; der Raum $W_p^{(l)}(\Omega)$ ist in den Raum $W_{p_1}^{(l_1)}(\Omega)$ „eingebettet". Wir bezeichnen mit E den Operator, der jeder Funktion $u(x)$, Element des Raumes $W_p^{(l)}(\Omega)$, dieselbe Funktion, aber als Element des Raumes $W_{p_1}^{(l_1)}(\Omega)$ betrachtet, zuordnet. Der Operator E heißt *Einbettungsoperator* des Raumes $W_p^{(l)}(\Omega)$ in

den Raum $W_{p_1}^{(l_1)}(\Omega)$. Einer der wichtigsten Einbettungssätze besagt, daß der Einbettungsoperator E beschränkt und (möglicherweise bei kleinerem p_1) vollstetig ist. Zwei Folgerungen aus den Einbettungssätzen sind die unten angegebenen Ungleichungen von FRIEDRICHS (Kap. 14) und POINCARÉ (Kap. 16).

Die verallgemeinerten Ableitungen der Ordnung kleiner als l sind nicht nur in Ω, sondern auch auf in Ω gelegenen stückweise glatten Mannigfaltigkeiten gewisser niedrigerer Dimensionen summierbar in einer gewissen Potenz, die höher ist als die p-te. Je niedriger die Ordnung der Ableitung ist, um so kleiner kann man die Dimension der Mannigfaltigkeit wählen. Ableitungen hinreichend niedriger Ordnung können sich einfach als stetig erweisen. Es gelten auch die Sätze über die Beschränktheit und die Vollstetigkeit der entsprechenden Einbettungsoperatoren.

Die hier berührten Fragen sind ausführlich in [1] und [2] dargestellt.

Übungsaufgaben

1. Man beweise den Satz 2.3.1 für den Raum L_p, $1 < p < \infty$, wobei die starke durch die schwache Konvergenz zu ersetzen ist.

2. Es sei Ω ein Gebiet des m-dimensionalen euklidischen Raumes E_m, $u \in L_p(\Omega)$ und es existiere die verallgemeinerte Ableitung $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} \in L_p(\Omega)$.

Es sei l eine Gerade, die parallel ist zur x_1-Achse, und (a, b) das Intervall, längs dessen die Gerade l das Gebiet Ω schneidet. Man beweise, daß die Funktion u auf fast allen Intervallen (a, b) absolut stetig ist und fast überall eine gewöhnliche Ableitung $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ besitzt.

3. Ω sei ein Gebiet des m-dimensionalen Raumes, welches man in ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Seiten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ einschließen kann. Die Funktion $u(x)$ sei stetig im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$, gleich Null auf dem Rand des Gebietes Ω und besitze die verallgemeinerten ersten Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega), \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Man beweise die Ungleichung

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \leqq \frac{1}{\pi^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2}} \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx.$$

Hinweis. Man benutze die Entwicklung in eine FOURIER-Reihe.

Teil II

Elemente der Variationsrechnung

KAPITEL 3

GRUNDBEGRIFFE

§ 1. Beispiele zur Ermittlung des Extremums eines Funktionals

1. Die Entstehung der Variationsrechnung schreibt man gewöhnlich dem Jahre 1696 zu, als JOHANN BERNOULLI das sogenannte *Problem der Brachistochrone* stellte: Die Punkte $A(0, 0)$ und $B(a, b)$ sind in der vertikalen x, y-Ebene gelegen (Abb. 5). Wie muß die die Punkte A und B verbindende ebene Kurve beschaffen

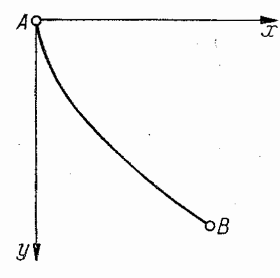


Abb. 5

sein, längs der ein reibungslos gleitender materieller Punkt in kürzester Zeit von A nach B gelangt? Die gesuchte Kurve nannte man *Brachistochrone.*

Es sei $y = u(x)$ die Gleichung der Kurve AB. Wir betrachten einen gewissen Zeitmoment t, in dem der sich bewegende Punkt den Abstand y von der x-Achse haben soll. Dann ist $v = \sqrt{2\,g\,y} = \sqrt{2\,g\,u}$, wobei v die Geschwindigkeit des sich bewegenden Punktes und g die Gravitationsbeschleunigung bedeutet. Gleichzeitig gilt

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + u'^2}\,\frac{dx}{dt}\,.$$

Daraus folgt

$$dt = \sqrt{\frac{1 + u'^2}{2\,g\,u}}\,dx\,.$$

Wir bezeichnen mit T die Zeit, die der materielle Punkt benötigt, um vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen. Durch Integration erhalten wir dann

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\,g}} \int\limits_0^a \sqrt{\frac{1 + u'^2}{u}}\,dx\,. \tag{1}$$

Das Problem wird damit auf das folgende zurückgeführt: Gesucht ist die Funktion $y = u(x)$, die die Bedingungen

$$u(0) = 0\,, \quad u(a) = b \tag{2}$$

erfüllt und die dem Integral (1) den kleinsten Wert erteilt. Die Bedingungen (2) bedeuten, daß die gesuchte Kurve durch die gegebenen Punkte A und B hindurchgehen muß. Derartige Bedingungen nennt man gewöhnlich *Randbedingungen*, da sie sich auf die Endpunkte des Intervalls, auf dem die gesuchte Funktion zu bestimmen ist, beziehen.

2. Wir betrachten noch eine Aufgabe, die dem Problem der Brachistochrone ähnlich ist. In einem optisch inhomogenen Medium breite sich Licht mit einer Geschwindigkeit $v(x, y, z)$ aus. Gesucht ist die Trajektorie des Lichtstrahls, der die Punkte $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ verbindet. Nach dem bekannten FERMATschen Prinzip hat die Trajektorie des Lichtstrahls die Eigenschaft, daß das sich längs dieser Trajektorie ausbreitende Licht in der kürzesten Zeit vom Punkt A in den Punkt B gelangt.

Die Gleichungen der gesuchten Trajektorie seien

$$y = u_1(x)\,, \quad z = u_2(x)\,.$$

Entsprechend dem FERMATschen Prinzip reduziert sich das Problem auf die Ermittlung zweier Funktionen $u_1(x)$ und $u_2(x)$, die die Randbedingungen

$$u_1(x_1) = y_1\,, \quad u_1(x_2) = y_2\,, \quad u_2(x_1) = z_1, \quad u_2(x_2) = z_2 \tag{3}$$

erfüllen und die dem Integral

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + u_1'^2(x) + u_2'^2(x)}}{v(x, u_1(x), u_2(x))}\, dx \tag{4}$$

den kleinsten Wert erteilen.

3. Das folgende Problem unterscheidet sich etwas von den ersten beiden. Wir formulieren es wie folgt: Unter allen ebenen Kurven, die durch eine explizite Gleichung der Gestalt $y = f(x)$ darstellbar sind, eine gegebene Länge l besitzen und in den Punkten $A(a, 0)$ und $B(b, 0)$ enden, ist diejenige Kurve aufzufinden, die zusammen mit dem Abschnitt $[a, b]$ der x-Achse ein Gebiet mit dem größtmöglichen Flächeninhalt begrenzt.

Die Gleichung der Kurve sei $y = u(x)$. Die Aufgabe besteht darin, eine Funktion $u(x)$ zu finden, die die Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{5}$$

sowie die Beziehung

$$\int_a^b \sqrt{1 + u'^2}\, dx = l \tag{6}$$

erfüllt und die dem Integral

$$S = \int_a^b u\, dx \tag{7}$$

den größten Wert erteilt.

Im Vergleich zu den ersten beiden Problemen ist hier neu, daß die gesuchte Funktion nicht nur den Randbedingungen (5), sondern außerdem der Beziehung (6), die offenbar nicht den Charakter einer Randbedingung trägt, genügen soll. Allen drei Aufgaben ist gemeinsam, daß wir jedes Mal eine Funktion (oder, wie bei der Aufgabe 2, ein System von Funktionen — man kann dieses als eine Vektorfunktion auffassen) suchen, die die einen oder anderen vorgegebenen Bedingungen erfüllt und die einem gegebenen Funktional einen extremalen (minimalen oder maximalen) Wert erteilt. So soll z. B. beim Problem der Brachistochrone die gesuchte Funktion die Randbedingungen (2) erfüllen und dem Funktional (1) einen minimalen Wert erteilen. Die im vorliegenden Paragraphen angegebenen drei Probleme gehören, wie auch viele andere Aufgaben derselben Art, zu einem Zweig der mathematischen Analysis, den man *Variationsrechnung* nennt. Die genaue Formulierung der Grundaufgaben der Variationrechnung wird im folgenden Paragraphen vorgenommen.

§ 2. Die Aufgabenstellung der Variationsrechnung

Wir erinnern an die Definition des Funktionals. Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Elementen beliebiger Natur, und jedem Element $u \in \mathfrak{M}$ sei eine und nur eine Zahl $F(u)$ zugeordnet. In diesem Fall sagt man, auf der Menge $\mathfrak{M}$ ist das *Funktional* F definiert. Die Menge $\mathfrak{M}$ heißt *Definitionsgebiet* des Funktionals F und wird mit $D(F)$ bezeichnet; die Zahl $F(u)$ heißt *Wert* des Funktionals F auf dem Element u. Das Funktional F heißt reell, wenn alle seine Werte reell sind. Das Funktional F heißt linear, wenn sein Definitionsgebiet eine lineare Menge ist und wenn gilt[1])

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v) .$$

Die Aufgabe der Variationsrechnung besteht in folgendem: Gegeben ist ein Funktional F mit dem Definitionsgebiet $D(F)$; gesucht wird ein Element $u_0 \in D(F)$, das dem Funktional entweder den minimalen Wert

$$F(u_0) = \min_{u \in D(F)} F(u) \tag{1}$$

oder den maximalen Wert

$$F(u_0) = \max_{u \in D(F)} F(u) \tag{2}$$

erteilt.

Die Aufgabe zur Ermittlung des Maximums des Funktionals F ist identisch mit der Aufgabe zur Ermittlung des Minimums des Funktionals $-F$. Deshalb betrachten wir im weiteren nur das Minimumproblem.

In der soeben angegebenen allgemeinen Formulierung läßt sich die Aufgabe der Variationsrechnung schwerlich lösen. Wir wollen deshalb versuchen, dem Funktional F einige, nach Möglichkeit einfache und natürliche Beschränkungen aufzuerlegen.

---

[1]) Wir setzen voraus, daß dem Leser die grundlegenden Eigenschaften linearer Funktionale aus einer Vorlesung über Funktionalanalysis bekannt sind.

Wir nehmen an, daß $D(F)$ eine Teilmenge eines gewissen BANACH-Raumes X ist. Um die weiteren Voraussetzungen formulieren zu können, führen wir den Begriff der linearen Mannigfaltigkeit ein. Es sei M eine lineare Menge von Elementen des Raumes X und $\bar{u}$ ein gewisses festes Element dieses Raumes. *Lineare Mannigfaltigkeit* im Raum X nennen wir die Gesamtheit aller in der Form

$$u = \bar{u} + \eta\,, \qquad \eta \in M\,, \tag{3}$$

darstellbaren Elemente. Wenn $\bar{u} \in M$ (z. B. $\bar{u} = 0$) ist, so fällt offensichtlich die so definierte lineare Mannigfaltigkeit mit M zusammen.

Bedingung 1. *Das Definitionsgebiet $D(F)$ des Funktionals F ist eine in X dichte lineare Mannigfaltigkeit.*[8])

Die lineare Menge M ist dann ebenfalls dicht in X. In der Tat, es sei u ein beliebiges Element des Raumes X und M' eine in X dichte Mannigfaltigkeit von Elementen der Gestalt $\bar{u} + \eta$, wobei η die lineare Menge M durchläuft. Es ist $u + \bar{u} \in X$, und folglich läßt sich ein Element $\eta \in M$ finden derart, daß $\|(u + \bar{u}) - (\bar{u} + \eta)\| < \varepsilon$ gilt, wobei ε eine beliebige positive Zahl ist. Dann ist aber $\|u - \eta\| < \varepsilon$, d. h., ein beliebiges Element $u \in X$ kann durch Elemente der Menge M beliebig genau approximiert werden. Das bedeutet gerade, daß die Menge M dicht in X ist. Genauso beweist man auch die umgekehrte Behauptung: Wenn η ein beliebiges Element einer in X dichten linearen Menge und $\bar{u}$ festes Element des Raumes X ist, so ist die lineare Mannigfaltigkeit von Elementen der Gestalt $\bar{u} + \eta$ dicht in X.

Beispiel. Wir betrachten die Aufgabe über den Lichtstrahl. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Trajektorie in der (x, y)-Ebene liegt und die Geschwindigkeit v nicht von z abhängt. Dann kann man die Gleichung der Trajektorie in der Form $y = u(x)$ schreiben, wobei $u(x)$ den Randbedingungen

$$u(x_1) = y_1\,, \qquad u(x_2) = y_2 \tag{4}$$

genügt. Die Aufgabe besteht jetzt darin, die Funktion $u(x)$ zu ermitteln, die die Bedingungen (4) erfüllt und das Funktional

$$T = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + u'^2(x)}}{v\big(x, u(x)\big)}\, dx \tag{5}$$

zum Minimum macht.

Es erscheint natürlich, die Lichtgeschwindigkeit als streng positiv anzunehmen:

$$v\,(x, y) \geqq v_0 = \text{const} > 0\,.$$

Als X kann man z. B. den Raum $L_2(x_1, x_2)$ der auf dem Intervall (x_1, x_2) quadratisch summierbaren Funktionen wählen. Das Funktional (5) definiert man naturgemäß auf der Menge $D(T)$ aller Funktionen, die auf dem Segment $[x_1, x_2]$ stetig und stetig differenzierbar sind und die die Bedingungen (4) erfüllen. Wir beweisen, daß diese Menge eine lineare Mannigfaltigkeit ist.

---

[8]) Es ließe sich auch der allgemeinere Fall behandeln, wo $D(F)$ den Durchschnitt einer dichten linearen Mannigfaltigkeit mit einer gewissen Kugel oder einer anderen offenen Menge darstellt.

Wir bezeichnen

$$\bar{u}(x) = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$$

und setzen $u(x) = \bar{u}(x) + \eta(x)$. Wenn $u \in D(T)$ ist, so ist $\eta(x)$ eine stetige und stetig differenzierbare Funktion, die die Randbedingungen

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{6}$$

erfüllt.

Offenbar ist die Menge M der Funktionen $\eta(x)$, die die soeben aufgezählten Bedingungen erfüllen, linear. Diese Menge enthält als Teilmenge die Menge der auf dem Segment $[x_1, x_2]$ finiten Funktionen. Auf Grund der Folgerung 1.3.1 ist die Menge M dicht in $L_2(x_1, x_2)$.

An die zu untersuchenden Funktionale stellen wir eine weitere sehr wichtige Forderung. Wir nehmen an, daß der Raum X unendlichdimensional ist (andernfalls wäre das Variationsproblem einfach eine Minimumaufgabe einer Funktion von endlich vielen unabhängigen Veränderlichen). Dann ist die in X dichte lineare Menge M ebenfalls unendlichdimensional, und in ihr kann man folglich endlichdimensionale Teilräume von beliebiger Dimension auszeichnen.

Bedingung 2. *Wenn η einen beliebigen in M enthaltenen endlichdimensionalen Teilraum durchläuft, dann ist das Funktional $F(u) = F(\bar{u} + \eta)$ auf diesem Teilraum hinreichend oft stetig differenzierbar.*

Wir wollen diese Bedingung erläutern. Es durchlaufe η irgendeinen n-dimensionalen Teilraum M_n. In ihm wählen wir eine Basis $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Wenn dann $\eta \in M_n$ ist, so hat η notwendigerweise die Gestalt

$$\eta = a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \cdots + a_n \eta_n,$$

und folglich gilt

$$F(u) = F(\bar{u} + a_1 \eta_1 + \cdots + a_n \eta_n).$$

Hierbei ist $\bar{u}$ fest, die Elemente $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sind ebenfalls fest. Somit ist F eine Funktion der Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Infolge der Bedingung 2 ist diese Funktion hinreichend oft differenzierbar nach $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Wir führen jetzt die Begriffe des absoluten und des relativen Minimums eines Funktionals ein. Das Funktional F nimmt auf dem Element $u_0 \in D(F)$ das *absolute Minimum* an, wenn die Ungleichung

$$F(u_0) \leqq F(u) \tag{7}$$

für ein beliebiges Element $u \in D(F)$ gilt. Dasselbe Funktional nimmt auf dem Element u_0 ein *relatives Minimum* an, wenn die Ungleichung (7) für alle hinreichend nahe bei u_0 gelegenen Elemente $u \in D(F)$ gilt.

Der Begriff des relativen Minimums hängt wesentlich davon ab, welche Elemente man als „nahe bei u_0" ansieht, d. h. also davon, in welchen Raum die Menge $D(F)$ eingebettet wird.

§ 3. Die Variation und der Gradient eines Funktionals

1. Wir betrachten ein Funktional F, das die Bedingungen 1 und 2 aus § 2 erfüllt. Wir wählen ein beliebiges Element $u \in D(F)$ und ein beliebiges Element $\eta \in M$. Mit α bezeichnen wir eine beliebige reelle Zahl. Wie man leicht einsieht, ist

$$u + \alpha \eta \in D(F).$$

In der Tat, es sei $u = \bar{u} + \eta_0$, $\eta_0 \in M$. Dann gilt

$$u + \alpha\,\eta = \bar{u} + (\eta_0 + \alpha\,\eta)\,. \tag{1}$$

Jeder der Summanden in der Klammer gehört der linearen Menge M an, deshalb ist auch ihre Summe $\eta_0 + \alpha\,\eta$ Element von M. Dann ist aber offenbar $u + \alpha\,\eta \in D(F)$.

Wir bilden den Ausdruck $F(u + \alpha\,\eta)$. Das Element $\eta_0 + \alpha\,\eta$ gehört dem zweidimensionalen Teilraum an, der durch die Elemente η_0 und η aufgespannt wird. Infolge der Bedingung 2 ist $F(u + \alpha\,\eta)$ eine stetig differenzierbare Funktion von α. Wir berechnen ihre Ableitung und bestimmen den Wert dieser Ableitung für $\alpha = 0$:

$$\left.\frac{dF(u + \alpha\,\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}. \tag{2}$$

Als Ergebnis erhalten wir eine Zahl, die man als den Wert des von den zwei Elementen u und η abhängigen Funktionals (2) auffassen kann.

Definition. Das Funktional

$$\left.\frac{dF(u + \alpha\,\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

heißt *Variation* (oder *erste Variation*) des Funktionals F im Punkt u und wird durch das Symbol $\delta F(u, \eta)$ gekennzeichnet:

$$\delta F(u, \eta) = \left.\frac{dF(u + \alpha\,\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}. \tag{3}$$

Wir sehen das Element u als fest an. Dann ist die Variation $\delta F(u, \eta)$ ein Funktional in η.

Wir beweisen, daß dieses Funktional linear ist, wenn die Bedingungen 1 und 2 aus § 2 erfüllt sind; letzteres bedeutet: Für beliebige Elemente η_1, η_2 aus der Menge M und beliebige Zahlen a_1, a_2 gilt die Beziehung

$$\delta F(u, a_1\,\eta_1 + a_2\,\eta_2) = a_1\,\delta F(u, \eta_1) + a_2\,\delta F(u, \eta_2)\,.$$

Zunächst ergibt sich

$$\delta F(u, a_1\,\eta_1 + a_2\,\eta_2) = \frac{d}{d\alpha} F\left(u + \alpha\,(a_1\,\eta_1 + a_2\,\eta_2)\right)\Big|_{\alpha=0}.$$

Für beliebige Zahlen β_1, β_2 ist $\beta_1\,\eta_1 + \beta_2\,\eta_2$ ein Element des durch die Elemente η_1 und η_2 aufgespannten zweidimensionalen Teilraumes. Auf Grund der Bedingung 2 aus § 2 ist $F(u + \beta_1\,\eta_1 + \beta_2\,\eta_2)$ als Funktion der Veränderlichen β_1 und β_2 wenigstens einmal stetig differenzierbar. Wir setzen $\beta_1 = \alpha\,a_1$, $\beta_2 = \alpha\,a_2$, wobei α eine unabhängige Veränderliche und a_1, a_2 beliebige feste Zahlen bedeuten. Nach der Kettenregel für mittelbare Funktionen erhalten wir

$$\delta F(u, a_1\eta_1 + a_2\,\eta_2) = a_1\frac{\partial}{\partial\beta_1} F(u + \beta_1\,\eta_1 + \beta_2\,\eta_2)\Big|_{\beta_1=\beta_2=0} +$$
$$+ a_2\frac{\partial}{\partial\beta_2} F(u + \beta_1\,\eta_1 + \beta_2\,\eta_2)\Big|_{\beta_1=\beta_2=0} = a_1\,\delta F(u, \eta_1) + a_2\,\delta F(u, \eta_2)\,,$$

was zu beweisen war.

Bei beliebig gewähltem $u \in D(F)$ ist das Funktional $\delta F(u, \eta)$ im allgemeinen nicht beschränkt. Wir zeichnen die Menge N derjenigen Elemente $u \in D(F)$ aus, für die die Variation ein beschränktes Funktional in η ist.

Wenn $u \in N$ ist, dann existiert ein beschränktes Funktional g, für das gilt

$$\delta F(u, \eta) = (g, \eta), \tag{4}$$

wobei (g, η) den Wert des Funktionals g auf dem Element η bezeichnet.

Die Zuordnung $u \to g$ definiert auf N einen Opertaor P derart, daß gilt

$$P u = g, \quad D(P) = N \tag{5}$$

und folglich

$$\delta F(u, \eta) = (P u, \eta), \quad u \in N, \quad \eta \in M. \tag{6}$$

Das lineare und in X beschränkte Funktional g ist ein Element des zu X konjugierten Raumes X^*. Deshalb bildet der durch die Formel (5) [oder, was dasselbe ist, durch (6)] definierte Operator P den BANACH-Raum X in den konjugierten Raum X^* ab.

Definition. Der durch die Formel (6) definierte Operator P heißt *Gradient* des Funktionals $F(u)$ und wird mit

$$P = \operatorname{grad} F \tag{7}$$

bezeichnet.

Wenn $u \in D(P)$ ist, dann läßt sich die Variation des Funktionals $F(u)$ in folgender Form schreiben:

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha} F(u + \alpha \eta)\Big|_{\alpha=0} = (\operatorname{grad} F, \eta). \tag{8}$$

Im allgemeinen ist das Definitionsgebiet $D(P)$ das Gradienten enger als das Definitionsgebiet $D(F)$ des Funktionals F.

Wie man leicht einsieht, hängen das Definitionsgebiet des Gradienten eines Funktionals sowie der Ausdruck für den Gradienten wesentlich davon ab, in welchen Raum das Definitionsgebiet des Funktionals eingebettet wird.

2. Wir betrachten jetzt das folgende, für die weiteren Betrachtungen wichtige Beispiel:

Die Funktion $\Phi(x, y, z)$ sei definiert und stetig für

$$x \in [a, b], \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Wir setzen voraus, daß die Funktion $\Phi(x, y, z)$ die partiellen Ableitungen Φ_y und Φ_z besitzt, die in demselben Bereich der Veränderlichen x, y, z stetig sein sollen. Wir betrachten das Funktional

$$F(u) = \int_a^b \Phi\big(x, u(x), u'(x)\big)\, dx, \tag{9}$$

dessen Definitionsgebiet $D(F)$ aus den Funktionen besteht, die folgende Bedingungen erfüllen: $u \in C^{(1)}[a, b]$ und

$$u(a) = A, \quad u(b) = B, \tag{10}$$

wobei A und B vorgegebene Konstanten sind. Die Bedingungen (10) bedeuten,

daß die Kurven $y = u(x)$ $\bigl(u \in D(F)\bigr)$ durch die beiden festen Punkte (a, A) und (b, B) hindurchgehen.

Wir wollen beweisen, daß das Funktional (9), (10) den Bedingungen 1 und 2 aus § 2 genügt. Als X nehmen wir den Raum $L_2(a, b)$. Offenbar liegt $D(F)$ in diesem Raum.

Zunächst überzeugen wir uns davon, daß $D(F)$ eine lineare Mannigfaltigkeit ist. Wir setzen

$$\bar{u}(x) = A + \frac{x - a}{b - a}(B - A)\,. \tag{11}$$

Offensichtlich ist $\bar{u} \in C^{(1)}[a, b]$, und $\bar{u}$ erfüllt die Bedingungen (10). Es sei $u \in D(F)$. Wir betrachten die Differenz $\eta(x) = u(x) - \bar{u}(x)$. Offenbar gilt: $\eta \in C^{(1)}[a, b]$ und

$$\eta(a) = \eta(b) = 0\,. \tag{12}$$

Es ist evident, daß die Menge M der Funktionen η linear ist. Sie enthält die Menge der auf dem Segment $[a, b]$ finiten Funktionen. Nach der Folgerung 1.3.1 ist die Menge M dicht in $L_2(a, b)$, und somit ist auch die lineare Mannigfaltigkeit $D(F)$ dicht in $L_2(a, b)$. Die Bedingung 1 ist erfüllt.

Wir wenden uns jetzt der Bedingung 2 zu. Es gilt

$$F(\bar{u} + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_n\eta_n) =$$
$$= \int_a^b \Phi\Bigl(x, \bar{u}(x) + \sum_{k=1}^n a_k\eta_k(x), \bar{u}'(x) + \sum_{k=1}^n a_k\eta_k'(x)\Bigr)\,dx\,. \tag{13}$$

Die Funktion (13) ist nach den Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ stetig differenzierbar. In der Tat, es ergibt sich aus den Voraussetzungen bezüglich der Funktion Φ, daß in (13) der Integrand und seine ersten Ableitungen nach $a_1, a_2, \ldots, a_n$ stetig von $x, a_1, \ldots, a_n$ abhängen. Aus dem Satz über die Differentiation eines Parameterintegrals folgt, daß die Funktion (13) stetige partielle Ableitungen nach den Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ besitzt, die man durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhält.

Die Bedingungen 1 und 2 sind erfüllt, und man kann die Variation des Funktionals (9) bilden:

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha}F(u + \alpha\eta)\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b \Phi(x, u + \alpha\eta, u' + \alpha\eta')\,dx\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_a^b [\Phi_u(x, u, u')\,\eta + \Phi_{u'}(x, u, u')\,\eta']\,dx\,. \tag{14}$$

Wir wollen klären, wie die Funktion $u \in D(F)$ beschaffen sein muß, damit die Variation $\delta F(u, \eta)$ ein beschränktes Funktional von η ist.

Der Raum $L_2(a, b)$ ist ein HILBERT-Raum. Nach dem bekannten Satz von RIESZ hat jedes lineare beschränkte Funktional in diesem Raum die Gestalt

$$(\eta, g) = \int_a^b g(x)\, \eta(x)\, dx\,, \tag{15}$$

wobei $g(x)$ eine eindeutig bestimmte Funktion aus $L_2(a, b)$ ist.

Das Integral (14) läßt sich in eine Summe zweier Integrale aufspalten. Im ersten Integral ist der Faktor Φ_u stetig und somit quadratisch summierbar auf dem Intervall (a, b); das erste Integral in (14) ist also ein beschränktes Funktional von η. Bezüglich des zweiten Integrals

$$\int_a^b \Phi_{u'}\, \eta'\, dx \tag{16}$$

kann man das im allgemeinen nicht behaupten, wenn die Funktion $u(x)$ beliebig ist.

Es sei $u(x)$ eine Funktion derart, daß $\Phi_{u'}\bigl(x, u(x), u'(x)\bigr)$ eine absolut stetige Funktion von x und ihre Ableitung quadratisch summierbar auf (a, b) ist. Wir beweisen, daß dann das Integral (16) ein beschränktes Funktional von η ist; dabei benutzen wir, daß $\eta(x)$ stetig differenzierbar ist und die Randbedingungen (12) erfüllt.

Wenn die Funktion $\Phi_{u'}\bigl(x, u(x), u'(x)\bigr)$ absolut stetig ist, so existieren eine Konstante c und eine Funktion $\omega \in L_2(a, b)$, so daß gilt

$$\Phi_{u'}\bigl(x, u(x), u'(x)\bigr) = c + \int_a^x \omega(t)\, dt\,. \tag{17}$$

Dabei ist fast überall auf (a, b)

$$\omega(x) = \frac{d}{dx}\, \Phi_{u'}\bigl(x, u(x), u'(x)\bigr)\,.$$

Folglich kann man das Integral

$$\int_a^b \Phi_{u'}\, \eta'\, dx$$

partiell integrieren:

$$\int_a^b \Phi_{u'}\, \eta'\, dx = -\int_a^b \eta \frac{d}{dx}\, \Phi_{u'}\, dx + \eta\, \Phi_{u'}\Big|_a^b = -\int_a^b \eta \frac{d}{dx}\, \Phi_{u'}\, dx\,.$$

Wegen $\frac{d}{dx}\, \Phi_{u'} = \omega \in L_2(a, b)$ ist das letzte Integral auf Grund des Satzes von RIESZ ein beschränktes Funktional von η. Dann ist aber auch die Variation $\delta F(u, \eta)$, der man jetzt die Form

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b \left[\Phi_u - \frac{d}{dx}\, \Phi_{u'}\right] \eta\, dx \tag{18}$$

geben kann, ein beschränktes Funktional von η. Aus der Relation (18) ergibt sich die folgende Formel für grad F:

$$\operatorname{grad} F = \Phi_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} \Phi_{u'}(x, u, u') . \tag{19}$$

In der Tat, aus den Formeln (8) und (18) folgt:

$$\left(\operatorname{grad} F - \left[\Phi_u - \frac{d}{dx} \Phi_{u'} \right], \eta\right) = 0 .$$

Die Differenz

$$\operatorname{grad} F - \left[\Phi_u - \frac{d}{dx} \Phi_{u'} \right]$$

erweist sich als orthogonal zu der in $L_2(a, b)$ dichten Menge der Funktionen η. Dann gilt aber

$$\operatorname{grad} F - \left[\Phi_u - \frac{d}{dx} \Phi_{u'} \right] = 0 ,$$

was mit der Formel (19) gleichbedeutend ist.

Der Gradient der Funktion F ist also für die Funktion $u \in D(F)$ erklärt, wenn $\Phi_{u'}$ eine absolut stetige Funktion darstellt, deren Ableitung quadratisch summierbar ist.

Wir beweisen, daß auch die umgekehrte Behauptung gilt:

Wenn die Funktion $u(x) \in D(F)$ gleichzeitig zur Menge $D\,(\operatorname{grad} F)$ gehört, dann ist die Funktion $\Phi_{u'}(x, u, u')$ auf dem Segment $[a, b]$ absolut stetig, die Ableitung $\frac{d}{dx} \Phi(x, u, u')$ ist quadratisch summierbar auf dem Intervall (a, b), und es gilt

$$(\operatorname{grad} F)\,(u) = \Phi_u - \frac{d}{dx} \Phi_{u'} .$$

Wenn $u \in D(F)$ ist, so ist die Variation $\delta F(u, \eta)$ ein beschränktes Funktional von η. In diesem Fall ist dann auch das Integral (16) ein beschränktes Funktional von η. Nach dem Satz von RIESZ existiert eine Funktion $g \in L_2(a, b)$, mit der gilt

$$\int_a^b \Phi_{u'}\, \eta'(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, \eta(x)\, dx . \tag{20}$$

Wir bilden die Funktion

$$G(x) = -\int_a^x g(t)\, dt$$

und integrieren partiell die rechte Seite der Formel (20). Da die Funktion $\eta(x)$ den Bedingungen (12) genügt, so ist

$$\int_a^b g(x)\, \eta(x)\, dx = \int_a^b G(x)\, \eta'(x)\, dx . \tag{21}$$

Die Formeln (20) und (21) ergeben zusammen

$$\int_a^b [\Phi_{u'} - G]\, \eta'\, dx = 0 . \tag{22}$$

Die Relation (22) gilt für eine beliebige Funktion $\eta(x)$, die auf dem Segment $[a, b]$ stetig differenzierbar ist und in den Endpunkten dieses Segments gleich Null ist. Dies berücksichtigend, setzen wir in der Beziehung (22)

$$\eta(x) = \sin \frac{k\pi(x-a)}{b-a}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Dann erhalten wir

$$\int_a^b [\Phi_{u'} - G] \cos \frac{k\pi(x-a)}{b-a} = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{23}$$

Wie zur Genüge bekannt ist, ist das Funktionensystem

$$\cos k\pi \frac{x-a}{b-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

vollständig in $L_2(a, b)$. Die Funktion $\Phi_{u'} - G$ ist orthogonal zu allen Funktionen dieses Systems, mit Ausnahme der Funktion, die identisch gleich Eins ist. Dann unterscheidet sich aber die Funktion $\Phi_{u'} - G$ von der Eins höchstens durch einen konstanten Faktor:

$$\Phi_{u'} - G = c = \text{const}\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$\Phi_{u'} = c - \int_a^x g(t)\, dt\,,$$

und die Funktion $\Phi_{u'}$ ist folglich absolut stetig. Weiterhin gilt $\frac{d}{dx} \Phi_{u'} = -g(x)$ $\in L_2(a, b)$, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Die hier gewonnenen Resultate gestatten, den folgenden Satz zu formulieren:

Satz 3.3.1. *Das Funktional* (9) *sei für alle stetig differenzierbaren Funktionen erklärt, die die Randbedingungen* (10) *erfüllen, und das Definitionsgebiet dieses Funktionals werde als Teilmenge des Raumes* $L_2(a, b)$ *betrachtet. Dann besteht das Definitionsgebiet des Gradienten des Funktionals* (9) *aus den und nur den Funktionen* u, *die folgende Eigenschaft besitzen: Sie sind stetig differenzierbar auf dem Segment* $[a, b]$, *genügen den Bedingungen* (10), *und der Ausdruck* $\Phi_{u'}(x, u, u')$ *ist eine auf dem Segment* $[a, b]$ *absolut stetige Funktion, deren Ableitung auf diesem Segment quadratisch summierbar ist.*

Weiter oben wurde darauf hingewiesen, daß das Definitionsgebiet des Gradienten (genauso wie der Ausdruck für den Gradienten) wesentlich von dem Raum, in den das Definitionsgebiet des Funktionals eingebettet ist, abhängt. Wir erklären dies am Beispiel des Funktionals (9), (10).

Wir betrachten einen Hilbert-Raum, den wir mit $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ bezeichnen und wie folgt definieren: Die Elemente dieses Raumes sind absolut stetige Funktionen auf dem Segment $[a, b]$, die in den Punkten a und b verschwinden und die auf diesem Segment quadratisch summierbare erste Ableitungen besitzen.

Das Skalarprodukt $(u, v)_0$ sowie die Norm $\|u\|_0$ im Raum $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ definieren wir mit Hilfe der Formeln

$$(u, v)_0 = \int_a^b \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx\,, \quad \|u\|_0^2 = \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\,. \tag{24}$$

Wir betrachten das Variationsproblem für das Funktional (9), (10) unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß in den Bedingungen (10) zusätzlich $A = B = 0$ ist; den allgemeinen Fall führt man auf diesen Spezialfall leicht mit Hilfe der Substitution

$$u(x) = v(x) + A + \frac{x-a}{b-a}(B - A)$$

zurück.

Das Definitionsgebiet des Funktionals (9) betten wir in den Raum $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ ein; man überzeugt sich leicht, daß dabei die Bedingungen 1 und 2 aus § 2 erfüllt sind und daß nach wie vor die Formel (14) gilt.

Wir beweisen jetzt, daß für beliebiges $u \in D(F)$ das Funktional (14) im Raum $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$ beschränkt ist; daraus folgt dann, daß in diesem Raum $D(P) = D(F)$ ist.

Nach der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung gilt

$$|\delta F(u, \eta)| \leqq \left(\int_a^b \Phi_u^2\,dx \int_a^b \eta^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b \Phi_{u'}^2\,dx \int_a^b \eta'^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Die Funktionen Φ_u und $\Phi_{u'}$ sind stetig und somit beschränkt auf dem Segment $[a, b]$; es ergibt sich also

$$|\delta F(u, \eta)| \leqq C_0\left(\int_a^b \eta^2\,dx\right)^{1/2} + C_1\left(\int_a^b \eta'^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{25}$$

wobei C_0 und C_1 gewisse Konstanten sind. Weiterhin gilt

$$\eta(x) = \eta(a) + \int_a^x \eta'(t)\,dt = \int_a^x \eta'(t)\,dt\,.$$

Durch nochmalige Anwendung der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung erhalten wir

$$\eta^2(x) \leqq (x - a)\int_a^x \eta'^2(t)\,dt \leqq (b - a)\int_a^x \eta'^2(x)\,dx$$

und folglich

$$\int_a^b \eta^2(x)\,dx \leqq (b - a)^2 \int_a^b \eta'^2(x)\,dx\,.$$

Setzt man dies in die Ungleichung (25) ein, so ergibt sich

$$|\delta F(u, \eta)| \leqq C\left(\int_a^b \eta'^2(x)\,dx\right)^{1/2} = C\,\|\eta\|_0\,, \quad C = C_0\,(b - a) + C_1\,,$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

Wir suchen jetzt den Ausdruck für grad F im Raum $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$. Wir setzen

$$g(x) = \int_a^x \Phi_u(t, u(t), u'(t))\, dt + C\,,$$

wobei C eine zunächst noch unbestimmte Konstante bedeutet. Durch partielle Integration erhalten wir aus der Formel (14)

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b (\Phi_{u'} - g(x))\, \eta'(x)\, dx\,.$$

Jetzt setzen wir

$$G(x) = \int_a^b [\Phi_{u'}(t, u(t), u'(t)) - g(t)]\, dt$$

und wählen die Konstante C derart, daß $G(b) = 0$ ist. Dann ist $G \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$. Gleichzeitig gilt

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b G'(x)\, \eta'(x)\, dx = (G, \eta)_0\,.$$

Daraus folgt nun, daß im Raum $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(a, b)$

$$\operatorname{grad} F = G(x) = \int_a^x [\Phi_{u'}(t, u(t), u'(t)) - \int_a^t \Phi_u(\tau, u(\tau), u'(\tau))\, d\tau - C]\, dt \quad (26)$$

ist.

§ 4. Die EULERsche Gleichung

Wir betrachten ein Funktional F, das die Bedingungen 1 und 2 aus § 2 erfüllt. Dieses Funktional sei auf der linearen Mannigfaltigkeit $D(F)$ definiert, deren Elemente die Gestalt $u = \bar{u} + \eta$ haben, wobei $\bar{u}$ ein festes Element des gegebenen Raumes X ist und η die in X dichte lineare Menge M durchläuft.

Das Funktional F nehme im Punkt u_0 ein relatives Minimum an. Wir wählen ein beliebiges Element $\eta \in M$ und eine beliebige reelle Zahl α. Wenn α dem Betrag nach hinreichend klein ist, so ist die Norm der Differenz

$$\|(u_0 + \alpha\,\eta) - u_0\| = |\alpha|\, \|\eta\|$$

beliebig klein, und dann gilt auf Grund der Definition des relativen Minimums

$$F(u_0 + \alpha\,\eta) \geqq F(u_0)\,. \quad (1)$$

Diese Ungleichung bedeutet, daß die Funktion $F(u_0 + \alpha\,\eta)$ der reellen Veränderlichen α ein relatives Minimum bei $\alpha = 0$ besitzt. Dann gilt aber notwendigerweise

$$\frac{d}{d\alpha} F(u_0 + \alpha\,\eta)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$\delta F(u_0, \eta) = 0\,. \quad (2)$$

Wir haben damit eine notwendige Bedingung für das Minimum erhalten: *Wenn das Funktional in einem gewissen Punkt ein Minimum annimmt, dann ist in diesem Punkt die Variation des Funktionals gleich Null.*

Das identisch verschwindende lineare Funktional ist offenbar beschränkt. Folglich gilt: $u_0 \in D\,(\text{grad } F)$. Wir setzen

$$\text{grad } F = P\,u\,. \tag{3}$$

Dann gilt

$$\delta F(u_0, \eta) = (P\,u_0, \eta) = 0\,. \tag{4}$$

Der Ausdruck $(P\,u_0, \eta)$ ist ein Funktional in η, das auf der Menge M definiert ist. Demnach ist das Funktional $P\,u_0$ auf einer dichten Menge definiert, und auf dieser Menge sind alle seine Werte gleich Null. Folglich kann dieses Funktional stetig auf den ganzen Raum X fortgesetzt werden, so daß auch auf dem gesamten Raum seine Werte gleich Null sind. Das bedeutet aber, daß

$$P\,u_0 = 0$$

ist.

Wir haben somit folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.4.1. *Wenn ein Funktional F, das den Bedingungen* 1 *und* 2 *genügt, in einem Punkt u_0 ein relatives Extremum besitzt, dann gilt: $u_0 \in D$* (grad F), *und in diesem Punkt ist die Gleichung*

$$(\text{grad } F)\,(u_0) = 0\,. \tag{5}$$

erfüllt.

Die Gleichung (5) heißt EULER*sche Gleichung.*

Als Beispiel betrachten wir das sogenannte *einfachste Variationsproblem.* Es handelt sich dabei um das Minimumproblem für das Funktional

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x, u, u')\,dx\,, \tag{6}$$

dessen Definitionsgebiet aus allen Funktionen besteht, die auf dem Segment $[a, b]$ stetig differenzierbar sind und die Randbedingungen

$$u(a) = A\,, \qquad u(b) = B \tag{7}$$

erfüllen. Dieses Funktional wurde im § 3 beschrieben. Wir setzen hier voraus, daß die Funktion $\Phi(x, u, u')$ alle ihr im § 3 auferlegten Bedingungen erfüllt und das Definitionsgebiet $D(F)$ in den Raum $L_2(a, b)$ eingebettet ist. Wenn die Funktion $u(x)$ ein (relatives oder absolutes) Minimum realisiert, dann genügt sie auf Grund des EULERschen Satzes 3.4.1 und der Formel (3.19) der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\,\Phi_{u'}(x, u, u') - \Phi_u = 0\,. \tag{8}$$

Als Element der Menge $D(F)$ erfüllt sie auch die Bedingungen (7). Ausführlicher behandeln wir das einfachste Variationsproblem in Kap. 4.

Als Beispiel betrachten wir das Problem der Brachistochrone. In diesem Fall ist

$$\Phi(x, u, u') = \sqrt{\frac{1 + u'^2}{u}}\,.$$

Unmittelbar können wir uns hier nicht auf Gleichung (8) berufen, da die Funktion Φ bei $u = 0$ unstetig ist und folglich nicht die Bedingungen aus § 3 erfüllt. Wir beweisen aber, daß Gleichung (8) anwendbar ist.

Das Problem der Brachistochrone besitze eine Lösung $u_0(x)$. Aus physikalischen Überlegungen ergibt sich $u_0(x) > 0$ für $x > 0$; andernfalls würde sich der gleitende materielle Punkt auf einigen Wegstücken nach oben bewegen, wofür zusätzlich Zeit aufgewandt werden müßte.

Auf dem Intervall $(0, a)$ wählen wir einen beliebigen Punkt a'. Wir konstruieren eine Funktion $\eta(x)$, die die folgenden Eigenschaften besitzt: a) $\eta \in C^{(1)}[0, a]$; b) $\eta(x) \equiv 0$, $0 \leqq x \leqq a'$; c) $\eta(a) = 0$; ansonsten ist die Funktion η beliebig. Wir setzen

$$F(u) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + u'^2}{u}}\, dx,$$

und es sei $u(x) = u_0(x) + \alpha\, \eta(x)$ (Abb. 6). Wenn die Zahl α hinreichend klein

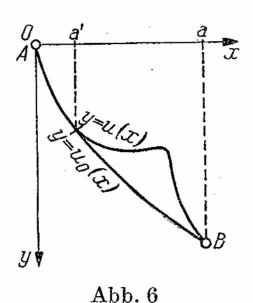


Abb. 6

ist, dann gilt $u(x) > 0$, $x > 0$; außerdem ist $u(0) = 0$, $u(a) = b$. Folglich gilt $F(u) = F(u_0 + \alpha\, \eta) \geqq F(u_0)$, und die Funktion der Veränderlichen α

$$F(u_0 + \alpha\, \eta) = \int_0^{a'} \sqrt{\frac{1 + u_0'^2}{u_0}}\, dx + \int_{a'}^{a} \sqrt{\frac{1 + (u_0' + \alpha\, \eta')^2}{u_0 + \alpha\, \eta}}\, dx \tag{9}$$

besitzt ein Minimum für $\alpha = 0$. Der Integrand des zweiten Integrals in (9) hängt stetig von x und α ab, so daß man unter dem Integralzeichen differenzieren kann:

$$\frac{d}{d\alpha} F(u_0 + \alpha\, \eta)\Big|_{\alpha=0} = \int_{a'}^{a} \left[\frac{\partial}{\partial u'} \sqrt{\frac{1 + u'^2}{u}}\, \eta' + \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{\frac{1 + u'^2}{u}}\, \eta\right]_{u=u_0} dx = 0\,. \tag{10}$$

Um die Überlegungen zu vereinfachen, nehmen wir an (in Wirklichkeit läßt sich das unschwer beweisen), daß auf dem Segment $[a', a]$ eine quadratisch

summierbare Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial u'}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\right]_{u=u_0}$$

existiert. Dann kann man das erste Integral in (10) partiell integrieren. Aus der Definition der Funktion $\eta(x)$ ergibt sich $\eta(a') = \eta(a) = 0$, so daß das integralfreie Glied verschwindet. Wir gelangen damit zu der Gleichung

$$\int_{a'}^{a}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial u'}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} - \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\right]_{u=u_0}\eta(x)\,dx = 0\,.$$

Diese Beziehung gilt für eine beliebige Funktion $\eta \in C^{(1)}[a', a]$, $\eta(a') = \eta(a) = 0$. Die Menge dieser Funktionen ist dicht in $L_2(a', a)$ (vgl. § 3), so daß notwendigerweise gilt

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial u'}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} - \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\right]_{u=u_0} = 0\,. \tag{11}$$

Die letzte Beziehung stimmt mit Gleichung (8) für die Funktion $\sqrt{\dfrac{1+u'^2}{u}}$ überein.

Gleichung (11) bringt man leicht auf die Gestalt

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u_0\,(1+u_0'^2)} = 0\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$u_0\,(1+u_0'^2) = c\,.$$

Wir setzen $u_0' = \tan\varphi$. Dann ist $u_0 = \dfrac{c}{1+\tan^2\varphi} = \dfrac{c}{2}\,(1+\cos 2\,\varphi)$. Durch Differentiation erhält man $u_0' = -\,c\sin 2\,\varphi\cdot\varphi'$. Die Substitution $u_0' = \tan\varphi$ liefert folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\,\frac{\tan\varphi}{c\sin 2\,\varphi}\,.$$

Weiterhin gilt

$$dx = -\,2\,c\cos^2\varphi\,d\varphi\,; \qquad x = c_1 - \frac{c}{2}\,(2\,\varphi + \sin 2\,\varphi)\,.$$

Nach den Substitutionen $2\,\varphi = \pi + \theta$, $c_1 - \dfrac{\pi\,c}{2} = C$ erhalten wir

$$x = C - \frac{c}{2}\,(\theta - \sin\theta)\,, \qquad u_0 = \frac{c}{2}\,(1-\cos\theta)\,.$$

Damit gelangen wir zu der Folgerung: Wenn das Problem der Brachistochrone eine Lösung besitzt, dann ist diese Lösung die *Zykloide*.

Im vorangegangenen Paragraphen haben wir gezeigt, daß der Gradient des Funktionals von dem Raum abhängt, in den das Definitionsgebiet des Funk-

tionals eingebettet ist. Daraus ergibt sich, daß von diesem Raum auch die *Gestalt* der EULERschen Gleichung abhängt. Allerdings ist die *Lösung* der EULERschen Gleichung von dem genannten Raum unabhängig[1]). Diese Lösungen sind nämlich diejenigen Elemente $u \in D(F)$, für die $\delta F(u, \eta) = 0$ ist. Die Variation des Funktionals F hängt aber nur vom Definitionsgebiet $D(F)$ sowie von den Elementen u, η ab und ist unabhängig von dem Raum, in den das Gebiet $D(F)$ eingebettet ist.

Wir erläutern das soeben Gesagte am Beispiel des einfachsten Variationsproblems. Es sei $A = B = 0$. Im Raum $L_2(a, b)$ führt die EULERsche Gleichung auf die Differentialgleichung (8) mit den Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0 \,. \tag{12}$$

Im Raum $\mathring{W}_2^{(1)}(a, b)$ (vgl. § 3) führt die EULERsche Gleichung auf dieselben Randbedingungen (12) und [infolge der Formel (3.26)] auf die Gleichung

$$\int_a^x [\Phi_{u'}(t, u(t), u'(t)) - \int_a^t \Phi_u(\tau, u(\tau), u'(\tau))\, d\tau - C]\, dt = 0 \,. \tag{13}$$

Wie man leicht sieht, sind die Gleichungen (8) und (13) äquivalent: Die Gleichung (8) ergibt sich aus (13) durch zweimaliges Differenzieren; umgekehrt erhält man die Gleichung (13), indem man die Gleichung (8) zweimal integriert.

§ 5. Die zweite Variation. Eine hinreichende Bedingung für das Extremum

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus den vorangegangenen Paragraphen betrachten wir die Funktion $F(u + \alpha\,\eta)$ der reellen Veränderlichen α; $u \in D(F)$ und $\eta \in M$ sehen wir als feste Elemente an. Wir entwickeln diese Funktion nach der TAYLORschen Formel und setzen in der sich ergebenden Entwicklung $\alpha = 1$:

$$F\,(u + \eta) = F(u) + \left[\frac{d}{d\alpha} F\,(u + \alpha\,\eta)\right]_{\alpha=0} + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} F\,(u + \alpha\,\eta)\right]_{\alpha=\theta} =$$
$$= F(u) + \delta F(u, \eta) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} F\,(u + \alpha\,\eta)\right]_{\alpha=\theta}; \quad 0 < \theta < 1 \,. \tag{1}$$

Der Ausdruck

$$\delta^2 F(u, \eta) = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} F\,(u + \alpha\,\eta)\right]_{\alpha=0} \tag{2}$$

heißt *zweite Variation* des Funktionals F im Punkt u.

Es gilt

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} F\,(u + \alpha\,\eta)\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\beta^2} F\,(u + \theta\,\eta + \beta\,\eta)\right]_{\beta=\theta} = \delta^2 F\,(u + \theta\,\eta, \eta)\,,$$

und die Entwicklung (1) nimmt folgende Gestalt an:

$$F\,(u + \eta) = F(u) + \delta F(u, \eta) + \delta^2 F\,(u + \theta\,\eta, \eta)\,, \quad 0 < \theta < 1 \,. \tag{3}$$

---

[1]) Diese Eigenschaft nennt man gewöhnlich die Invarianz der EULERschen Gleichung.

Das Funktional F nehme im Punkt u_0 ein (relatives oder absolutes) Minimum an. Dann ist $\delta F(u_0, \eta) = 0$, und die Formel (3) ergibt

$$F(u_0 + \eta) = F(u_0) + \delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) . \tag{4}$$

Auf Grund der Beziehung (4) läßt sich sofort eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, daß ein der EULERschen Gleichung genügendes Element u_0 dem Funktional einen kleinsten Wert erteilt. Für ein absolutes Minimum lautet diese Bedingung:

$$\delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) \geqq 0 , \quad \forall \eta \in M . \tag{5}$$

Für ein relatives Minimum besteht diese Bedingung darin, daß die Ungleichung (5) erfüllt sein muß, sobald das Element η eine hinreichend kleine Norm hat. Die Bedingung (5) läßt sich in konkreten Aufgaben nur schwer nachprüfen, da die Größe θ gewöhnlich nicht bekannt ist, so daß man in der Regel von dieser Bedingung nicht unmittelbar Gebrauch machen kann. Aus ihr lassen sich jedoch leichter nachprüfbare notwendige oder hinreichende Bedingungen gewinnen. Insbesondere ergibt sich aus der Beziehung (5) die folgende hinreichende Bedingung für das Auftreten eines Minimums:

Satz 3.5.1. *Das Element u_0 genüge der EULERschen Gleichung. Wenn für $\eta \neq 0$ die zweite Variation des Funktionals F in einem beliebigen Punkt $u_0 \in D(F)$ nicht negativ ist, dann besitzt dieses Funktional im Punkt u_0 ein absolutes Minimum. Wenn für $\eta \neq 0$ die zweite Variation in einer gewissen Umgebung des Punktes u_0 nicht negativ ist, dann besitzt das Funktional in diesem Punkt ein relatives Minimum.*

Der Beweis ist sehr einfach. Im ersten Fall gilt für beliebiges $\eta \in M$, $\eta \neq 0$:

$$\delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) \geqq 0 .$$

Wenn u ein beliebiges, von u_0 verschiedenes Element aus $D(F)$ ist, so erhalten wir aus (4) für $\eta = u - u_0$: $F(u) \geqq F(u_0)$. Wir betrachten jetzt den zweiten Fall. Es existiert eine Zahl $\varrho > 0$, so daß für $u \in D(F)$, $||u - u_0|| < \varrho$ und $\eta \neq 0$ gilt: $\delta^2 F(u, \eta) \geqq 0$. Wir wählen ein solches u, $u \neq u_0$, und setzen wieder $\eta = u - u_0$. Dann ist

$$F(u) = F(u_0) + \delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) .$$

Es gilt

$$||(u_0 + \theta\eta) - u_0|| = ||\theta\eta|| = |\theta|\,||\eta|| \leqq ||\eta|| = ||u - u_0|| < \varrho .$$

Somit ergibt sich $\delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) \geqq 0$ und folglich $F(u) \geqq F(u_0)$.

§ 6. Das isoperimetrische Problem

Das isoperimetrische Problem lautet folgendermaßen: Gegeben seien die Funktionale $F, G_1, G_2, \ldots, G_n$ und gewisse Konstanten $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Unter denjenigen Elementen aus dem Definitionsgebiet $D(F)$ des Funktionals F, welche den Gleichungen

$$G_k(u) = l_k , \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

genügen, ist ein Element zu bestimmen, das dem Funktional F den kleinsten Wert erteilt. Die Aufgabenstellung des isoperimetrischen Problems bedingt natürlich, daß der Durchschnitt

$$D_0 = D(F) \cap D(G_1) \cap D(G_2) \cap \cdots \cap D(G_n) \tag{2}$$

nicht leer ist. Im weiteren wird vorausgesetzt, daß diese Bedingung erfüllt ist.

Ein Spezialfall des isoperimetrischen Problems ist die dritte der im § 1 betrachteten Aufgaben. Dabei ist $n = 1$,

$$F(u) = \int_a^b u(x)\,dx\,, \qquad G_1(u) = \int_a^b \sqrt{1 + u'^2}\,dx\,, \qquad l_1 = l\,.$$

Als $D(F)$ kann man die Menge der Funktionen aus $C[a, b]$ wählen, die für $x = a$ und $x = b$ gleich Null sind [Bedingung (5.1)]; als $D(G_1)$ wählen wir die Menge aller Funktionen aus $C^{(1)}[a, b]$, die ebenfalls die Bedingungen (5.1) erfüllen. Dann ist offensichtlich $D(G_1) \subset D(F)$, und der Durchschnitt $D(G_1) \cap D(F) = D(G_1)$ ist nicht leer.

Im weiteren setzen wir voraus, daß die Funktionale $F, G_1, G_2, \ldots, G_n$ die Bedingungen 1 und 2 aus § 2 erfüllen. Da der Durchschnitt linearer Mannigfaltigkeiten wieder eine lineare Mannigfaltigkeit ist, so existieren ein Element $\bar{u} \in D_0$ und eine lineare Menge M_0 mit der Eigenschaft, daß jedes Element $u \in D_0$ die Gestalt $u = \bar{u} + \eta$, $\eta \in M_0$, hat.

Des weiteren nehmen wir an, daß die Menge M_0 im betrachteten Raum dicht ist.

Es gilt folgender Satz, der auf EULER zurückgeht und unter der Bezeichnung *Multiplikatorenregel des isoperimetrischen Problems* bekannt ist.

Satz 3.6.1. *Das Element $u_0 \in D_0$ sei Lösung des isoperimetrischen Problems. Wenn Elemente $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in M_0$ existieren, für die die Determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta G_1(u_0, \eta_1) & \delta G_2(u_0, \eta_1) & \ldots & \delta G_n(u_0, \eta_1) \\ \delta G_1(u_0, \eta_2) & \delta G_2(u_0, \eta_2) & \ldots & \delta G_n(u_0, \eta_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta G_1(u_0, \eta_n) & \delta G_2(u_0, \eta_n) & \ldots & \delta G_n(u_0, \eta_n) \end{vmatrix} \tag{3}$$

von Null verschieden ist, dann lassen sich Konstanten λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, finden, so daß gilt

$$\left(\operatorname{grad}\left(F + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k\right)\right)(u_0) = 0\,. \tag{4}$$

Beweis. Wir führen reelle Veränderliche $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sowie ein Element $\eta_0 \in M_0$ ein und setzen

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \eta_k\,. \tag{5}$$

Für beliebige Werte α_k ist $u \in D_0$. Es gilt nämlich $u_0 = \bar{u} + \eta$, $\eta \in M_0$ und damit

$$u = \bar{u} + \left(\eta + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \eta_k\right).$$

Der Klammerausdruck ist eine Linearkombination von Elementen aus M_0 und gehört folglich selbst zu M_0. Somit ist $u \in D_0$.

Wir halten die Elemente η_k fest und setzen

$$G_j\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \eta_k\right) = \varphi_j(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen (6) für $\alpha_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \varphi_j(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\Bigg|_{\alpha_i=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} G_j\left(u_0 + \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \alpha_k \eta_k + \alpha_i \eta_i\right)\Bigg|_{\alpha_i=0}$$

$$= \delta G\left(u_0 + \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \alpha_k \eta_k, \eta_i\right).$$

Setzt man zusätzlich $\alpha_k = 0$, $k \neq i$, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \varphi_j(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\Bigg|_{\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0} = \delta G_j(u_0, \eta_i). \tag{7}$$

Wir wählen die Elemente $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ derart, daß die Determinante (3) von Null verschieden ist, und betrachten das Gleichungssystem

$$\varphi_j(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - l_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Für das System (8) sind die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt: Der Punkt $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ genügt dem System (8), und in diesem Punkt ist die Jacobische Funktionaldeterminante

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$$

von Null verschieden (auf Grund der Beziehungen (7) stimmt diese mit der Determinante (3) überein). Hieraus folgt die Existenz von Funktionen $\alpha_k = \omega_k(\alpha_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, die die Gleichungen des Systems (8) in Identitäten verwandeln. Diese Funktionen sind stetig differenzierbar für hinreichend kleine α_0, und es gilt $\omega_k(0) = 0$.

Die Gleichungen (8) bedeuten folgendes:

$$G_j\left(u_0 + \alpha_0 \eta_0 + \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\alpha_0) \eta_k\right) = l_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Das heißt, für beliebige, hinreichend kleine α_0 genügt das Element

$$u(\alpha_0) = u_0 + \alpha_0 \eta_0 + \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\alpha_0) \eta_k$$

den isoperimetrischen Gleichungen (1). Folglich ist

$$F(u(\alpha_0)) \geqq F(u_0).$$

Für $\alpha_0 = 0$ ist $u(0) = u_0$. Die Funktion $F(u(\alpha_0))$ der reellen Veränderlichen α_0

besitzt also ein Minimum für $\alpha_0 = 0$, und somit ist

$$\frac{d}{d\alpha_0} F\big(u(\alpha_0)\big)\bigg|_{\alpha_0=0} = 0 .$$

Es gilt

$$\frac{d}{d\alpha_0} F\big(u(\alpha_0)\big)\bigg|_{\alpha_0=0} = \frac{\partial F\left(u_0 + \alpha_0\,\eta_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\,\eta_k\right)}{\partial\alpha_0}\Bigg|_{\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F\left(u_0 + \alpha_0\,\eta_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\,\eta_k\right)}{\partial\alpha_k}\,\omega_k'(\alpha_0)\Bigg|_{\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0}$$

oder einfach

$$\frac{d}{d\alpha} F\big(u(\alpha_0)\big)\bigg|_{\alpha_0=0} = \delta F(u_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^{n} \delta F(u_0, \eta_k)\,\omega_k'(0) . \tag{9}$$

Die Werte $\omega_k'(0)$ lassen sich aus dem System (8) bestimmen: Wir substituieren in den Gleichungen dieses Systems $\alpha_k = \omega_k(\alpha_0)$, differenzieren die sich dadurch ergebenden Beziehungen nach α_0 und setzen $\alpha_0 = 0$. Analog zu (9) erhalten wir dann die Gleichungen

$$\delta G_j(u_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^{n} \delta G_j(u_0, \eta_k)\,\omega_k'(0) = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, n . \tag{10}$$

Diese Gleichungen stellen ein lineares System mit den Unbekannten $\omega_k'(0)$ dar. Die Determinante dieses Systems stimmt mit der Determinante (3) überein und ist somit von Null verschieden. Wie man leicht sieht, hat die Lösung des Systems (10) folgende Gestalt:

$$\omega_k'(0) = \sum_{m=1}^{n} A_{km}\,\delta G_m(u_0, \eta_0) , \qquad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Dabei sind A_{km} gewisse Konstanten. Setzt man diese Größen in Gleichung (9) ein, so ergibt sich nach Änderung der Summationsreihenfolge und Einführung der Bezeichnungen

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\,\delta F(u_0, \eta_k) , \qquad J = F + \sum_{k=1}^{n} \lambda_j\,G_j$$

die Beziehung

$$\delta J(u_0, \eta_0) = 0 .$$

Durch Wiederholung der im § 4 bei der Herleitung der Eulerschen Gleichung benutzten Überlegungen erhalten wir dann

$$(\operatorname{grad} J)(u_0) = \left(\operatorname{grad}\left(F + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,G_j\right)\right)(u_0) = 0 ,$$

was zu beweisen war.

Wir möchten bemerken, daß der soeben bewiesene Satz von Euler lediglich eine notwendige Bedingung für ein Minimum des isoperimetrischen Problems liefert.

Für die Lösung isoperimetrischer Probleme läßt sich folgender Algorithmus aufstellen: Man bildet das Funktional $J = F + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k$, wobei λ_k unbestimmte Konstanten sind, und stellt für dieses Funktional die EULERsche Gleichung auf. Diese enthält als Unbekannte das Element u_0 und die Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Diese Unbekannten werden aus der EULERschen Gleichung (4) sowie aus den isoperimetrischen Gleichungen (1) bestimmt.

Als **Beispiel** betrachten wir die Aufgabe 3 aus § 1, auf die auch am Anfang des vorliegenden Paragraphen eingegangen wurde. Dem Satz von EULER entsprechend, führen wir einen konstanten Faktor λ ein und bilden das Funktional

$$J(u) = F(u) + \lambda\, G_1(u) = \int_a^b \left(u + \lambda \sqrt{1 + u'^2}\right) dx\,;$$

$$u(a) = u(b) = 0\,.$$

Das Funktional J ist ein Spezialfall des Funktionals aus dem einfachsten Variationsproblem: Im vorliegenden Fall ist $\Phi(x, u, u') = u + \lambda \sqrt{1 + u'^2}$. Die EULERsche Gleichung $(\operatorname{grad} J)(u) = 0$ für das Funktional J hat auf Grund der Formel (4.8) folgende Gestalt:

$$\frac{d}{dx} \frac{\lambda u'}{\sqrt{1 + u'^2}} - 1 = 0\,.$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} = \frac{c - x}{\lambda}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$u' = -\frac{x - c}{\sqrt{\lambda^2 - (c - x)^2}}\,.$$

Eine nochmalige Integration liefert die Kreisgleichung

$$(x - c)^2 + (u - c_1)^2 = \lambda^2\,.$$

Wenn also eine Lösung existiert, dann ist diese ein Kreisbogen. Zur Bestimmung des Kreisradius λ und des Kreismittelpunktes (c, c_1) stehen drei Gleichungen zur Verfügung:

$$u(a) = 0\,, \qquad u(b) = 0\,, \qquad \int_a^b \sqrt{1 + u'^2}\, dx = l\,.$$

Wählen wir als Koordinatenursprung den Mittelpunkt des Segments $[a, b]$, so ergibt sich $a = -b$. Unsere Gleichungen nehmen dann folgende Gestalt an:

$$(c + b)^2 + c_1^2 = \lambda^2\,, \quad (c - b)^2 + c_1^2 = \lambda^2\,,$$

$$\int_{-b}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c)^2}}\, dx = l\,.$$

Daraus ergibt sich

$$c = 0\,, \qquad c_1 = \sqrt{\lambda^2 - b^2}\,, \qquad 2\,\lambda \arcsin \frac{b}{\lambda} = l\,.$$

Wenn speziell $l = \pi\, b$ ist, dann ist $\lambda = b$, so daß sich als Lösung ein Halbkreis ergibt.

§ 7. Die Minimalfolge

Es sei F ein beliebiges nach unten beschränktes Funktional. Dann existiert die untere Grenze seines Wertevorrates

$$\mu = \inf_{u \in D(F)} F(u)\,.$$

Eine Folge $\{u_n\}$ von Elementen aus $D(F)$ heißt *Minimalfolge* des Funktionals F, wenn der Genzwert $F(u_n)$ existiert und gleich μ ist.

Satz 3.7.1. *Ein nach unten beschränktes Funktional besitzt wenigstens eine Minimalfolge.*

Beweis. Aus der Definition der unteren Grenze folgt: 1. Für ein beliebiges Element $u \in D(F)$ gilt die Ungleichung $F(u) \geqq \mu$; 2. für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert ein Element $u^{(\varepsilon)} \in D(F)$ derart, daß $F(u^{(\varepsilon)}) < \mu + \varepsilon$ gilt. Wir setzen jetzt $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und $u_n = u^{(1/n)}$. Dann gilt

$$\mu \leqq F(u_n) < \mu + \frac{1}{n}\,,$$

woraus $\lim F(u_n) = \mu$ folgt.

Satz 3.7.2. *Es sei $D(F)$ eine lineare Mannigfaltigkeit eines* Banach-*Raumes X. Wenn das Funktional F auf $D(F)$ stetig ist und die Minimalfolge $\{u_n\}$ ein Grenzelement $u_0 = \lim u_n$ besitzt, dann nimmt das Funktional F in dem Element u_0 ein Minimum an.*

Der Beweis ist äußerst einfach: Auf Grund der Stetigkeit des Funktionals F gilt nämlich

$$F(u_0) = \lim F(u_n) = \mu = \inf F(u_n)\,.$$

Die Sätze des vorliegenden Paragraphen ermöglichen es, das Minimumproblem eines Funktionals ohne Verwendung der Eulerschen Gleichung zu lösen. Zu diesem Zweck ist zunächst die Menge $D(F)$ in einen solchen Banach-Raum X einzubetten, in dem das Funktional F stetig ist. Als nächstes ist dann eine Minimalfolge zu konstruieren. Konvergiert diese (im Sinne der Metrik des Raumes X), dann ist ihr Grenzelement Lösung des Variationsproblems.

Übungsaufgaben

1. Wir bezeichnen mit $C_0^{(1)}[a, b]$ die Menge der Funktionen, die auf dem Segment $[a, b]$ stetig differenzierbar sind und die in den Punkten a und b verschwinden. Das Funktional

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x, u(x), u'(x))\, dx$$

betrachten wir auf der Menge $C_0^{(1)}[a, b]$, welche wir in den Hilbert-Raum H, der wie folgt

definiert ist, einbetten: Die Elemente des Raumes H sind auf $[a, b]$ absolut stetige Funktionen, welche in den Punkten a und b gleich Null sind und quadratisch summierbare Ableitungen erster Ordnung besitzen. Das Skalarprodukt sowie die Norm in H definieren wir durch die Gleichungen

$$(u, v)_H = \int_a^b u'(x)\, v'(x)\, dx$$

und

$$||u||_H^2 = \int_a^b u'^2(x)\, dx\,.$$

Die Funktion $\Phi(x, u, u')$ sei im Bereich

$$a \leqq x \leqq b\,, \qquad -\infty < u < +\infty\,, \qquad -\infty < u' < +\infty$$

stetig differenzierbar. Man berechne grad F und bestimme sein Definitionsgebiet.

2. Wir stellen folgendes isoperimetrische Problem: Man bestimme das Minimum des Funktionals

$$\Phi(u) = \int_0^1 \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)\, u^2\, dx\right]$$

mit den Nebenbedingungen

$$u \in C_0^{(1)}[0, 1]\,, \qquad \int_0^1 u^2\, dx = 1\,.$$

Die Funktionen $p(x)$, $p'(x)$ und $q(x)$ seien stetig auf $[0, 1]$ und es gelte

$$p(x) \geqq p_0 = \text{const} > 0\,, \qquad q(x) \geqq 0\,.$$

Wir setzen

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin k\,\pi\, x$$

und bestimmen die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus den Bedingungen

$$\int_0^1 u_n^2\,(x)\, dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$$

und $\Phi(u_n) = \min$. Man beweise, daß sich die Funktionen u_n auf diese Weise konstruieren lassen und daß sie eine Minimalfolge des Funktionals Φ bilden.

3. In der Aufgabe 2 wähle man die Funktionen u_n in der folgenden Form:

$$u_n = x\,(1 - x) \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sollen weiterhin aus den Bedingungen

$$\int_0^1 u_n^2(x)\, dx = 1\,, \qquad \Phi(u_n) = \min$$

bestimmt werden. Man beweise die Behauptung der Aufgabe 2.

KAPITEL 4

FUNKTIONALE, DIE VON REELLEN FUNKTIONEN REELLER VERÄNDERLICHER ABHÄNGEN

§ 1. Das einfachste Variationsproblem

Dieses Problem wurde bereits im § 4 des Kap. 3 betrachtet. Wir erinnern, daß es sich hierbei um das Minimum des Integrals

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x, u, u')\, dx \tag{1}$$

handelt, wobei an die Funktion $u(x)$ folgende Randbedingungen gestellt werden:

$$u(a) = A\,, \qquad u(b) = B\,. \tag{2}$$

Hierbei sind A und B vorgegebene Konstanten. Bezüglich des Integranden $\Phi(x, u, u')$ wurde vorausgesetzt, daß dieser im Bereich

$$a \leqq x \leqq b\,, \qquad -\infty < u < +\infty\,, \qquad -\infty < u' < +\infty \tag{3}$$

stetig ist und stetige partielle Ableitungen nach u und u' besitzt. Als Definitionsgebiet $D(F)$ des Funktionals (1) wurde die lineare Mannigfaltigkeit der Funktionen aus $C^{(1)}[a, b]$, die den Bedingungen (2) genügen, angenommen; die Mannigfaltigkeit $D(F)$ haben wir als Teilmenge des Raumes $L_2(a, b)$ betrachtet. Dabei zeigte es sich, daß der Gradient des Funktionals F auf den und nur den Funktionen $u \in D(F)$ definiert ist, für welche die Funktion

$$\Phi_{u'}(x, u, u')$$

auf dem Segment $[a, b]$ absolut stetig ist und eine quadratisch summierbare Ableitung besitzt. Der Gradient selbst wird durch die Formel

$$(\text{grad } F)(u) = \Phi_u - \frac{d}{dx}\,\Phi_{u'} \tag{4}$$

definiert.

Die EULERsche Gleichung für das Funktional (1) ist der Differentialgleichung

$$(\text{grad } F)(u) = \Phi_u - \frac{d}{dx}\,\Phi_{u'} = 0 \tag{5}$$

mit den Randbedingungen (2) äquivalent. Wenn also das einfachste Variationsproblem eine Lösung besitzt, dann hat diese der Differentialgleichung (5) und

den Randbedingungen (2) zu genügen. Die Lösungen der Gleichung (5) nennt man gewöhnlich *Extremalfunktionen* des Funktionals (1).

Wir stellen jetzt an den Integranden $\Phi(x, u, u')$ einige Zusatzbedingungen: Wir verlangen, daß diese Funktion im Bereich (3) stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach sämtlichen Veränderlichen x, u, u' sowie die stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\Phi_{xu'}$, $\Phi_{uu'}$ und $\Phi_{u'^2}$ besitzt; dabei sei $\Phi_{u'^2} \neq 0$. Wir zeigen dann, daß unter diesen Voraussetzungen jede Extremalfunktion des Funktionals (1) eine stetige zweite Ableitung besitzt. Zunächst beweisen wir, daß unter den bezüglich der Funktion Φ gemachten Voraussetzungen jede Funktion aus dem Definitionsgebiet $D(\operatorname{grad} F)$ fast überall eine quadratisch summierbare zweite Ableitung besitzt.

Es sei $u \in D(\operatorname{grad} F)$. Dann ist um so mehr $u \in D(F)$, und folglich gilt $u \in C^{(1)}[a, b]$. Gleichzeitig ist $\frac{d}{dx}\Phi_{u'} \in L_2(a, b)$. Wir setzen

$$\frac{d}{dx}\Phi_{u'}(x, u, u') = \omega(x)\,.$$

Dann existiert fast überall der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi_{u'}(x + \Delta x, u + \Delta u, u' + \Delta u') - \Phi_{u'}(x, u, u')}{\Delta x} = \omega(x)\,,$$

wobei

$$\Delta u = u\,(x + \Delta x) - u(x)\,, \qquad \Delta u' = u'\,(x + \Delta x) - u'(x)$$

bedeutet. Nach der LAGRANGEschen Formel ergibt sich

$$\frac{\Phi_{u'}\,(x + \Delta x, u + \Delta u, u' + \Delta u') - \Phi_{u'}(x, u, u')}{\Delta x} =$$

$$= \Phi_{xu'}\,(x + \theta\,\Delta x,\ u + \theta\,\Delta u, u' + \theta\,\Delta u') +$$
$$+ \Phi_{uu'}\,(x + \theta\,\Delta x, u + \theta\,\Delta u, u' + \theta\,\Delta u')\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$
$$+ \Phi_{u'^2}\,(x + \theta\,\Delta x,\ u + \theta\,\Delta u, u' + \theta\,\Delta u')\frac{\Delta u'}{\Delta x}, \qquad 0 < \theta < 1\,.$$

Wegen $\Phi_{u'^2} \neq 0$ läßt sich aus der letzten Beziehung der Quotient $\frac{\Delta u'}{\Delta x}$ bestimmen. Der kürzeren Schreibweise wegen lassen wir bei den zweiten Ableitungen die Argumente weg:

$$\frac{\Delta u'}{\Delta x} = \frac{1}{\Phi_{u'^2}}\left\{\frac{\Phi_{u'}\,(x + \Delta x, u + \Delta u, u' + \Delta u') - \Phi_{u'}(x, u, u')}{\Delta x} - \Phi_{xu'} - \Phi_{uu'}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right\}.$$

Für $\Delta x \to 0$ besitzt die rechte Seite der letzten Gleichung fast überall einen Grenzwert, und dieser ist gleich

$$\frac{1}{\Phi_{u'^2}(x, u, u')}\left\{\frac{d}{dx}\Phi_{u'}(x, u, u') - \Phi_{xu'}(x, u, u') - \Phi_{uu'}(x, u, u')\,u'\right\} =$$
$$= \frac{1}{\Phi_{u'^2}(x, u, u')}\left\{\omega(x) - \Phi_{xu'}(x, u, u') - \Phi_{uu'}(x, u, u')\,u'\right\}.$$

Dann existiert aber fast überall die zweite Ableitung

$$u'' = \frac{1}{\Phi_{u'^2}(x, u, u')} \{\omega(x) - \Phi_{xu'}(x, u, u') - \Phi_{uu'}(x, u, u')u'\}$$

und ist quadratisch summierbar.

Wenn u eine Extremalfunktion ist, dann gilt auf Grund der EULERschen Gleichung $\omega(x) = \Phi_u(u, x, u')$ und

$$u'' = \frac{1}{\Phi_{u'^2}(x, u, u')} \{\Phi_u(x, u, u') - \Phi_{xu'}(x, u, u') - \Phi_{uu'}(x, u, u')\, u'\}\,. \quad (6)$$

Aus den bezüglich Φ gemachten Voraussetzungen folgt nun, daß u'' eine auf dem Segment $[a, b]$ stetige Funktion ist.

Gleichung (6) stellt eine andere Schreibweise der EULERschen Gleichung dar. Somit ergibt sich: Im Falle des einfachsten Variationsproblems läßt sich die Extremalfunktion aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmen. Das allgemeine Integral dieser Gleichung enthält zwei willkürliche Konstanten. Wir bezeichnen es mit $\varphi(x, C_1, C_2)$. Die willkürlichen Konstanten sind aus den Gleichungen

$$\varphi(a, C_1, C_2) = A\,, \qquad \varphi(b, C_1, C_2) = B\,, \quad (7)$$

welche sich aus den Randbedingungen (2) ergeben, zu bestimmen.

§ 2. Untersuchung der zweiten Variation

Im Falle des einfachsten Variationsproblems hat die zweite Variation die Gestalt

$$\delta^2 F(u, \eta) = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_a^b \Phi\big(x, u(x) + \alpha\,\eta(x), u'(x) + \alpha\,\eta'(x)\big)\,dx\right]_{\alpha=0}.$$

Nach Differentiation unter dem Integralzeichen erhalten wir

$$\delta^2 F(u, \eta) = \frac{1}{2}\int_a^b [\Phi_{u^2}(x, u, u')\,\eta^2(x) + 2\,\Phi_{uu'}(x, u, u')\,\eta(x)\,\eta'(x) + \\ + \Phi_{u'^2}(x, u, u')\,\eta'^2(x)]\,dx\,. \quad (1)$$

Die Funktion $u_0(x)$ genüge der Gleichung (1.5) und den Randbedingungen (1.2). Wie im § 5 des Kap. 3 gezeigt wurde, ist dafür, daß diese Funktion dem Funktional (1.1) ein relatives Minimum erteilt, notwendig (und hinreichend), daß für alle Elemente $\eta \in M$ mit hinreichend kleiner Norm die Ungleichung $\delta^2 F(u_0 + \theta\,\eta, \eta) \geqq 0$ gilt. Wir bemerken, daß im vorliegenden Fall M die Menge der Funktionen aus $C^{(1)}[a, b]$ ist, die in den Punkten a und b gleich Null sind. Diese Menge bezeichnen wir mit $C_0^{(1)}[a, b]$.

Wir zeigen jetzt, daß eine notwendige Bedingung für das Minimum die Ungleichung

$$\delta^2 F(u_0, \eta) \geqq 0\,, \qquad \forall\, \eta \in C_0^{(1)}[a, b]\,,$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$\int_a^b [\Phi_{u^2}(x, u_0, u_0') \eta^2 + 2 \Phi_{uu'}(x, u_0, u_0') \eta \eta' + \\ + \Phi_{u'^2}(x, u_0, u_0') \eta'^2] \, dx \geqq 0 \, , \qquad \forall \eta \in C_0^{(1)}[a, b] \, , \tag{2}$$

ist. Wenn nämlich für eine gewisse Funktion $\eta_0 \in C_0^{(1)}[a, b]$ die Relation $\delta^2 F(u_0, \eta_0) = -\gamma < 0$ gilt, so ergibt sich für $\eta = \varepsilon \eta_0$ mit einer dem Betrag nach hinreichend kleinen Zahl ε die Beziehung

$$\delta^2 F(u_0, \eta) = -\gamma \varepsilon^2 \, .$$

Weiterhin gilt

$$\delta^2 F(u_0 + \theta \eta, \eta) - \delta^2 F(u_0, \eta) = \\ = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_a^b \{[\Phi_{u^2}(x, u_0 + \theta \varepsilon \eta_0, u_0' + \theta \varepsilon \eta_0') - \Phi_{u^2}(x, u_0, u_0')] \eta_0^2 + \\ + 2 [\Phi_{uu'}(x, u_0 + \theta \varepsilon \eta_0, u_0' + \theta \varepsilon \eta_0') - \Phi_{uu'}(x, u_0, u_0')] \eta_0 \eta_0' + \\ + [\Phi_{u'^2}(x, u_0 + \theta \varepsilon \eta_0, u_0' + \theta \varepsilon \eta_0') - \Phi_{u'^2}(x, u_0, u_0')] \eta'^2\} \, dx \, .$$

Bei hinreichend kleinem ε kann das letzte Integral beliebig klein gemacht werden. Wir wählen ε derart, daß dieses Integral dem Betrag nach kleiner als γ ist. Dann gilt

$$|\delta^2 F(u_0 + \theta \eta, \eta) - \delta^2 F(u_0, \eta)| < \frac{1}{2} \gamma \varepsilon^2 \, .$$

Daraus folgt

$$\delta^2 F(u_0 + \theta \eta, \eta) < \delta^2 F(u_0, \eta) + \frac{1}{2} \gamma \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} \gamma \varepsilon^2 < 0 \, ,$$

so daß die notwendige Bedingung für das Minimum verletzt ist.

Die notwendige Bedingung (2) läßt sich weiter vereinfachen. Es gilt nämlich der folgende

Satz 4.2.1. (Legendresche Bedingung). *Dafür, daß die Bedingung* (2) *für beliebiges* $\eta \in C_0^{(1)}[a, b]$ *erfüllt ist, ist notwendig, daß* $\Phi_{u'^2}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geqq 0$ *für beliebiges* $x \in [a, b]$ *gilt.*

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$\Phi_{u'^2}(x, u_0(x), u_0'(x)) = p(x) \, , \\ \Phi_{uu'}(x, u_0(x), u_0'(0)) = q(x) \, , \\ \Phi_{u^2}(x, u_0(x), u_0'(x)) = r(x) \, .$$

Die Bedingung (2) nimmt folgende Gestalt an:

$$\int_a^b [p(x) \eta'^2 + 2 q(x) \eta \eta' + r(x) \eta^2] \, dx \geqq 0 \, , \qquad \eta \in C_0^{(1)}[a, b] \, . \tag{3}$$

Das Integral in (3) bezeichnen wir mit $I(\eta)$. Wir nehmen an, daß in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ die Ungleichung $p(x_0) < 0$ erfüllt ist. Dann gilt $p(x) < 0$ in einem gewissen Intervall, das den Punkt x_0 enthält. Dann lassen sich aber

ein Segment $[\alpha, \beta]$ im Inneren dieses Intervalls und eine positive Konstante p_0 finden, so daß gilt

$$p(x) < -p_0 , \qquad x \in [\alpha, \beta] .$$

Wir setzen jetzt

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 0 , & a \leqq x \leqq \alpha , \\ \sin^2 \dfrac{n \pi (x - \alpha)}{\beta - \alpha} , & \alpha < x < \beta , \\ 0 , & \beta \leqq x \leqq b , \end{cases}$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Offensichtlich ist $\eta_n \in C_0^{(1)} [a, b]$. Es gilt nun

$$I(\eta_n) = \int_\alpha^\beta [p(x) \eta_n'^2 + 2 q(x) \eta_n \eta_n' + r(x) \eta_n^2] \, dx .$$

Die stetigen Funktionen $q(x)$ und $r(x)$ sind beschränkt. Es gelte $|q(x)| < q_0$, $|r(x)| < r_0$, wobei q_0 und r_0 gewisse Konstanten sind. Dann ist

$$I(\eta_n) < -p_0 \frac{n^2 \pi^2}{2(\beta - \alpha)} + \pi q_0 n + r_0 (\beta - \alpha) ;$$

die rechte Seite dieser Ungleichung ist für hinreichend große n negativ. Der Satz ist damit bewiesen.

§ 3. Der Fall mehrerer unabhängiger Veränderlicher

Wir betrachten ein endliches Gebiet Ω des m-dimensionalen euklidischen Raumes und nehmen an, daß der Rand Γ des Gebietes Ω aus einer endlichen Anzahl stückweise glatter Flächen der Dimension $m - 1$ besteht. In diesem Fall gilt für den Rand Γ die Formel der partiellen Integration (siehe § 1 des Kap. 2).

Die Funktion

$$\Phi(x, u, z_1, z_2, \ldots, z_m) \tag{1}$$

sei für jedes $x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ und für beliebige endliche Zahlenwerte der Veränderlichen $u, z_1, z_2, \ldots, z_m$ definiert. Wir nehmen an, daß die Funktion Φ in dem genannten Variabilitätsbereich zusammen mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach sämtlichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m, u, z_1, z_2, \ldots, z_m$ stetig ist.

Wir betrachten das Funktional

$$F(u) = \int_\Omega \Phi \left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) dx \tag{2}$$

auf der Menge $D(F)$ der Funktionen $u \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$, die der Randbedingung

$$u|_\Gamma = g(x) \tag{3}$$

genügen, wobei $g(x)$ eine auf Γ vorgegebene stetige Funktion bedeutet. Dabei setzen wir voraus, daß wenigstens eine Funktion $\overline{u}(x)$ existiert, die die beiden Bedingungen

$$\overline{u} \in C^{(1)}(\overline{\Omega}) , \qquad \overline{u}|_\Gamma = g(x) \tag{4}$$

erfüllt.

Wir bemerken, daß die zuletzt gemachte Voraussetzung wesentlich ist: Im Gegensatz zum Fall einer Veränderlichen kann es sich hier bei entsprechender Wahl der auf Γ stetigen Funktion $g(x)$ erweisen, daß es keine Funktion $\overline{u}(x)$ gibt, die den Bedingungen (4) genügt. In diesem Fall ist das Definitionsgebiet $D(F)$ leer, und das Minimumproblem für das Funktional (2) ist gegenstandslos.

Wenn eine solche Funktion $\overline{u}(x)$ existiert, dann enthält die Menge $D(F)$ die lineare Mannigfaltigkeit von Funktionen der Gestalt $u(x) = \overline{u}(x) + \eta(x)$, wobei gilt $\eta \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$ (vgl. § 1, Kap. 2).

Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $D(F)$ als Teilmenge des Raumes $L_2(\Omega)$. Aus der Folgerung 1.3.1 ergibt sich sofort, daß die Menge $\mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ dicht ist, und es ist nun leicht zu beweisen, daß das Funktional (2) den Bedingungen 1 und 2 aus § 2 des Kap. 3 genügt.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, das Funktional 2 zu minimieren und leiten eine notwendige Bedingung dafür her. Eine allgemeine notwendige Bedingung kennen wir bereits (§ 4, Kap. 3): Wenn das Element u_0 das Funktional F zum Minimum macht, so gilt $u_0 \in D(\operatorname{grad} F)$ und $(\operatorname{grad} F)(u_0) = 0$.

Wir bilden die Variation

$$\begin{aligned}\delta F(u, \eta) &= \frac{d}{d\alpha} F(u + \alpha\eta)|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \int_\Omega \Omega(x, u + \alpha\eta, u_1 + \alpha\eta_1, \ldots, u_m + \alpha\eta_m)\, dx|_{\alpha=0} = \\ &= \int_\Omega \left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}\eta + \sum_{k=1}^m \frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\eta_k\right] dx\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei wurden die Bezeichnungen

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad \eta_k = \frac{\partial \eta}{\partial x_k}$$

eingeführt, und unter den Differentiationszeichen bei Φ wurden die Argumente x $u(x), u_1(x), \ldots, u_k(x)$ weggelassen.

Die Funktion $u \in D(F)$ gehört dann und nur dann zum Definitionsgebiet $D(\operatorname{grad} F)$, wenn das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (5) ein im Raum $L_2(\Omega)$ beschränktes Funktional darstellt. Das genannte Integral ist die Summe von $m + 1$ Integralen:

$$\delta F(u, \eta) = \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial u}\eta\, dx + \sum_{k=1}^m \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\eta_k\, dx = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \eta\right) + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}, \eta_k\right).$$

Die Funktionen $\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_k}$ sind stetig in $\overline{\Omega}$; dann gehören sie erst recht zu $L_2(\Omega)$, und das erste Skalarprodukt ist somit beschränkt im Raum $L_2(\Omega)$. Für die übrigen Produkte kann man dies im allgemeinen nicht behaupten.

Die Funktion $u \in D(F)$ sei so beschaffen, daß die verallgemeinerten Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

existieren. Dann gilt nach der Formel (1.1) aus Kap. 2

$$\int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \eta_k \, dx = \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \, dx = -\int_\Omega \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \, dx$$

und folglich

$$\delta F(u, \eta) = \int_\Omega \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \right] \eta \, dx, \quad \forall\, \eta \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega). \tag{7}$$

Wir nehmen weiterhin an, daß

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \in L_2(\Omega) \tag{8}$$

ist. Dann ist

$$\delta F(u, \eta) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \eta \right)$$

ein Funktional von η, das im Raum $L_2(\Omega)$ beschränkt ist. Damit ist aber $u \in D(\operatorname{grad} F)$, und es gilt

$$(\operatorname{grad} F)(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \qquad u|_\Gamma = g(x). \tag{9}$$

Das Definitionsgebiet des Gradienten von F enthält also auf jeden Fall die Funktionen, welche folgende Eigenschaften besitzen: 1. Diese Funktionen gehören zu $C^{(1)}(\overline{\Omega})$ und genügen der Bedingung (3); 2. es existieren die verallgemeinerten Ableitungen (6); 3. die Bedingung (8) ist erfüllt. Insbesondere enthält die Menge $D(\operatorname{grad} F)$ diejenigen Funktionen aus $C^{(2)}(\overline{\Omega})$, welche der Bedingung (3) genügen.

Jetzt läßt sich leicht die Eulersche Gleichung unseres Variationsproblems aufschreiben, wenn man voraussetzt, daß die Funktion, welche dem Funktional (2) das Minimum erteilt, die soeben genannten Eigenschaften besitzt. Die Eulersche Gleichung besteht aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = 0, \qquad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \tag{10}$$

und der Randbedingung (3).

Beispiel 1. Es sei

$$F(u) = \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx, \quad u|_\Gamma = g(x). \tag{11}$$

Die EULERsche Differentialgleichung für das Funktional (11) hat die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \tag{12}$$

oder kurz $\Delta u = 0$. Diese Gleichung ist unter der Randbedingung $u|_\Gamma = g(x)$ zu integrieren; dabei wird vorausgesetzt, daß eine Funktion $\bar{u}(x)$, die den Bedingungen (4) genügt, existiert. Das Integral (11) heißt gewöhnlich DIRICHLET*sches Integral.*

Beispiel 2. Es sei

$$F(u) = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 - 2 f u \right] dx, \quad u|_\Gamma = 0. \tag{13}$$

Die EULERsche Differentialgleichung für das Funktional (13) läßt sich leicht auf die Gestalt

$$-\Delta u = f(x) \tag{14}$$

bringen. Die Gleichung (14) ist bei der Randbedingung $u|_\Gamma = 0$ zu integrieren. In diesem Fall ist die Existenz der Funktion $\bar{u}(x)$ offensichtlich: Es genügt $\bar{u}(x) \equiv 0$ zu setzen.

Das Definitionsgebiet des Gradienten des Funktionals (2) läßt sich vollständig beschreiben, wenn man den Begriff der verallgemeinerten Divergenz eines Vektors einführt, was im wesentlichen analog der Definition der verallgemeinerten Ableitung geschieht (siehe Kap. 2). Wenn $g(x)$ ein in $\bar{\Omega}$ stetig differenzierbarer Vektor mit den Komponenten $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ und $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$ (siehe Kap. 2, § 1) ist, so gilt nach einer bekannten Formel aus der Vektoranalysis

$$\int_\Omega g(x) \cdot \operatorname{grad} \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega \varphi(x) \operatorname{div} g(x)\, dx .$$

Jetzt sei $g(x)$ ein beliebiger in Ω summierbarer Vektor, und es existiere eine in Ω summierbare skalare Funktion $f(x)$ derart, daß für eine beliebige Funktion $\varphi \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$ folgende Beziehung gilt:

$$\int_\Omega g(x) \cdot \operatorname{grad} \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx . \tag{15}$$

Dann heißt die Funktion $f(x)$ verallgemeinerte Divergenz des Vektors $g(x)$ im Gebiet Ω.

Es sei $u \in D(F)$ eine Funktion derart, daß der Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}$ eine verallgemeinerte Divergenz besitzt, die in Ω quadratisch summierbar ist. Wir bezeichnen diese Divergenz, genauso wie die gewöhnliche Divergenz, mit dem Symbol

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} .$$

Dabei gilt jetzt allerdings zu berücksichtigen, daß die einzelnen Summanden der letzten Summe nicht erklärt sind.

Offensichtlich gilt $\eta \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$. Mit Hilfe der Formel (15) läßt sich die Variation $\delta F(u, \eta)$ auf die Gestalt (7) bringen; diese Variation ist auf Grund

unserer Voraussetzungen ein beschränktes Funktional von η, folglich gilt $u \in D(\text{grad } F)$.

Es sei nun umgekehrt $u \in D(\text{grad } F)$. Dann ist der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \eta_k \, dx , \quad \eta \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$$

im Raum $L_2(\Omega)$ ein beschränktes Funktional von η. Nach dem Satz von Riesz existiert dann eine Funktion $v \in L_2(\Omega)$ derart, daß gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \eta_k \, dx = (v, \eta) = \int_{\Omega} v(x) \, \eta(x) \, dx, \quad \forall \, \eta \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega) .$$

Entsprechend der Definition besitzt dann der Vektor $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}\right)$ eine verallgemeinerte Divergenz $- v \in L_2(\Omega)$.

Somit gehört die Funktion $u \in D(F)$ dann und nur dann zum Definitionsgebiet $D(\text{grad } F)$, wenn der Vektor $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}\right)$ eine verallgemeinerte Divergenz besitzt, welche in Ω quadratisch summierbar ist; dabei gilt, wie man leicht sieht,

$$(\text{grad } F)(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} .$$

Die Eulersche Gleichung behält die Gestalt (10), es gilt lediglich zu beachten, daß die einzelnen Summanden unter dem Summenzeichen im allgemeinen nicht erklärt sind.

§ 4. Funktionale, die von Ableitungen höherer Ordnungen abhängen

Wir betrachten ein Funktional der Gestalt

$$F(u) = \int_a^b \Omega(x, u, u', u'', \ldots, u^{(k)}) \, dx . \tag{1}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Funktion $\Phi(x, z_0, z_1, \ldots, z_k)$ im Variabilitätsbereich

$$x \in [a, b], \qquad -\infty < z_j < \infty , \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, k , \tag{2}$$

definiert und k-mal stetig differenzierbar ist. Das Funktional (1) betrachten wir auf der Menge der Funktionen $u \in C^{(k)}[a, b]$, die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(a) &= A_0 , \quad u'(a) = A_1, \ldots, u^{(k-1)}(a) = A_{k-1} , \\ u(b) &= B_0 , \quad u'(b) = B_1, \ldots, u^{(k-1)}(b) = B_{k-1} , \end{aligned} \tag{3}$$

genügen, wobei A_j und B_j vorgegebene Konstanten sind. Als $\bar{u}(x)$ kann man ein Polynom vom Grade $2k - 1$ wählen, welches die Bedingungen (3) erfüllt; bekanntlich läßt sich ein solches Polynom konstruieren. Jetzt ist einsichtig,

daß $D(F)$ eine lineare Mannigfaltigkeit von Funktionen der Gestalt $u(x) = \bar{u}(x) + \eta(x)$ mit $\eta \in \mathfrak{M}^{(k)}(a, b)$ ist. Betrachtet man nun $D(F)$ als Teilmenge des Raumes $L_2(a, b)$, so sieht man leicht, daß das Funktional F den Bedingungen 1 und 2 aus § 2 des Kap. 3 genügt.

Wir bilden die Variation

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b \Phi\,(x, u + \alpha\,\eta, u' + \alpha\,\eta', \ldots, u^{(k)} + \alpha\,\eta^{(k)})\; dx|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\eta(x) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}\,\eta^{(j)}(x)\right] dx\,. \tag{4}$$

Die Funktion $u(x)$ sei derart beschaffen, daß

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}\left(x, u(x), u'(x) \ldots u^{(k)}(x)\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

eine verallgemeinerte Ableitung j-ter Ordnung besitzt[1]) und außerdem gilt

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}} \in L_2(a, b)\,. \tag{5}$$

Nach der Formel (1.1) aus Kap. 2 gilt dann

$$\int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}\,\eta^{(j)}(x)\; dx = (-1)^j \int_a^b \eta(x)\, \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}\, dx$$

und folglich

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}\right] \eta(x)\; dx\,. \tag{6}$$

Das Integral (6) ist ein Funktional in η, das im Raum $L_2(\Omega)$ beschränkt ist. Daraus ergibt sich, daß die Funktion $u(x)$ mit den oben genannten Eigenschaften zum Definitionsgebiet $D(\operatorname{grad} F)$ gehört. Für eine solche Funktion gilt

$$(\operatorname{grad} F)(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}\,. \tag{7}$$

Wenn man annimmt, daß eine Funktion existiert, die das Funktional (1) unter den Bedingungen (3) zum Minimum macht und die oben genannten Eigenschaften besitzt, so kann man für diese Funktion die Eulersche Glei-

---

[1]) Nach Satz 2.4.2 bedeutet dies, daß die genannte Funktion auf dem Segment $[a, b]$ zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $j - 1$ stetig und die $(j - 1)$-te Ableitung absolut stetig ist.

chung aufschreiben. Sie besteht aus der Differentialgleichung 2 k-ter Ordnung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}} = 0 \tag{8}$$

und den Randbedingungen (3).

Die in diesem Paragraphen angestellten Überlegungen lassen sich offenbar auch auf den Fall mehrerer unabhängiger Veränderlicher übertragen. Für das Funktional

$$\int_{\Omega} \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right) dx \tag{9}$$

mit den Randbedingungen

$$u|_{\Gamma} = g_0(x), \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = g_1(x), \ldots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1}(x), \tag{10}$$

wobei ν die Normale zu Γ bedeutet, besteht die EULERsche Gleichung aus den Randbedingungen (10) und der partiellen Differentialgleichung 2 k-ter Ordnung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)} + \sum_{j_1, j_2=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}\right)} + \cdots +$$

$$+ (-1)^k \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_k=1}^{k} \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}}\right)} = 0\,. \tag{11}$$

So hat z. B. die EULERsche Differentialgleichung für das Funktional

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 dx$$

die Gestalt

$$2 \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 0\,,$$

welche sich leicht auf die Gleichung

$$\Delta^2 u = 0$$

zurückführen läßt.

§ 5. Funktionale, die von mehreren Funktionen abhängen

Der einfacheren Schreibweise wegen beschränken wir uns auf den Fall einer unabhängigen Veränderlichen und zweier Funktionen. Wir nehmen weiterhin an, daß das Funktional außer diesen Funktionen nur noch von deren ersten Ableitungen abhängen. Die Betrachtung des allgemeinen Falles ruft keinerlei Schwierigkeiten hervor.

Wir betrachten also das Funktional

$$F(u, v) = \int_a^b \Phi(x, u, v, u', v')\, dx \tag{1}$$

und definieren es auf allen Paaren $\{u, v\}$ von Funktionen aus $C^{(1)}[a, b]$, die den Randbedingungen

$$u(a) = A_1\,, \qquad u(b) = B_1\,, \qquad v(a) = A_2\,, \qquad v(b) = B_2 \tag{2}$$

genügen, wobei A_1, A_2, B_1, B_2 gewisse Konstanten sind. Wie gewöhnlich bezeichnen wir die Menge dieser Paare mit $D(F)$. Jedes dieser Paare wollen wir Vektor nennen.

Wir bilden den Vektor $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ mit

$$\bar{u}(x) = A_1 + \frac{B_1 - A_1}{b - a}(x - a)\,, \qquad \bar{v}(x) = A_2 + \frac{B_2 - A_2}{b - a}(x - a)\,.$$

Dann läßt sich jeder Vektor $\{u, v\} \in D(F)$ in der Form

$$\{u, v\} = \{\bar{u} + \eta,\ \bar{v} + \zeta\}$$

darstellen, wobei $\eta(x)$ und $\zeta(x)$ Funktionen aus $C^{(1)}[a, b]$ sind, die den Randbedingungen

$$\eta(a) = \eta(b) = \zeta(a) = \zeta(b) = 0 \tag{3}$$

genügen. Die Menge der Vektoren $\{\eta, \zeta\}$ ist offenbar linear, demnach ist $D(F)$ eine lineare Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten $D(F)$ als Teilmenge des Raumes $\boldsymbol{L}_2(a, b)$ aller Vektorfunktionen, die auf dem Intervall (a, b) quadratisch summierbar sind. Das Skalarprodukt sowie die Norm im Raum $\boldsymbol{L}_2(a, b)$ definieren wir durch folgende Beziehungen:

$$(\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}) = \int_a^b (u_1 u_2 + v_1 v_2)\, dx;$$

$$||\{u, v\}||^2 = \int_a^b (u^2 + v^2)\, dx\,.$$

Man prüft leicht nach, daß das Funktional (1) die Bedingungen 1 und 2 aus § 2 des Kap. 3 erfüllt.

Die Variation des Funktionals (1) hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \delta F(u, v, \eta, \zeta) &= \\ &= \frac{d}{d\alpha}\int_a^b \Phi\,(x, u + \alpha\,\eta, v + \alpha\,\zeta, u' + \alpha\,\eta',\ v' + \alpha\,\zeta')\, dx|_{\alpha=0} = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial u'}\eta' + \frac{\partial \Phi}{\partial v'}\zeta'\right) dx\,. \end{aligned}$$

Indem man die früher bei der Untersuchung der einfachsten Variationsaufgabe benutzten Überlegungen wiederholt, beweist man leicht die folgenden Behauptungen:

1. Das Definitionsgebiet des Gradienten grad F besteht aus den und nur den Vektoren $\{u, v\}$, die zu $D(F)$ gehören und für die $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u'}$ und $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v'}$ auf dem

Segment $[a, b]$ absolut stetige Funktionen sind, deren Ableitungen auf demselben Segment quadratisch summierbar sind;

2. der Gradient des Funktionals F ist der durch die Formel

$$(\operatorname{grad} F)(\{u, v\}) = \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'},\quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial v'}\right\} \tag{4}$$

definierte Vektor;

3. die EULERsche Gleichung für das Funktional F führt auf das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = 0\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial v'} = 0 \tag{5}$$

mit den Randbedingungen (2).

§ 6. Natürliche Randbedingungen

1. Um den Begriff der natürlichen Randbedingungen sowie die Entstehung dieses Begriffes zu klären, betrachten wir folgendes Variationsproblem:

Gesucht ist das Minimum des Funktionals

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x, u, u')\, dx \tag{1}$$

auf der Menge der Funktionen $u \in C^{(1)}[a, b]$; die Funktion $u(x)$ wird von vornherein keiner Randbedingung unterworfen. An die Funktion $\Phi(x, u, u')$ stellen wir dieselben Bedingungen wie beim einfachsten Variationsproblem.

Der wesentliche Unterschied zwischen diesem neuen Variationsproblem und dem einfachsten Variationsproblem besteht im Fehlen der Randbedingungen für die Funktionen, über denen das Minimum gesucht wird.

In unserem Falle ist $D(F) = C^{(1)}[a, b]$. Diese Menge ist linear, und man kann sie als lineare Mannigfaltigkeit auffassen (es genügt, $\bar{u} = 0$ zu setzen). Wir betrachten sie als Teilmenge des Raumes $L_2(a, b)$. Man prüft leicht nach, daß das Funktional (1) die Bedingungen 1 und 2 aus § 2 des Kap. 3 erfüllt.

Wir bestimmen jetzt den Gradienten des Funktionals (1) und beweisen dabei folgenden Satz.

Satz 4.6.1. *Dafür, daß die Funktion $u(x)$ zum Definitionsgebiet des Gradienten des Funktionals* (1) *gehört, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:* 1. $u \in C^{(1)}[a, b]$; 2. *die Funktion* $\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = \Phi_{u'}\big(x, u(x), u'(x)\big)$ *ist auf dem Segment* $[a, b]$ *absolut stetig und besitzt eine quadratisch summierbare Ableitung;* 3. *die Funktion $u(x)$ genügt folgenden Randbedingungen:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=a} &= \Phi_{u'}\big(a, u(a), u'(a)\big) = 0\,,\\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=b} &= \Phi_{u'}\big(b, u(b), u'(b)\big) = 0\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Beweis. Notwendigkeit. Die Notwendigkeit der Bedingung 1 ergibt sich aus der Inklusion $D(\text{grad } F) \subset D(F) = C^{(1)}[a, b]$. Wir wenden uns jetzt den Bedingungen 2 und 3 zu. Wie im § 3 des Kap. 3 ist die Variation des Funktionals (1) gleich

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b \Phi\,(x, u + \alpha\, \eta, u' + \alpha\, \eta')\, dx|_{\alpha=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \eta' \right) dx\,.$$

Wie auch früher ist sie ein beschränktes Funktional von η, wenn das Funktional

$$\int_b^a \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \eta'\, dx \tag{3}$$

beschränkt ist.

Es sei $u \in D(\text{grad } F)$. Dann ist das Funktional (3) beschränkt, und es existiert deshalb eine Funktion $g \in L_2(a, b)$ derart, daß gilt

$$\int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \eta'(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, \eta(x)\, dx\,, \qquad \forall\, \eta \in C^{(1)}\,[a, b]\,. \tag{4}$$

Wir führen die Funktion

$$G(x) = - \int_a^x g(t)\, dt + C\,, \qquad C = \text{const}\,,$$

ein. Durch partielle Integration des Integrals auf der rechten Seite in (4) ergibt sich

$$\int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u'} - G(x) \right] \eta'(x)\, dx = G(a)\, \eta(a) - G(b)\, \eta(b)\,. \tag{5}$$

Die Beziehung (5) gilt für eine beliebige Funktion $\eta \in C^{(1)}[a, b]$. Wir nehmen jetzt zusätzlich

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{6}$$

an. Dann gilt

$$\int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u'} - G(x) \right] \eta'(x)\, dx = 0\,. \tag{7}$$

Gleichung (7) stimmt mit Gleichung (3.22) aus Kap. 3 überein, so daß sich daraus wieder die folgende Beziehung ableiten läßt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = G(x) + \text{const} = - \int_a^x g(t)\, dt + \text{const}\,. \tag{8}$$

Damit ist die Notwendigkeit der Behauptung 2 des Satzes bewiesen.

Das Integral (3) kann man nun partiell integrieren:

$$\int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \eta'\, dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \eta\, dx + \eta(b) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right)_{x=b} - \eta(a) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right)_{x=a},$$

so daß sich für die Variation folgender Ausdruck ergibt:

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right] \eta \, dx + \eta(b)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=b} - \eta(a)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=a}. \tag{9}$$

Das Integral in (9) ist nach Voraussetzung ein beschränktes Funktional von η im Raum $L_2(a, b)$. Ein beschränktes Funktional in $L_2(a, b)$ muß auch der Term

$$\eta(b)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=b} - \eta(a)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=a}, \qquad \eta \in C^{(1)}[a, b], \tag{10}$$

darstellen. Da aber der Wert der Funktion $\eta(x)$ in einem vorgegebenen Punkt ein unbeschränktes Funktional von η im Raum $L_2(a, b)$ ist, so ergibt sich, daß der Ausdruck (10) nur dann ein beschränktes Funktional in $L_2(a, b)$ sein kann, wenn

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=a} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=b} = 0$$

ist. Die Notwendigkeit der Bedingungen des Satzes ist damit bewiesen.

Aus Gleichung (9) ergibt sich jetzt die Formel für den Gradienten:

$$(\text{grad } F)(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'}. \tag{11}$$

H i n l ä n g l i c h k e i t. Wenn die Bedingungen 1 bis 3 des Satzes erfüllt sind, so kann man das Integral (3) partiell integrieren. Unter Verwendung der Randbedingungen (2) erhält man

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right] \eta \, dx. \tag{12}$$

Der Klammerausdruck ist ein Element des Raumes $L_2(a, b)$. Also ist das Integral (12) in diesem Raum ein beschränktes Funktional, und es gilt somit $u \in D(\text{grad } F)$. Der Satz ist vollständig bewiesen.

In dem soeben betrachteten Problem müssen also die Funktionen aus dem Definitionsgebiet $D(\text{grad } F)$ notwendigerweise gewissen Randbedingungen genügen (im vorliegenden Falle den Bedingungen (2)), welche nicht unbedingt die Funktionen aus dem Definitionsgebiet $D(F)$ zu erfüllen brauchen. Solche Bedingungen heißen *natürliche* Randbedingungen für das Funktional F.

Im vorliegenden Falle sind also die Bedingungen (2) die natürlichen Randbedingungen für das Funktional (1).

Diejenigen Randbedingungen, denen alle Funktionen aus dem Definitionsgebiet $D(F)$ genügen, heißen *wesentliche* Randbedingungen für das Funktional F. So sind z. B. die Bedingungen (3.10) aus Kap. 3 die wesentlichen Randbedingungen für das Funktional des einfachsten Variationsproblems.

Jetzt ist es leicht, die notwendige Bedingung für das Minimum des Funktionals (1) (die Eulersche Gleichung) anzugeben. Die Eulersche Gleichung

führt im vorliegenden Fall auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = 0 \tag{13}$$

mit den Randbedingungen (2), unter denen diese Gleichung nun zu integrieren ist.

Bemerkung. Zu der EULERschen Gleichung kann man auch ohne Verwendung des Satzes 4.6.1 gelangen.

Die Funktion u_0 erteile unserem Funktional ein Minimum. Wir setzen $u_0(a) = A$, $u_0(b) = B$. Als Kurve, mit der wir die Extremalkurve vergleichen, wählen wir eine Kurve, die durch die Punkte (a, A) und (b, B) (Abb. 7) hindurchgeht, d. h. also eine solche Kurve, für die $u(a) = A$, $u(b) = B$ gilt (in Abb. 7 ist diese Linie punktiert). Dann ist $F(u) \geqq F(u_0)$, und somit sind die Bedingungen des einfachsten Variationsproblems erfüllt. Dann muß also die Funktion $u_0(x)$ der Gleichung (13) genügen. Diese Gleichung ist aber noch nicht ausreichend: Wir müssen u_0 auch mit solchen Kurven vergleichen, die nicht durch die Punkte (a, A) und (b, B) hindurchgehen, wie z. B. die Kurve $y = u_1(x)$ in Abb. 7.

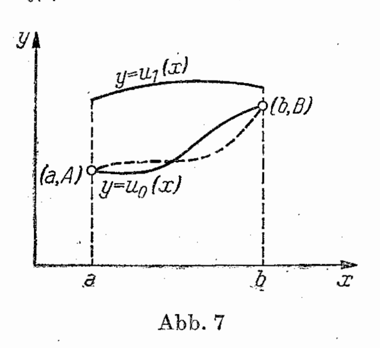


Abb. 7

Neben der Funktion u_0 betrachten wir noch die Funktionen $u_0 + \alpha\,\eta$, wobei α eine beliebige reelle Zahl und η eine stetig differenzierbare Funktion, die keinerlei Randbedingungen unterworfen ist, bedeuten. Dann gilt $F(u_0 + \alpha\,\eta) \geqq F(u_0)$ und, wie gewöhnlich,

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b [\Phi_u\,\eta + \Phi_{u'}\,\eta']\,dx\,.$$

Integrieren wir das zweite Integral partiell, so erhalten wir

$$\delta F(u_0, \eta) = \Phi_{u'}\,\eta\,\Big|_a^b + \int_a^b \left[\Phi_u - \frac{d}{dx}\,\Phi_{u'}\right]\eta\,dx\,.$$

Die Minimumbedingung nimmt nun folgende Gestalt an:

$$\Phi_{u'}|_{x=b}\;\eta(b) - \Phi_{u'}|_{x=a}\;\eta(a) = 0\,.$$

Da die Funktion η bisher beliebig war, so kann man jetzt $\eta(b) = 1$ und $\eta(a) = 0$ fordern. Dann ergibt sich $\Phi_{u'}|_{x=b} = 0$. Analog erhält man $\Phi_{u'}|_{x=a} = 0$.

2. Wir betrachten drei Beispiele.

2.1. Das auf $C^{(1)}[a, b]$ definierte Funktional

$$F_1(u) = \int_a^b [p(x)\,u'^2 + q(x)\,u^2 - 2\,f(x)\,u]\,dx \tag{14}$$

ist ein Spezialfall des Funktionals (1). Wir nehmen an, daß die Funktionen $p(x), p'(x), q(x), f(x)$ auf dem Segment $[a, b]$ stetig[1]) sind und daß $p(x) > 0$[2])

[1]) Diese Voraussetzungen lassen sich weiter abschwächen.

[2]) Die Bedingung $p(x) > 0$ bedeutet für das Funktional (14) eine Verschärfung der LEGENDREschen Bedingung aus § 2; letztere hat im vorliegenden Fall die Gestalt $p(x) \geqq 0$.

ist. Der Gradient des Funktionals (14) ist auf den Funktionen aus $C^{(1)}[a, b]$ definiert, für die das Produkt $p(x)\, u'(x)$ absolut stetig ist und auf dem Segment $[a, b]$[1]) eine quadratisch summierbare Ableitung besitzt und die den natürlichen Randbedingungen

$$u'(a) = u'(b) = 0 \tag{15}$$

genügen; der Gradient selbst ist gleich

$$2\left[q(x)\, u - \frac{d}{dx}\left(p(x)\, \frac{du}{dx}\right) - f(x)\right]. \tag{16}$$

Die EULERsche Gleichung für das Funktional (14) ist die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\, \frac{du}{dx}\right) + q(x)\, u = f(x) \tag{17}$$

mit den Randbedingungen (15).

2.2. Wir betrachten das Funktional

$$F_2(u) = \int_a^b [p(x)\, u'^2 + q(x)\, u^2 - 2 f(x)\, u]\, dx + \alpha\, u^2(a) + \beta\, u^2(b)\,,$$
$$u \in C^{(1)}[a, b]\,. \tag{18}$$

Hierbei sind α und β gewisse Konstanten; die Funktionen $p(x)$, $q(x)$ und $f(x)$ mögen denselben Bedingungen genügen wie im Beispiel 2.1. Wegen der letzten zwei Glieder in (18) ist das Funktional F_2 nicht vom Typ (1), das oben benutzte Schema dagegen ist auch für diesen Fall geeignet.

Wir bestimmen das Definitionsgebiet $D(\text{grad}\, F_2)$ sowie den analytischen Ausdruck für grad F_2. Für die Variation des Funktionals (18) gilt

$$\delta F_2(u, \eta) = 2\left\{\int_a^b [p(x)\, u'\, \eta' + q(x)\, u\, \eta - f(x)\, \eta]\, dx + \right.$$
$$\left. + \alpha\, u(a)\, \eta(a) + \beta\, u(b)\, \eta(b)\right\}, \quad \eta \in C^{(1)}[a, b]\,. \tag{19}$$

Es sei $u \in D(\text{grad}\, F_2)$. Dann ist die rechte Seite der Gleichung (19) ein beschränktes Funktional von η im Raum $L_2(a, b)$. Daran ändert sich selbstverständlich auch dann nichts, wenn η gewissen Zusatzbedingungen unterworfen wird. Wir verlangen vorübergehend, daß

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{20}$$

ist. Dann gilt

$$\delta F_2(u, \eta) = 2\int_a^b [p(x)\, u'\, \eta' + q(x)\, u\, \eta - f(x)\, \eta]\, dx\,.$$

[1]) Ausgehend von den Eigenschaften der Funktion $p(x)$ kann man leicht beweisen, daß diese Bedingung der folgenden äquivalent ist: Auf dem Segment $[a, b]$ ist die Ableitung $u'(x)$ absolut stetig und u'' hat ein summierbares Quadrat.

Es sind also die Bedingungen des einfachsten Variationsproblems für das Funktional (14) erfüllt, und wir können somit Folgendes behaupten: Wenn $u \in D(\text{grad } F_2)$ ist, so ist $u'(x)$ absolut stetig und die Funktion $\big(p(x)\,u'(x)\big)'$ ist auf dem Segment $[a, b]$ quadratisch summierbar[1]). Unter Berücksichtigung der letzten Behauptungen befreien wir uns jetzt von den Zusatzbedingungen (20) und integrieren partiell den ersten Term in (19):

$$\delta F_2(u, \eta) = 2 \int_a^b [-\,p(x)\,u')' + q(x)\,u - f(x)]\,\eta\,dx + \\ + 2\,\{[p(b)\,u'(b) + \beta\,u(b)]\,\eta(b) - [p(a)\,u'(a) - \alpha\,u(a)]\,\eta(a)\}\,. \tag{21}$$

Das Integral in (19) ist ebenso wie der in der Gleichung (21) in den geschweiften Klammern stehende Ausdruck ein beschränktes Funktional von η im Raum $L_2(a, b)$. Dieselben Überlegungen wie im allgemeinen Fall führen auf die Beziehungen

$$p(a)\,u'(a) - \alpha\,u(a) = 0\,, \qquad p(b)\,u'(b) + \beta\,u(b) = 0\,, \tag{22}$$

die für das Funktional (18) die natürlichen Randbedingungen darstellen. Man sieht jetzt leicht, daß grad F_2 durch den Ausdruck (16) definiert wird. Die Eulersche Gleichung für das Funktional F_2 führt auf die Differentialgleichung (17) mit den Randbedingungen (22).

2.3. Das Funktional

$$F_3(u) = \int_0^1 \big(u^2 + u'^2 + u''^2 - 2\,f(x)\,u\big)\,dx \tag{23}$$

betrachten wir auf der Menge der Funktionen aus $C^{(2)}[0, 1]$, die den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{24}$$

genügen. Diese Menge sehen wir, wie gewöhnlich, als Teilmenge des Raumes $L_2(0, 1)$ an. Für die Variation des Funktionals (23) gilt

$$\delta F_3(u, \eta) = 2 \int_0^1 (u\,\eta + u'\,\eta' + u''\,\eta'' - f\,\eta)\,dx\,. \tag{25}$$

Dabei bedeutet η eine beliebige Funktion aus $C^{(2)}[0, 1]$, die den Bedingungen (24) genügt, d. h., es gilt

$$\eta(0) = \eta(1) = 0\,.$$

Wenn $u \in D(\text{grad } F_3)$ ist, dann ist das Integral (25) ein beschränktes Funktional von η im Raum $L_2(0, 1)$. Das gilt auch dann noch, wenn η den Zusatzbedingungen

$$\eta'(0) = \eta'(1) = 0 \tag{26}$$

unterworfen wird. Dann sind aber die Bedingungen des § 4 erfüllt. In unserem Fall gilt

$$\Phi = u^2 + u'^2 + u''^2 - 2\,f(x)\,u$$

[1]) Siehe letzte Fußnote auf der vorangegangenen Seite.

und folglich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = 2\,u'\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u''} = 2\,u''\,.$$

Wie bereits im § 4 nehmen wir an, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial u''} = 2\,u''$ eine verallgemeinerte zweite Ableitung besitzt. Letzteres bedeutet, daß u''' absolut stetig und $u^{(4)}$ summierbar ist. Entsprechend der Formel (4.5) verlangen wir:

$$[-\,u'' + u^{(4)}] \in L_2(0,1)\,.$$

Da aber u'' stetig ist, so muß $u^{(4)} \in L_2(0,1)$ sein. Dabei gilt, wie im § 4,

$$(\operatorname{grad} F_3)(u) = 2\,[u - u'' + u^{(4)} - f(x)]\,. \tag{27}$$

Wir befreien uns jetzt von den Bedingungen (26) und integrieren partiell den zweiten und den dritten Term der rechten Seite in (25):

$$\delta F_3(u,\eta) = 2\int\limits_0^1 [u - u'' + u^{(4)} - f(x)]\,\eta\,dx + u''(1)\,\eta'(1) - u''(0)\,\eta'(0)\,. \tag{28}$$

Das Integral in (28) ist ein beschränktes Funktional von η; $\eta'(1)$ und $\eta'(0)$ dagegen sind, wie man leicht sieht, unbeschränkte Funktionale. Deshalb muß die Funktion $u(x) \in D(\operatorname{grad} F_3)$, wenn sie die oben genannten Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt, notwendigerweise folgenden, für das Funktional (23) natürlichen Randbedingungen genügen:

$$u''(0) = u''(1) = 0\,. \tag{29}$$

Die EULERsche Gleichung für dieses Funktional führt auf die Differentialgleichung

$$u^{(4)} - u'' + u = f(x) \tag{30}$$

mit den Randbedingungen (24) und (29).

KAPITEL 5

DAS MINIMUM DES QUADRATISCHEN FUNKTIONALS

§ 1. Der Begriff des quadratischen Funktionals

Im vorliegenden Kapitel betrachten wir Funktionale, deren Definitionsgebiete in einem reellen HILBERT-Raum liegen. In einigen Fällen (die besonders aufgeführt werden) setzen wir diesen Raum als separabel voraus. Es sei daran erinnert, daß man einen BANACH-Raum separabel nennt, wenn er eine dichte abzählbare Menge enthält. Für den HILBERT-Raum läßt sich eine andere, äquivalente Definition angeben: Ein HILBERT-Raum heißt separabel, wenn in ihm ein vollständiges abzählbares orthonormiertes System existiert. Einer der wichtigsten separablen HILBERT-Räume ist der Raum $L_2(\Omega)$, wobei Ω eine meßbare Menge im endlichdimensionalen Raum bedeutet.

Es sei ein HILBERT-Raum H gegeben. Wir betrachten in H ein *bilineares* Funktional $\Phi(u, v)$. So wird ein von zwei Elementen des Raumes H abhängiges Funktional genannt, das folgende Eigenschaften besitzt: Bei festem v ist dieses Funktional linear in u:

$$\Phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \Phi(u_1, v) + \alpha_2 \Phi(u_2, v), \tag{1}$$

und bei festem u ist dieses Funktional linear in v:

$$\Phi(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Phi(u, v_1) + \alpha_2 \Phi(u, v_2). \tag{2}$$

In den Gleichungen (1) und (2) bedeuten α_1 und α_2 beliebige reelle Zahlen.

Wir werden nur *symmetrische* bilineare Funktionale betrachten, d. h. solche, für die gilt

$$\Phi(u, v) = \Phi(v, u). \tag{3}$$

Das einfachste bilineare symmetrische Funktional ist das Skalarprodukt (u, v) der Elemente u und v.

Homogenes quadratisches Funktional oder *quadratische Form* heißt der Ausdruck $\Phi(u, u)$, wobei $\Phi(u, v)$ ein symmetrisches bilineares Funktional ist. Der Kürze halber schreiben wir $\Phi(u)$ an Stelle von $\Phi(u, u)$.

Wir leiten jetzt eine einfache und wichtige Beziehung her, der eine beliebige quadratische Form genügt. Es seien $\Phi(u, v)$ ein bilineares Funktional und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ gewisse Zahlen. Wenden wir nacheinander die Formeln (1) und

(2) an, so erhalten wir

$$\Phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \\ = \alpha_1 \beta_1 \Phi(u_1, v_1) + \alpha_1 \beta_2 \Phi(u_1, v_2) + \alpha_2 \beta_1 \Phi(u_2, v_1) + \alpha_2 \beta_2 \Phi(u_2, v_2)\,.$$

Wenn im besonderen das Funktional Φ symmetrisch ist, so ergibt sich

$$\Phi(u + v, u + v) = \Phi(u, u) + 2\,\Phi(u, v) + \Phi(v, v)$$

oder

$$\Phi(u + v) = \Phi(u) + 2\,\Phi(u, v) + \Phi(v)\,. \tag{4}$$

Dies ist die gesuchte Beziehung.

Beispiel. Das DIRICHLETsche Integral

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$$

ist eine quadratische Form, die dem symmetrischen bilinearen Funktional

$$\Phi(u, v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx$$

entspricht.

Quadratisches Funktional nennen wir den Ausdruck

$$F(u) = \Phi(u) - l(u)\,, \tag{5}$$

wobei $\Phi(u)$ eine quadratische Form und $l(u)$ ein lineares Funktional bedeuten.

Beispiel. Der einfachste HILBERT-Raum ist die reelle Zahlengerade. Die skalare Multiplikation bedeutet hier die Multiplikation von Zahlen, und die Norm ist der Betrag einer Zahl. Ein Polynom zweiten Grades ohne absolutes Glied ist ein quadratisches Funktional.

Ein weiteres, weit wichtigeres Beispiel, mit dem wir es im folgenden zu tun haben werden, ist das quadratische Funktional

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 - 2 f(x)\, u \right\} dx\,. \tag{6}$$

§ 2. Positiv-definite Operatoren

1. Im weiteren werden wir des öfteren Operatoren in einem HILBERT-Raum H betrachten. Wenn ein solcher Operator z. B. mit dem Buchstaben A bezeichnet wird, so bezeichnen wir sein Definitionsgebiet mit $D(A)$ und seinen Wertevorrat mit $R(A)$. Wenn wir davon sprechen, daß A ein Operator im Raum H ist, so verstehen wir darunter, wie gewöhnlich, daß $D(A) \subset H$ und $R(A) \subset H$ gilt.

Wenn von einem Operator A im HILBERT-Raum H die Rede ist, so setzen wir stets voraus, daß A ein linearer[1]) Operator ist und daß sein Definitionsgebiet dicht in H, d. h. $\overline{D(A)} = H$ ist (der Querstrich bedeutet hier die Abschließung in der Metrik des Raumes H).

[1]) Das heißt ein additiver und homogener, aber möglicherweise unbeschränkter Operator.

Der Operator A in einem Hilbert-Raum heißt *symmetrisch*, wenn $\overline{D(A)} = H$ ist und wenn für beliebige $u, v \in D(A)$ die Gleichung

$$(A\,u, v) = (u, A\,v) \tag{1}$$

gilt. Wenn A ein symmetrischer Operator ist, dann ist für $u, v \in D(A)$ der Ausdruck $(A\,u, v)$ ein symmetrisches bilineares Funktional, und $(A\,u, u)$ ist eine quadratische Form.

Beispiel 1. Im Raum $H = L_2(\Omega)$ betrachten wir den Integraloperator

$$K\,u = \int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy\,. \tag{2}$$

Wir setzen voraus, daß das $2m$-dimensionale Integral

$$\int_\Omega \int_\Omega K^2(x, y)\, dx\, dy$$

endlich ist. Ein solcher Operator ist auf dem ganzen Raum definiert (siehe unten Satz 7.2.1). Wenn $K(x, y) = K(y, x)$ ist, so ist der Operator (2) symmetrisch. Dies wollen wir beweisen.

Wir bilden das Skalarprodukt

$$(K\,u, v) = \int_\Omega v(x) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy \right\} dx\,.$$

Nach dem Satz von Fubini kann man die Integrationsreihenfolge ändern:

$$(K\,u, v) = \int_\Omega u(y) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, v(x)\, dx \right\} dy\,.$$

Ersetzen wir x durch y und umgekehrt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(K\,u, v) &= \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(y, x)\, v(y)\, dy \right\} dx = \\ &= \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, v(y)\, dy \right\} dx = (K\,v, u) = (u, K\,v)\,,\end{aligned}$$

da man im Falle eines reellen Raumes die Faktoren im Skalarprodukt vertauschen kann.

Beispiel 2. Im Raum $H = L_2(0, 1)$ betrachten wir den Operator

$$A\,u = -\frac{d^2u}{dx^2}\,. \tag{3}$$

Es bestehe $D(A)$ aus den Funktionen u, die folgende zwei Bedingungen erfüllen:

$$\begin{gathered} u \in C^{(2)}\,[0, 1]\,, \\ u(0) = u(1) = 0\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Offenbar ist der so definierte Operator A linear. Wir beweisen jetzt, daß er symmetrisch ist und daß $\overline{D(A)} = H$ gilt.

Die Menge $D(A)$ der Funktionen aus $C^{(2)}[0, 1]$, die den Randbedingungen (4) genügen, enthält als Teilmenge die in $L_2(0, 1)$ dichte Menge aller auf dem Segment $[0, 1]$ finiten Funktionen. Auf Grund der Folgerung 1.3.1 ist die Menge $D(A)$ selbst dicht in $L_2(0, 1)$.

Es bleibt noch zu beweisen, daß der Operator A der Symmetriebedingung (1) genügt. Zu diesem Zweck bilden wir das Skalarprodukt $(A\,u, v)$, wobei $u, v \in D(A)$ sind, d. h., es gilt $u, v \in C^{(2)}[0, 1]$ und

$$u(0) = u(1) = 0\,, \quad v(0) = v(1) = 0\,.$$

Wenn man nun partiell integriert und berücksichtigt, daß die integralfreien Glieder infolge der zuletzt angegebenen Randbedingungen verschwinden, so ergibt sich

$$(A\,u, v) = -\int_0^1 v(x)\, u''(x)\, dx = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = -\int_0^1 u(x)\, v''(x)\, dx = (u, A\,v)\,.$$

2. Definition 1. Der symmetrische Operator A heißt *positiv*, wenn die quadratische Form $(A\,u, u) \geqq 0$ ist und wenn $(A\,u, u) = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $u = 0$ ist.

Zum Beispiel ist der Operator (3)—(4) positiv. Um uns davon zu überzeugen, bilden wir die quadratische Form

$$(A\,u, u) = -\int_0^1 u\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx\,.$$

Durch partielle Integration und Berücksichtigung der Bedingungen (4) erhalten wir

$$(A\,u, u) = \int_0^1 u'^2(x)\,dx \geqq 0\,. \tag{5}$$

Wir nehmen an, daß $(A\,u, u) = 0$ und folglich $\int_0^1 u'^2\,dx = 0$ ist. Dann gilt aber $u'(x) \equiv 0$ und $u(x) \equiv \text{const}$. Aus den Bedingungen (4) ergibt sich nun $u(x) \equiv 0$.

Definition 2. Der symmetrische Operator A heißt *positiv-definit*, wenn gilt

$$\inf_{\substack{u \in D(A)\\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} > 0\,. \tag{6}$$

Diese Definition ist der folgenden äquivalent: Der symmetrische Operator A heißt positiv-definit, wenn eine Konstante $\gamma^2 > 0$ existiert derart, daß die Ungleichung

$$(A\,u, u) \geqq \gamma^2\,\|u\|^2 \tag{7}$$

gilt. Diese Formel nennen wir *Ungleichung der positiven Definitheit.*

Offensichtlich ist jeder positiv-definite Operator auch gleichzeitig positiv. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Beispiel. Wir wollen beweisen, daß der Operator (3)—(4) positiv-definit ist. Nach der Newton-Leibnizschen Formel ist

$$u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t)\,dt\,. \tag{8}$$

Infolge der Bedingungen (4) gilt $u(0) = 0$ und somit

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\,dt\,.$$

Nach der Cauchy-Bunjakowskischen Ungleichung ergibt sich

$$u^2(x) \leqq \int_0^x 1\,dt \cdot \int_0^x u'^2(t)\,dt = x\int_0^x u'^2(t)\,dt \leqq \int_0^1 u'^2(t)\,dt\,.$$

Die letzte Ungleichung integrieren wir nach x in den Grenzen von 0 bis 1:

$$\|u\|^2 = \int_0^1 u^2(x)\,dx \leqq \int_0^1 u'^2(x)\,dx\,. \tag{9}$$

Durch Vergleich mit der Formel (5) erhalten wir

$$(A\,u, u) \geqq \|u\|^2 .$$

Der Operator A ist positiv-definit; die Zahl γ kann man gleich Eins setzen.

3. Es gibt Operatoren, die positiv, aber nicht positiv-definit sind. Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir folgendes Beispiel.

Der Operator B werde durch die Formel

$$B\,u = -\frac{d^2u}{dx^2}, \quad 0 < x < \infty, \tag{10}$$

definiert. Wir betrachten B als Operator im HILBERT-Raum $L_2(0, \infty)$; als Definitionsgebiet $D(B)$ nehmen wir die Menge derjenigen Funktionen, die folgenden Bedingungen genügen: 1. $u \in C^{(2)}[0; \infty)$; 2. $u(0) = 0$; 3. für jede Funktion $u \in D(B)$ existiert eine Zahl a_u derart, daß $u(x) \equiv 0$ für $x > a_u$ ist. Offenbar ist $D(B) \subset L_2(0, \infty)$.

Wir beweisen jetzt, daß der auf diese Weise definierte Operator B positiv, jedoch nicht positiv-definit ist. Als erstes zeigen wir, daß $\overline{D(B)} = L_2(0, \infty)$ gilt. Dazu genügt es zu beweisen, daß sich für eine beliebige Funktion $\varphi \in L_2(0, \infty)$ und für eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u \in D(B)$ auffinden läßt derart, daß $\|\varphi - u\| < \varepsilon$ ist. Da das Integral

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)\,dx$$

endlich ist, existieren gewisse Zahlen $\delta > 0$ und $N > 0$, für die gilt

$$\int_0^\delta \varphi^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon^2}{8}, \qquad \int_N^\infty \varphi^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Wir führen nun folgende Funktion ein:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x \leqq \delta, \\ \varphi(x), & \delta < x < N, \\ 0, & x \geqq N. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\psi \in L_2(0, \infty)$; dabei gilt

$$\|\varphi - \psi\|^2 = \int_0^\infty (\varphi(x) - \psi(x))^2\,dx = \int_0^\delta \varphi^2(x)\,dx + \int_N^\infty \varphi^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

und somit $\|\varphi - \psi\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wir mitteln jetzt die Funktion ψ, wobei wir den Mittelungsradius $h < \frac{\delta}{2}$ wählen, und setzen danach $u(x) = \psi_h(x)$. Offensichtlich ist $\psi_h(x) \in D(B)$: Die Funktion $\psi_h(x)$ ist beliebig oft differenzierbar und verschwindet für $x = 0$ (sogar für beliebiges $x < \frac{\delta}{2}$); die Zahl a_u kann man schließlich gleich $N + \frac{\delta}{2}$

wählen. Weiterhin gilt

$$||u - \psi||^2 = \int_0^\infty \bigl(u(x) - \psi(x)\bigr)^2\, dx = \int_0^{N+\delta/2} (u(x) - \psi(x))^2\, dx =$$

$$= \int_0^{N+\delta/2} \bigl(\psi_h(x) - \psi(x)\bigr)^2\, dx\,.$$

Nach dem Satz 1.3.3 ist für hinreichend kleines h das letzte Integral kleiner als $\frac{\varepsilon^2}{4}$, und es gilt somit $||u - \psi|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nach der Dreiecksungleichung ergibt sich jetzt

$$||u - \varphi|| \leqq ||u - \psi|| + ||\psi - \varphi|| < \varepsilon\,,$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

Man beweist auch leicht, daß der Operator B symmetrisch ist: Es seien $u, v \in D(B)$, so daß also jede der Funktionen u und v die Bedingungen 1 bis 3 erfüllt.

Wir bilden das bilineare Funktional

$$(B\, u, v) = -\int_0^\infty v\, \frac{d^2u}{dx^2}\, dx = -\int_0^N v\, \frac{d^2u}{dx^2}\, dx\,.$$

Dabei sei N eine beliebige Zahl, die größer als a_u und auch größer als a_v ist; für $x = N$ sind beide Funktionen u und v sowie sämtliche ihrer Ableitungen gleich Null.

Partielle Integration ergibt dann

$$(B\, u, v) = \int_0^N u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^\infty u'(x)\, v'(x)\, dx\,. \tag{11}$$

Analog erhält man

$$(B\, v, u) = \int_0^\infty u'(x)\, v'(x)\, dx$$

und folglich

$$(B\, u, v) = (B\, v, u) = (u, B\, v)\,,$$

d. h., B ist ein symmetrischer Operator.

Wir beweisen jetzt, daß B ein positiver Operator ist. Auf Grund der Formel (11) gilt

$$(B\, u, u) = \int_0^\infty u'^2(x)\, dx \geqq 0\,.$$

Wenn also $(B\, u, u) = 0$ ist, dann gilt

$$\int_0^\infty u'^2(x)\, dx = 0\,,$$

und da der Integrand nicht negativ ist, so muß $u'(x) \equiv 0$ und folglich $u(x) \equiv \text{const}$ sein; wegen $u(0) = 0$ ist schließlich $u(x) \equiv 0$.

Der Operator B ist jedoch nicht positiv-definit. Um uns davon zu überzeugen, müssen wir beweisen, daß die untere Grenze des Quotienten $\frac{(Bu, u)}{||u||^2}$ gleich Null ist.

Wir betrachten die Funktionenfolge

$$u_n(x) = \begin{cases} x\,(n - x)^3\,, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq n\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad x > n\,. \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, gilt $u_n \in D(B)$. Wir berechnen jetzt die Norm von u_n. Es gilt

$$||u_n||^2 = \int_0^\infty u_n^2(x)\,dx = \int_0^n x^2\,(n - x)^6\,dx\,.$$

Wir substituieren $x = n\,t$:

$$||u_n||^2 = n^9 \int_0^1 t^2\,(1 - t)^6\,dt\,.$$

Das letzte Integral ist eine positive Konstante, die nicht von n abhängt; wir wollen sie mit c_1 bezeichnen. Dann ist $||u_n||^2 = c_1\,n^9$.

Weiterhin gilt

$$(B\,u_n, u_n) = \int_0^\infty u_n'^2(x)\,dx = \int_0^n (n - 4\,x)^2\,(n - x)^4\,dx\,.$$

Die Substitution $x = n\,t$ ergibt jetzt

$$(B\,u_n, u_n) = n^7 \int_0^1 (1 - t)^4\,(1 - 4\,t)^2\,dt = c_2\,n^7\,, \qquad c_2 = \text{const}\,.$$

Somit gilt

$$\frac{(Bu_n, u_n)}{||u_n||^2} = \frac{c_2}{c_1 n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und folglich

$$\inf \frac{(Bu, u)}{||u||^2} = 0\,.$$

§ 3. Der energetische Raum

1. Mit jedem positiv-definiten Operator läßt sich ein gewisser Hilbert-Raum, welchen wir den *energetischen Raum* des entsprechenden Operators nennen, verknüpfen.

H sei ein Hilbert-Raum und A ein positiv-definiter Operator in diesem Raum. Wir konstruieren jetzt einen neuen Hilbert-Raum, indem wir als Elemente dieses Raumes alle Elemente der Menge $D(A)$ erklären und für dieselben ein neues Skalarprodukt definieren:

$$[u, v]_A = (A\,u, v)\,, \qquad u, v \in D(A)\,. \tag{1}$$

Bekanntlich muß das Skalarprodukt in einem Hilbert-Raum folgenden drei Axiomen genügen:

A. Die Symmetrie[1]): Wenn (u, v) das Skalarprodukt der Elemente u und v bedeutet, so muß

$$(u, v) = (v, u)$$

sein.

B. Die Linearität: Wenn λ_1 und λ_2 Zahlen sind, dann gilt

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1(u_1, v) + \lambda_2(u_2, v) .$$

C. Die Positivität: Es gilt

$$(u, u) \geqq 0 ,$$

wobei $(u, u) = 0$ dann und nur dann ist, wenn $u = 0$ gilt (d. h. wenn u das Nullelement des Raumes ist).

Wir beweisen jetzt, daß der durch Gleichung (1) definierte Ausdruck $[u, v]_A$ den Axiomen A bis C genügt.

A. Die Symmetrie. Unter Benutzung der Symmetrie des Operators A sowie des Skalarproduktes im Ausgangsraum H ergibt sich

$$[u, v]_A = (A u, v) = (u, A v) = (A v, u) = [v, u]_A .$$

B. Die Linearität. Benutzen wir jetzt die Linearität des Operators A, so erhalten wir

$$\begin{aligned}[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v]_A &= (A (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) = \\ &= (\lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2, v) = \lambda_1(A u_1, v) + \lambda_2(A u_2, v) = \\ &= \lambda_1[u_1, v]_A + \lambda_2[u_2, v]_A .\end{aligned}$$

C. Die Positivität. Auf Grund der Ungleichung der positiven Definitheit (2.7) gilt $[u, u]_A \geqq \gamma^2||u||^2 \geqq 0$. Wenn $[u, u]_A = 0$, d. h. also $(A u, u) = 0$ ist, so ergibt sich aus derselben Ungleichung (2.7) $u = 0$. Offenbar gilt auch das Umgekehrte: Aus $u = 0$ folgt $(A u, u) = 0$ und $[u, u]_A = 0$.

Mithin genügt der Ausdruck (1) sämtlichen Axiomen eines Skalarproduktes. Indem wir $[u, v]_A$ als Skalarprodukt nehmen, verwandeln wir die Menge $D(A)$ in einen Hilbert-Raum. Wenn sich dieser als unvollständig erweist, so vervollständigen wir ihn auf übliche Weise. Den vervollständigten Raum nennen wir *energetischen* Raum und bezeichnen ihn mit H_A.

Das neue Skalarprodukt erzeugt eine neue Norm, welche wir durch das Symbol $|\ |_A$ kennzeichnen:

$$|u|_A = \sqrt{[u, u]_A} . \tag{2}$$

Wenn $u \in D(A)$ ist, dann gilt

$$|u|_A = \sqrt{(A u, u)} ,$$

und auf Grund der Ungleichung der positiven Definitheit ergibt sich

$$||u|| \leqq \frac{1}{\gamma} |u|_A . \tag{3}$$

Die Größen $[u, v]_A$ und $|u|_A$ nennen wir entsprechend *energetisches Produkt* der Elemente u und v bzw. *energetische Norm* des Elementes u.

---

[1]) Wir betrachten den reellen Hilbert-Raum. Für den komplexen Hilbert-Raum lautet das Symmetrie-Axiom: $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

In einigen Fällen, wo das zu keinem Mißverständnis führen kann, werden wir den Index A in den Bezeichnungen für das energetische Produkt und die energetische Norm weglassen und einfach $[u, v]$ bzw. $|u|$ schreiben.

Im energetischen Raum H_A unterscheiden wir zwischen „alten" Elementen — den Elementen der Menge $D(A)$ — und „neuen" oder „idealen" Elementen, welche durch die Vervollständigung hinzukommen. Aus einigen bekannten Sätzen der Funktionalanalysis ergibt sich nun folgendes:

Wenn u ein ideales Element des Raumes H_A ist, dann existiert eine Folge alter Elemente $\{u_n\}$, welche in der energetischen Norm gegen u konvergiert:

$$|u - u_n| \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Offenbar konvergiert dabei die Folge $\{u_n\}$ in sich in der energetischen Metrik. Die Menge der alten Elemente ist also dicht im energetischen Raum.

Satz 5.3.1. *Wenn der Operator A positiv-definit ist, dann kann man jedes Element seines energetischen Raumes mit einem gewissen Element des Ausgangsraumes identifizieren.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß sich zwischen den Elementen des energetischen Raumes H_A und gewissen Elementen des Ausgangsraumes H eine lineare isomorphe Beziehung herstellen läßt. Dies bedeutet folgendes: 1. Jedem Element $u \in H_A$ wird ein und nur ein Element $u' \in H$ zugeordnet; 2. wenn den Elementen $u, v \in H_A$ die Elemente $u', v' \in H$ entsprechen, dann entspricht der Linearkombination $\lambda u + \mu v \in H_A$ das Element $\lambda u' + \mu v' \in H$; 3. verschiedenen Elementen des Raumes H_A entsprechen verschiedene Elemente des Raumes H.

Für ein beliebiges Element u des energetischen Raumes läßt sich eine Folge $\{u_n\}$ alter Elemente konstruieren derart, daß gilt

$$|u_n - u| \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Für ein ideales Element wurde nämlich eine solche Möglichkeit bereits oben festgestellt; ist dagegen u ein altes Element, so genügt es, $u_n = u$ zu setzen. Offensichtlich ist $u_n - u_m \in D(A)$, und es gilt

$$|u_n - u_m| \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty\,. \tag{4}$$

Wegen der Beziehung (3) zwischen der alten und der neuen Norm ist

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\gamma}|u_n - u_m|\,,$$

und die Folge $\{u_n\}$ konvergiert in sich im Sinne der alten Norm. Auf Grund der Vollständigkeit des Raumes H existiert dann ein Element $u' \in H$ derart, daß gilt

$$\|u' - u_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Dieses Element u' ordnen wir nun dem Element $u \in H_A$ zu.

Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit des Elementes u'. Nehmen wir an, wir würden an Stelle der Folge $\{u_n\} \subset D(A)$ eine andere Folge $\{v_n\} \subset D(A)$ wählen, für die ebenfalls $|u - v_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ konvergiert. Durch Wiederholung

der vorangegangenen Überlegungen gelangen wir zur Existenz eines Elementes $v' \in H$, für das gilt

$$||v' - v_n|| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Wir zeigen, daß $u' = v'$ ist. Auf Grund der Dreiecksungleichung gilt

$$\left| u_n - v_n \right| = \left| (u_n - u) - (v_n - u) \right| \leqq \left| u_n - u \right| + \left| v_n - u \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Wegen $(u_n - v_n) \in D(A)$ ist

$$||u_n - v_n|| \leqq \frac{1}{\gamma} \left| u_n - v_n \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Durch Grenzübergang für $n \to \infty$ erhalten wir $||u' - v'|| = 0$, was zu beweisen war.

Den Elementen $u_1, u_2 \in H_A$ mögen jetzt die Elementfolgen $\{u_{1n}\}$ und $\{u_{2n}\}$ aus $D(A)$ mit

$$\left| u_1 - u_{1n} \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0 , \quad \left| u_2 - u_{2n} \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

entsprechen. Ferner mögen den Elementen u_1 und u_2 die Elemente u_1' und u_2' des Raumes H zugeordnet sein. Für die Elemente u_1' und u_2' gilt dabei $||u_1' - u_{1n}|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ und $||u_2' - u_{2n}|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Infolge der Dreiecksungleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\left| (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) - (\lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n}) \right| &= \left| \lambda_1 (u_1 - u_{1n}) + \lambda_2 (u_2 - u_{2n}) \right| \leqq \\ &\leqq |\lambda_1| \left| u_1 - u_{1n} \right| + |\lambda_2| \left| u_2 - u_{2n} \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0 , \\ ||(\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2') - (\lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n})|| &= ||\lambda_1 (u_1' - u_{1n}) + \lambda_2 (u_2' - u_{2n})|| \leqq \\ &\leqq |\lambda_1| \, ||u_1' - u_{1n}|| + |\lambda_2| \, ||u_2' - u_{2n}|| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .\end{aligned}$$

Die beiden letzten Beziehungen bedeuten nun gerade, daß dem Element $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in H_A$ das Element $\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' \in H$ entspricht. Die Linearität der Zuordnung ist damit bewiesen.

Wir beweisen jetzt, daß verschiedenen Elementen $u_1, u_2 \in H_A$ auch verschiedene Elemente $u_1', u_2' \in H$ entsprechen.

Wir nehmen das Gegenteil an: Es sei $u_1' = u_2'$. Wir zeigen, daß dann $u_1 = u_2$ gelten muß. Zu diesem Zweck betrachten wir die Differenz $u_1 - u_2 = v$. Offensichtlich ist $v \in H_A$, und da die Zuordnung linear ist, so entspricht dem Element v das Nullelement des Raumes H. Mithin existiert eine Folge $v_n \in D(A)$ derart, daß gilt

$$||v_n - 0|| = ||v_n|| \underset{n\to\infty}{\to} 0 , \quad \left| v - v_n \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Es sei η ein beliebiges Element der Menge $D(A)$. Auf Grund der Stetigkeit des Skalarproduktes gilt

$$[v_n, \eta] \underset{n\to\infty}{\to} [v, \eta] .$$

Andererseits ist

$$[v_n, \eta] = (v_n, A\,\eta) .$$

Wegen $v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ konvergiert $(v_n, A\,\eta) \underset{n\to\infty}{\to} (0, A\,\eta) = 0$, und folglich ist $[v, \eta] = 0$. Die letzte Gleichung bedeutet, daß das Element v in der Metrik des Raumes H_A orthogonal zu der in H_A dichten Menge $D(A)$ ist. Dann ist aber v das Nullelement des energetischen Raumes, d. h. $u_1 = u_2$, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Die Mengen $D(A)$, H_A und H sind durch folgende Beziehungen verknüpft:

$$D(A) \subset H_A \subset H\,. \tag{5}$$

Die Inklusion $D(A) \subset H_A$ ergibt sich daraus, daß H_A durch Vervollständigung der Menge $D(A)$ gewonnen wurde; die Inklusion $H_A \subset H$ folgt aus dem Satz 5.3.1.

Da die Menge $D(A)$ in H dicht ist, so bilden die Elemente des energetischen Raumes eines positiv-definiten Operators, wie aus der Beziehung (5) ersichtlich ist, eine im Ausgangsraum dichte Menge.

Wir gelangten oben zu der Ungleichung (3), welche die Korrelation der beiden Normen eines Elementes der Menge $D(A)$ herstellt:

$$||u|| \leqq \frac{1}{\gamma}\,|u|\,, \qquad u \in D(A)\,.$$

Wir beweisen jetzt, daß diese Ungleichung für ein beliebiges Element des energetischen Raumes ihre Gültigkeit behält. Sei $u \in H_A$. Dann existiert eine Folge von Elementen $u_n \in D(A)$ derart, daß gilt

$$|u_n - u| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,, \qquad ||u_n - u|| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Für die Elemente u_n gilt die Ungleichung (3):

$$||u_n|| \leqq \frac{1}{\gamma}\,|u_n|\,.$$

Durch Grenzübergang für $n \to \infty$ und Berücksichtigung der Stetigkeit der Norm erhalten wir

$$||u|| \leqq \frac{1}{\gamma}\,|u|\,, \qquad u \in H_A\,,$$

was zu beweisen war.

Mit Hilfe der Gleichung (1) führten wir das energetische Produkt

$$[u, v] = (A\,u, v)\,, \qquad u, v \in D(A)$$

ein. Wir beweisen jetzt die Gültigkeit dieser Gleichung für den allgemeineren Fall $u \in D(A)$, $v \in H_A$.

Wenn $v \in H_A$ ist, so existiert eine Folge $\{v_n\}$ mit

$$v_n \in D(A)\,, \qquad |v_n - v| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,, \qquad ||v_n - v|| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Für die Elemente u und v_n gilt Gleichung (1):

$$[u, v_n] = (A\,u, v_n)\,.$$

Wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes ergibt sich

$$[u, v_n] \underset{n\to\infty}{\to} [u, v]\,, \qquad (A\,u, v_n) \underset{n\to\infty}{\to} (A\,u, v)\,.$$

Durch Vergleich der rechten Seiten erhalten wir nun

$$[u, v] = (A u, v), \qquad u \in D(A), \qquad v \in H_A. \tag{6}$$

Satz 5.3.2. *Es sei A ein positiv-definiter Operator im* HILBERT-*Raum H. Dafür, daß das Element $u \in H$ dem energetischen Raum H_A angehört, ist notwendig und hinreichend, daß eine Folge $u_n \in D(A)$ existiert, für die gilt*

$$|u_n - u_m|_A \underset{n,\, m \to \infty}{\to} 0, \qquad ||u_n - u|| \underset{n \to \infty}{\to} 0. \tag{*}$$

Beweis. Notwendigkeit. Sei $u \in H_A$. Da die Menge $D(A)$ im Raum H_A dicht ist, existiert eine Folge $u_n \in D(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, mit $|u_n - u|_A \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Als konvergente Folge ist sie in sich konvergent, und wir erhalten die erste der Beziehungen (*). Die zweite Beziehung ergibt sich aus der Ungleichung (3):

$$||u_n - u|| \leqq \frac{1}{\gamma} |u_n - u|_A \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Hinlänglichkeit. Es sei jetzt die Bedingung (*) erfüllt. Da der Raum H_A vollständig ist, existiert ein Element $\tilde{u} \in H_A$, für das $|u_n - \tilde{u}|_A \underset{n \to \infty}{\to} 0$ gilt. Dann folgt aber aus der isomorphen Zuordnung, die beim Beweis des Satzes 5.3.1 hergestellt wurde, daß $u = \tilde{u}$ und somit $u \in H_A$ ist.

2. Als Beispiel wollen wir den energetischen Raum des Operators aus § 2 auffinden. Zunächst erinnern wir daran, daß in diesem Fall $H = L_2(0, 1)$ ist; der Operator A wird durch die Formel

$$A u = -\frac{d^2u}{dx^2}$$

definiert, und die Funktionen u aus $D(A)$ genügen den Bedingungen

$$u \in C^{(2)}[0, 1], \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Wir beweisen, daß im vorliegenden Fall der Raum H_A aus den und nur den Funktionen besteht, die folgende Eigenschaften besitzen: 1. Sie sind absolut stetig auf dem Segment $[0, 1]$; 2. ihre ersten Ableitungen sind auf diesem Segment quadratisch summierbar; 3. diese Funktionen verschwinden in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$.

Wie wir im § 2 gesehen haben, ist

$$[u, v]_A = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx, \qquad u, v \in D(A).$$

Setzen wir hier $v = u$, so erhalten wir die Formel für die Norm:

$$|u|_A^2 = \int_0^1 u'^2(x)\, dx, \qquad u \in D(A). \tag{7}$$

2.1. Es sei u ein beliebiges Element des Raumes H_A. Nach dem Satz 5.3.1 ist $u \in L_2(0, 1)$, und es existiert eine Folge $\{u_n\} \subset D(A)$ derart, daß gilt

$$|u_n - u| \underset{n \to \infty}{\to} 0, \qquad ||u_n - u|| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Diese Folge konvergiert also gegen das Element u und ist somit erst recht in sich konvergent, d. h.

$$|u_n - u_m| \underset{m,\, n \to \infty}{\to} 0 .$$

Da aber $u_n - u_m \in D(A)$ ist und da für diese Differenz die Formel (7) gilt, konvergiert

$$\int_0^1 (u_n'(x) - u_m'(x))^2 \, dx \underset{m,\, n \to \infty}{\to} 0 .$$

Die letzte Beziehung, der man auch noch die Gestalt

$$||u_n' - u_m'||^2 \underset{m,\, n \to \infty}{\to} 0$$

geben kann, zeigt, daß die Folge der Ableitungen $\{u_n'\}$ in der Metrik des Raumes $L_2(0, 1)$ in sich konvergiert. Da der Raum $L_2(0, 1)$ vollständig ist, existiert eine Funktion $w \in L_2(0, 1)$ derart, daß gilt

$$||u_n' - w|| \underset{n \to \infty}{\to} 0 .$$

Die Beziehungen

$$||u_n - u|| \underset{n \to \infty}{\to} 0 , \qquad ||u_n' - w|| \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

lassen zusammen mit dem Satz 2.3.1 den Schluß zu, daß die Funktion $u(x)$ eine verallgemeinerte erste Ableitung $u'(x) = w(x)$ besitzt; als Element des Raumes $L_2(0, 1)$ ist diese Ableitung auf dem Segment $[0, 1]$ quadratisch summierbar. Aus dem Satz 2.4.1 folgt nun, daß die Funktion $u(x)$ auf demselben Segment absolut stetig ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $u(0) = u(1) = 0$ ist. Die Funktionen $u_n(x)$ gehören zur Menge $D(A)$ und genügen deshalb den analogen Beziehungen

$$u_n(0) = u_n(1) = 0 .$$

Aus der Newton-Leibnizschen Formel ergibt sich

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t) \, dt = \int_0^x u_n'(t) \, dt . \tag{8}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert $u_n(x) \to u(x)$ in der Metrik des Raumes $L_2(0, 1)$. Wir beweisen, daß gleichzeitig

$$\int_0^x u_n'(t) \, dt \underset{n \to \infty}{\to} \int_0^x w(t) \, dt$$

gleichmäßig auf dem Segment $[0, 1]$ gilt. Nach der Cauchy-Bunjakowskischen Ungleichung gilt nämlich

$$\left[\int_0^x u_n'(t) \, dt - \int_0^x w(t) \, dt\right]^2 = \left[\int_0^x [u_n'(t) - w(t)] \, dt\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \int_0^x 1^2 \, dt \int_0^x [u_n'(t) - w(t)]^2 \, dt = x \int_0^x [u_n'(t) - w(t)]^2 \, dt$$

$$\leqq \int_0^1 [u_n'(t) - w(t)]^2 \, dt = ||u_n' - w||^2 \underset{n \to \infty}{\to} 0 .$$

Durch Grenzübergang in der Beziehung (8) erhalten wir dann

$$u(x) = \int_0^x w(t)\, dt\,.$$

Daraus folgt $u(0) = 0$. Schreiben wir dagegen die NEWTON-LEIBNIZsche Formel in der Form

$$u_n(x) = u_n(1) - \int_x^1 u_n'(t)\, dt = -\int_x^1 u_n'(t)\, dt\,,$$

so finden wir auf demselben Weg $u(1) = 0$.

2.2. Die Funktion $u(x)$ erfülle jetzt die oben formulierten Bedingungen: Sie ist absolut stetig auf dem Segment $[0, 1]$, besitzt fast überall eine Ableitung $u' \in L_2(0, 1)$, und schließlich ist $u(0) = u(1) = 0$. Wir beweisen, daß $u \in H_A$ ist.

Auf Grund des Satzes 5.3.2 genügt es, die Existenz einer Folge $\{u_n\}$ von Funktionen aus $D(A)$ nachzuweisen, für die gilt

$$|u_n - u_m| \underset{n,\, m \to \infty}{\to} 0 \quad \text{und} \quad \|u_n - u\| \underset{n \to \infty}{\to} 0\,.$$

Die Funktion $u(x)$ besitzt eine Ableitung aus $L_2(0, 1)$. Wir entwickeln diese in eine FOURIER-Reihe nach Kosinus-Funktionen:

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\pi x\,.$$

In Wirklichkeit tritt in dieser Reihe das Glied mit dem Index $k = 0$ gar nicht auf, da

$$a_0 = \int_0^1 u'(x)\, dx = u(1) - u(0) = 0$$

ist. Es gilt somit

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x\,.$$

Die letzte Gleichung integrieren wir in Grenzen von 0 bis x; da die Reihe im Mittel konvergiert, so läßt sie sich gliedweise integrieren. Unter Berücksichtigung von $u(0) = 0$ erhalten wir

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$$

mit

$$b_k = \frac{a_k}{k\pi}\,.$$

Wir konstruieren jetzt die Funktionenfolge

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\pi x\,.$$

Offensichtlich ist $u_n \in D(A)$. Infolge der Konvergenz der FOURIER-Reihe gilt

$$\|u_n - u\| \underset{n \to \infty}{\to} 0\,.$$

Zu beweisen ist: $|u_n - u_m| \underset{n, m \to \infty}{\to} 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $n > m$ annehmen. Dann ist

$$u_n(x) - u_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} b_k \sin k \pi x .$$

Für das Quadrat der Norm dieser Differenz $u_n - u_m$ ergibt sich

$$|u_n - u_m|^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k \cos k \pi x \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{n} a_k^2 \underset{n, m \to \infty}{\to} 0 .$$

Damit ist gleichzeitig bewiesen, daß $u \in H_A$ ist.

§ 4. Das Minimumproblem des quadratischen Funktionals

Es sei A ein positiv-definiter Operator im Hilbert-Raum H und f ein vorgegebenes Element dieses Raumes. Das Definitionsgebiet des quadratischen Funktionals

$$F(u) = (A u, u) - 2(u, f) \tag{1}$$

fällt offenbar mit dem Definitionsgebiet des Operators A zusammen, d. h., es ist $D(F) = D(A)$. Das Funktional (1) wollen wir *Energiefunktional* des Operators A nennen.

Wir betrachten das Minimumproblem für das Energiefunktional auf der Menge $D(A)$ und beweisen dabei folgenden Satz.

Satz 5.4.1. *Dafür, daß ein gewisses Element $u_0 \in D(A)$ dem Energiefunktional seinen kleinsten Wert erteilt, ist notwendig und hinreichend, daß dieses Element der Gleichung*

$$A u_0 = f \tag{2}$$

genügt. Ein solches Element ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Notwendigkeit. Wenn das Element u_0 das Minimum des Funktionals F realisiert, dann ist $(\operatorname{grad} F)(u_0) = 0$. Wir bestimmen jetzt grad F.

Nach Definition der Variation gilt

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha} F(u + \alpha \eta)\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \frac{d}{d\alpha} [(A(u + \alpha \eta), u + \alpha \eta) - 2(u + \alpha \eta, f)]_{\alpha=0} .$$

Durch Auflösen der Klammern und Benutzung der Symmetrie des Operators A erhalten wir

$$F(u + \alpha \eta) = F(u) + 2\alpha (A u - f, \eta) + \alpha^2 (A \eta, \eta) . \tag{3}$$

Daraus folgt

$$\delta F(u, \eta) = 2(A u - f, \eta) . \tag{4}$$

Die rechte Seite der Gleichung (4) ist das Skalarprodukt des festen Elementes $A u - f$ und des beliebigen Elementes $\eta \in D(F)$. Ein solches Skalarprodukt

ist ein im Raum H beschränktes Funktional. Somit ergibt sich

$$D(\text{grad } F) = D(F) = D(A)$$

und

$$(\text{grad } F)(u) = 2(A u - f). \tag{5}$$

Die EULERsche Gleichung $(\text{grad } F)(u_0) = 0$ fällt also mit der Gleichung (2) zusammen, was zu beweisen war.

Hinlänglichkeit. Es sei jetzt u_0 Lösung der Gleichung (2). Wenn u ein beliebiges von u_0 verschiedenes Element aus $D(A)$ ist, so kann man $u = u_0 + \eta$, $\eta \neq 0$, setzen. In Gleichung (3) ersetzen wir u durch u_0 und wählen $\alpha = 1$. Unter Berücksichtigung der Gleichung (2) erhalten wir dann

$$F(u) = F(u_0) + (A \eta, \eta).$$

Da nun A ein positiv-definiter Operator und $\eta \neq 0$ ist, so gilt $(A \eta, \eta) > 0$ und folglich $F(u) > F(u_0)$. Die letzte Beziehung zeigt, daß das Funktional F im Punkt u_0 sein Minimum annimmt.

Es bleibt nur noch die Eindeutigkeit des Elementes u_0 zu beweisen. Wir nehmen an, daß das Minimum des Funktionals F noch in einem anderen Element u_1 angenommen wird. Nach der soeben bewiesenen Ungleichung ist dann $F(u_1) > F(u_0)$. Genauso läßt sich aber auch zeigen, daß $F(u_0) > F(u_1)$ ist. Der erhaltene Widerspruch beweist, daß das Minimum des Funktionals (1) nur in einem Punkt angenommen werden kann.

Wir bemerken, daß wir damit die Äquivalenz folgender Probleme nachgewiesen haben: Das Lösen der Gleichung $A u = f$ und das Aufsuchen des Minimums des Energiefunktionals

$$F(u) = (A u, u) - 2(u, f).$$

Ist eines dieser Probleme lösbar, so ist es auch das andere, und die Lösung eines dieser Probleme ist Lösung auch des anderen Problems. Die Existenz der Lösung dieser Probleme wurde allerdings durch den Satz 5.4.1 nicht bewiesen. Wie das folgende Beispiel zeigt, braucht eine Lösung auch gar nicht zu existieren.

Es sei $H = L_2(0, 1)$, und in Gleichung (2) bedeute A den im § 2 betrachteten Operator

$$A u = -\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{6}$$

wobei $D(A)$ aus denjenigen Funktionen $u \in C^{(2)}[0, 1]$ besteht, die den Bedingungen

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{7}$$

genügen.

Die Gleichung

$$A u = f$$

zu lösen, bedeutet in unserem Beispiel folgendes: $f(x)$ ist eine quadratisch summierbare Funktion; gesucht ist eine Funktion $u(x)$, die den Bedingungen (7) genügt und eine stetige zweite Ableitung besitzt, welche sich nur durch das Vor-

zeichen von $f(x)$ unterscheidet. Das ist aber offenbar nicht erfüllbar, wenn die Funktion $f(x)$ unstetig ist.

Dasselbe Beispiel zeigt auch, daß das Problem lösbar werden kann, wenn man auf vernünftige Weise das Definitionsgebiet des Operators erweitert: Im Beispiel genügt es, in die Menge $D(A)$ alle Funktionen mit absolut stetigen ersten und quadratisch summierbaren zweiten Ableitungen aufzunehmen; die Bedingungen (7) sind natürlich beizubehalten.

Wenn $f \in L_2(0, 1)$ ist, dann besitzt jetzt die Gleichung $A\,u = f$ eine Lösung. Diese Gleichung bedeutet nämlich, daß $u(x)$ den Bedingungen (7) sowie der Differentialgleichung

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$

genügt. Eine solche Funktion existiert, und sie ist gleich

$$u(x) = x\int_x^1 (1 - t)\,f(t)\,dt + (1 - x)\int_0^x t\,f(t)\,dt\,.$$

Man prüft leicht nach, daß diese Funktion in das erweiterte Definitionsgebiet unseres Operators eingeht.

Einfacher und bequemer ist es allerdings, nicht das Definitionsgebiet des Operators A, sondern das Definitionsgebiet des entsprechenden Energiefunktionals zu erweitern. Damit werden wir uns im folgenden Paragraphen beschäftigen.

§ 5. Die verallgemeinerte Lösung

Es sei A nach wie vor ein positiv-definiter Operator im HILBERT-Raum H, f ein gegebenes Element dieses Raumes und F das entsprechende Energiefunktional

$$F(u) = (A\,u, u) - 2(u, f)\,. \tag{1}$$

Die Formel (1) erklärt das Funktional F auf der Menge $D(A)$; man kann dieses Funktional aber leicht auf den gesamten energetischen Raum H_A erweitern. Dazu genügt es zu bemerken, daß $(A\,u, u) = |u|_A^2$ und folglich

$$F(u) = |u|_A^2 - 2(u, f) \tag{2}$$

ist.

In Formel (2) ist der erste Summand auf der rechten Seite für alle Elemente $u \in H_A$ erklärt. Der zweite Summand ist definiert, wenn $u \in H$, also erst recht, wenn $u \in H_A$ ist. Jetzt sieht man, daß sich mit Hilfe der Formel (2) das Funktional F auf dem ganzen energetischen Raum H_A definieren läßt.

Wenden wir uns jetzt wieder unserem Beispiel

$$A\,u = -\frac{d^2u}{dx^2}\,, \qquad u \in C^{(2)}\,[0, 1]\,, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

zu, so sehen wir, daß sich das Funktional F sowohl in der Form

$$F(u) = -\int_0^1 u \frac{d^2u}{dx^2}\, dx - 2\int_0^1 f\, u\, dx$$

als auch in der Form

$$F(u) = \int_0^1 u'^2\, dx - 2\int_0^1 f\, u\, dx$$

angeben läßt. Dabei ist die zweite Schreibweise des Funktionals für alle Elemente $u \in H_A$ verwendbar; sie erlaubt es auch, das Energiefunktional auf den gesamten energetischen Raum zu erweitern.

Jetzt wollen wir das Minimum des Funktionals F nicht in $D(A)$, sondern in H_A suchen. Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 5.5.1. *Im energetischen Raum existiert ein und nur ein Element, in dem das Energiefunktional sein Minimum annimmt.*

Der Beweis stützt sich auf folgenden Satz von RIESZ, der aus der Funktionalanalysis wohl bekannt ist.

Es sei l ein lineares beschränktes Funktional in einem gewissen HILBERT-Raum $\mathfrak{H}$, das auf dem gesamten Raum definiert sei. Dann existiert ein und nur ein Element $u_0 \in \mathfrak{H}$, für das

$$l\, u = (u, u_0)_{\mathfrak{H}} \tag{3}$$

ist. Das Symbol $(.\,,.)_{\mathfrak{H}}$ bedeutet hierbei das Skalarprodukt in $\mathfrak{H}$.

Nach der CAUCHYschen Ungleichung gilt

$$|(u, f)| \leqq \|u\|\, \|f\|\,,$$

und auf Grund der Beziehung zwischen der alten und der neuen Norm [siehe Ungleichung (3.3)] ist

$$\|u\| \leqq \frac{1}{\gamma} |u|\,.$$

Daraus ergibt sich

$$|(u, f)| \leqq c\, |u|\,, \qquad c = \frac{\|f\|}{\gamma}\,, \tag{4}$$

d. h., das Funktional (u, f) ist im Raum H_A beschränkt. Nach dem Satz von RIESZ existiert ein und nur ein Element $u_0 \in H_A$, für das gilt

$$(u, f) = [u, u_0]\,, \qquad u \in H_A\,. \tag{5}$$

Mit Hilfe der Formel (5) können wir den Ausdruck für das Funktional F wie folgt umformen:

$$F(u) = |u|^2 - 2[u, u_0] = [u, u] - 2[u, u_0] + [u_0, u_0] - [u_0, u_0] = \\ = [u - u_0, u - u_0] - [u_0, u_0]$$

oder, noch einfacher,

$$F(u) = |u - u_0|^2 - |u_0|^2\,, \qquad u \in H_A\,. \tag{6}$$

Aus Formel (6) wird jetzt offensichtlich, daß das Minimum des Funktionals F im Raum H_A in dem Element $u = u_0$ und nur in diesem Element angenommen wird. Dabei gilt offenbar

$$\min F(u) = -|u_0|^2 . \tag{7}$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Das Element $u_0 \in H_A$, das das Minimum des Funktionals (2) realisiert, nennen wir *verallgemeinerte Lösung* der Gleichung

$$A\,u = f . \tag{8}$$

Dabei kann der Fall eintreten, daß $u_0 \in D(A)$ ist; dann ist auf Grund des Satzes 5.4.1 u_0 eine gewöhnliche Lösung der Gleichung (8).

Wenn der energetische Raum separabel ist, dann läßt sich ein einfaches Verfahren angeben, nach dem man die verallgemeinerte Lösung der Gleichung (8) konstruieren kann. In einem separablen HILBERT-Raum existiert nämlich ein vollständiges abzählbares orthonormiertes System $\{\omega_n\}$:

$$[\omega_j, \omega_k] = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \qquad j, k = 1, 2, \ldots .$$

Sei u_0 die verallgemeinerte Lösung der Gleichung (8). Wir entwickeln diese in eine FOURIER-Reihe nach dem System $\{\omega_k\}$:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} [u_0, \omega_k]\, \omega_k . \tag{9}$$

Diese Reihe konvergiert in der energetischen Norm: Setzen wir

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} [u_0, \omega_k]\, \omega_k ,$$

dann gilt $|u_0 - \varphi_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Die FOURIER-Koeffizienten $[u_0, \omega_k]$ lassen sich leicht nach der Formel (5) berechnen: Setzen wir darin $u = \omega_k$, dann ergibt sich

$$[u_0, \omega_k] = (f, \omega_k) . \tag{10}$$

Daraus folgt

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \omega_k)\, \omega_k . \tag{11}$$

Wie bereits bemerkt wurde, konvergiert die Reihe (11) in der Norm des energetischen Raumes H_A. Man sieht aber leicht, daß diese Reihe auch in der Norm des Ausgangsraumes H konvergiert. Bezeichnen wir nämlich wieder mit φ_n die Partialsumme der Reihe (11), dann ergibt sich auf Grund der Ungleichung (3.3)

$$\|u_0 - \varphi_n\| \leqq \frac{1}{\gamma} |u_0 - \varphi_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Im Zusammenhang mit dem Satz 5.5.1 entsteht die Frage nach den Bedingungen für die Separabilität des energetischen Raumes. Diese Frage wird im folgenden Paragraphen beantwortet.

§ 6. Über die Separabilität des energetischen Raumes

Wie bereits oben bezeichnen wir mit A einen positiv-definiten Operator in einem gewissen HILBERT-Raum.

Hilfssatz 5.6.1. *Wenn die Folge $\{f_n\}$ im Ausgangsraum H vollständig ist und wenn φ_n die verallgemeinerte Lösung der Gleichung $A\,\varphi_n = f_n$ bedeutet, dann ist die Folge $\{\varphi_n\}$ vollständig im energetischen Raum H_A.*

Beweis. Sei $u \in D(A)$. Setzen wir $A\,u = v$, dann ist $v \in H$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k = s_N\,, \qquad \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k = \sigma_N\,. \tag{1}$$

Jetzt schätzen wir das Quadrat der Norm der Differenz $u - \sigma_N$ ab:

$$|u - \sigma_N|^2 = [u - \sigma_N, u - \sigma_N]\,.$$

Setzen wir $u - \sigma_N = \eta$, dann gilt

$$[u - \sigma_N, u - \sigma_N] = [u - \sigma_N, \eta] = [u, \eta] - [\sigma_N, \eta]\,.$$

Wegen $u \in D(A)$, $\eta \in H_A$ ist

$$[u, \eta] = (A\,u, \eta) = (v, \eta)\,.$$

Des weiteren gilt

$$[\sigma_N, \eta] = \sum_{k=1}^{N} a_k[\varphi_k, \eta]\,.$$

Da auf Grund der Formel (5.10)

$$[\varphi_k, \eta] = (f_k, \eta)$$

ist, so ergibt sich schließlich

$$[\sigma_N, \eta] = \sum_{k=1}^{N} a_k(f_k, \eta) = (s_N, \eta)$$

und

$$|u - \sigma_N|^2 = (v - s_N, \eta)\,. \tag{2}$$

Da das System $\{f_n\}$ im Raum H vollständig ist, lassen sich die natürliche Zahl N und die Koeffizienten a_k derart wählen, daß die Ungleichung

$$||v - s_N|| < \varepsilon$$

gilt, wobei ε eine beliebig vorgegebene positive Zahl bedeutet. Jetzt erhalten wir aus der Formel (2)

$$|u - \sigma_N|^2 = (v - s_N, \eta) \leq ||v - s_N||\;||\eta|| < \frac{\varepsilon}{\gamma}|\eta| = \frac{\varepsilon}{\gamma}|u - \sigma_N|\,.$$

Wenn $|u - \sigma_N| \neq 0$ ist, dann folgt daraus die Ungleichung

$$|u - \sigma_N| < \frac{\varepsilon}{\gamma}\,; \tag{3}$$

diese Ungleichung gilt offenbar auch dann, wenn $|u - \sigma_N| = 0$ ist. Somit ergibt sich: Wenn $u \in D(A)$ ist, dann kann man dieses Element durch Linearkombinationen von Elementen des Systems $\{\varphi_n\}$ beliebig genau approximieren.

Sei jetzt $u \in H_A$. Da die Menge $D(A)$ in H_A dicht ist, so existiert ein Element $u' \in D(A)$ derart, daß gilt

$$|u - u'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits existieren, wie soeben bewiesen wurde, gewisse Zahlen N und $a_1, a_2, \ldots, a_N$, für die

$$\left|u' - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Dann gilt aber auf Grund der Dreiecksungleichung

$$\left|u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k\right| < \varepsilon,$$

und der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Satz 5.6.1. *Für die Separabilität des energetischen Raumes eines positiv-definiten Operators ist notwendig und hinreichend, daß der Ausgangsraum separabel ist.*

Beweis. Notwendigkeit. Es sei A ein positiv-definiter Operator im Hilbert-Raum H, dessen energetischer Raum H_A separabel ist. Dann existiert in ihm eine abzählbare dichte Menge $\{\psi_n\}$. Wir beweisen jetzt, daß diese Menge auch im Ausgangsraum H dicht ist. Sei u ein gewisses Element des Raumes H. Da die Menge der Elemente des energetischen Raumes im Ausgangsraum dicht ist, so läßt sich für eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ ein Element $u' \in H_A$ auffinden derart, daß $\|u - u'\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Des weiteren existiert ein Element ψ_ν, für das

$$|u' - \psi_\nu| < \frac{\varepsilon \gamma}{2}$$

ist. Dabei bedeutet γ die Konstante der positiven Definitheit des Operators, die in die Ungleichung (2.7) eingeht. Auf Grund der Beziehung zwischen der alten und der neuen Norm [siehe Ungleichung (3.3)] gilt

$$\|u' - \psi_\nu\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

und aus der Dreiecksungleichung ergibt sich nun

$$\|u - \psi_\nu\| \leqq \|u - u'\| + \|u' - \psi_\nu\| < \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung bedeutet, daß der Raum H die abzählbare dichte Menge $\{\psi_n\}$ enthält und folglich separabel ist.

Hinlänglichkeit. Der Raum H sei separabel, und die abzählbare Folge $\{f_n\}$ sei in H vollständig. Wir konstruieren die Elemente $\varphi_n \in H_A$, welche verallgemeinerte Lösungen der Gleichungen $A \varphi_n = f_n$ sind. Nach dem Hilfs-

satz 5.6.1 ist die Folge $\{\varphi_n\}$ vollständig im Raum H_A. Wir bilden jetzt die Elemente der Gestalt

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k , \tag{4}$$

wobei die α_k rationale Zahlen sind. Die Menge dieser Elemente ist abzählbar; wir beweisen, daß sie dicht in H_A ist.

Wenn eine Zahl $\varepsilon > 0$ und ein gewisses Element $u \in H_A$ vorgegeben sind, dann lassen sich eine natürliche Zahl $N > 0$ und reelle Zahlen a_k finden derart, daß

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Wir wählen jetzt die rationalen Zahlen α_k aus einer derart kleinen Umgebung der entsprechenden Punkte a_k, daß gilt

$$\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k - a_k| \, |\varphi_k| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Nach der Dreiecksungleichung erhalten wir dann

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right| < \varepsilon .$$

Die Menge der Elemente (4) ist also dicht im Raum H_A, woraus folgt, daß dieser Raum separabel ist.

§ 7. Die Erweiterung eines positiv-definiten Operators

Es sei A ein positiv-definiter Operator im HILBERT-Raum H. Die Formel (5.5) ordnet jedem Element $f \in H$ ein und nur ein Element $u_0 \in H_A$ zu, welches das Minimum des Energiefunktionals $F(u)$ realisiert. Damit definiert diese Formel einen gewissen linearen Operator G im Raum H:

$$u_0 = G f . \tag{1}$$

Das Definitionsgebiet dieses Operators ist $D(G) = H$, der Wertebereich $R(G)$ hingegen ist eine Teilmenge der Menge derjenigen Elemente, welche den energetischen Raum H_A bilden: $R(G) \subset H_A$.

Hilfssatz 5.7.1. *Der Operator G ist symmetrisch und beschränkt.*

Beweis. Wir schreiben Formel (5.5) in der Form

$$(u, f) = [u, G f] , \qquad u \in H_A . \tag{2}$$

Jetzt nehmen wir ein beliebiges Element $h \in H$ und setzen $u = G h$. Dann ist $u \in H_A$, und die Formel (2) ergibt

$$(G h, f) = [G h, G f] = [G f, G h] .$$

Nach derselben Formel (2) gilt auch

$$[G f, G h] = (G f, h) = (h, G f) .$$

Daraus folgt

$$(G\,h, f) = (h, G\,f)\,, \tag{3}$$

d. h., der Operator G ist symmetrisch. Setzen wir nun in der Formel (2) $u = G\,f$, so erhalten wir

$$|G\,f|_A^2 = (G\,f, f)\,.$$

Durch Anwendung der CAUCHYschen Ungleichung auf die rechte Seite und durch Abschätzung der linken Seite durch die kleinere Größe $\gamma^2\,||G\,f||^2$ ergibt sich

$$\gamma^2\,||G\,f||^2 \leqq ||G\,f||\;||f||$$

und somit

$$||G\,f|| \leqq \frac{1}{\gamma^2}\,||f||\,.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt die Beschränktheit des Operators G; dabei gilt

$$||G|| \leqq \frac{1}{\gamma^2}\,. \tag{4}$$

Hilfssatz 5.7.2. *Es existiert der zu G inverse Operator.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Gleichung $G\,f = 0$ als einzige Lösung $f = 0$ besitzt. Sei nun $G\,f = 0$. Die Formel (2) ergibt dann

$$(u, f) = 0\,, \qquad u \in H_A\,.$$

Das Element f ist somit orthogonal zu einer in H dichten Menge, nämlich zur Menge der Elemente des energetischen Raumes. Dann ist aber $f = 0$.

Den zu G inversen Operator G^{-1} bezeichnen wir mit $\tilde{A}$. Offenbar ist $D(\tilde{A}) = R(G) \subset H_A$ und $R(\tilde{A}) = D(G) = H$.

Satz 5.7.1. *Der Operator $\tilde{A}$ ist eine positiv-definite Erweiterung des Operators A. Die unteren Grenzen der Größen*

$$\frac{(Au, u)}{||u||^2}\,, \qquad \frac{(\tilde{A}u, u)}{||u||^2} \tag{5}$$

sind gleich. Die Gleichung

$$\tilde{A}\,u = f \tag{6}$$

besitzt für beliebiges $f \in H$ eine und nur eine Lösung.

Beweis. Sei $u_0 \in D(A)$; wir setzen $A\,u_0 = f$. Nach dem Satz 5.4.1 realisiert das Element u_0 das Minimum des Funktionals $F(u) = (A\,u, u) - 2(f, u)$. Nach Formel (1) ist $u_0 = G\,f$ und somit $\tilde{A}\,u_0 = f$. Daraus folgt nun, daß die folgenden Beziehungen gelten: 1. $u_0 \in D(\tilde{A})$, und da u_0 ein beliebiges Element der Menge $D(A)$ darstellt, so ist $D(A) \subset D(\tilde{A})$; 2. für $u_0 \in D(A)$ gilt $A\,u_0 = \tilde{A}\,u_0$. Zusammen bedeuten die Beziehungen 1 und 2, daß $\tilde{A}$ eine Erweiterung des Operators A ist.

Wir beweisen jetzt, daß $\tilde{A}$ ein symmetrischer Operator ist. Zunächst bemerken wir, daß wegen $D(\tilde{A}) \supset D(A)$ das Definitionsgebiet von $\tilde{A}$ im Raum H

dicht ist. Wir wählen jetzt im Definitionsgebiet $D(\tilde{A})$ zwei beliebige Elemente u und v und setzen $\tilde{A}\,u = f$, $\tilde{A}\,v = h$. Dann ist $u = G\,f$, $v = G\,h$. Durch Einsetzen in die Formel (3) erhalten wir die Gleichung

$$(v, \tilde{A}\,u) = (u, \tilde{A}\,v)\,,$$

welche die Symmetrie des Operators $\tilde{A}$ beweist.

Da der Operator $\tilde{A}$ eine Erweiterung von A ist, umfaßt der Wertevorrat des Quotienten $\frac{(\tilde{A}\,u, u)}{||u||^2}$ den Wertevorrat des Quotienten $\frac{(A\,u, u)}{||u||^2}$, und folglich gilt

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}u, u)}{||u||^2} \leqq \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{||u||^2}. \tag{7}$$

Andererseits erhalten wir durch Einführung der Bezeichnung

$$\inf_{u \in D(A)} \frac{(A\,u, u)}{||u||^2} = \gamma_0^2\,, \qquad \gamma_0^2 > 0\,, \tag{8}$$

$(A\,u, u) \geqq \gamma_0^2\,||u||^2$ und somit $|u|_A \geqq \gamma_0\,||u||$, $u \in H_A$. In der Beziehung (2) setzen wir jetzt $u = G\,f$. Dann gilt $f = \tilde{A}\,u$ und

$$(u, \tilde{A}\,u) = (\tilde{A}\,u, u) = [G\,f, G\,f]_A = |u|_A^2 \leqq \gamma_0^2\,||u||^2\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{(\tilde{A}\,u, u)}{||u||^2} \geqq \gamma_0^2\,,$$

und damit

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}\,u, u)}{||u||^2} \geqq \gamma_0^2 = \inf_{u \in D(A)} \frac{(A\,u, u)}{||u||^2}. \tag{9}$$

Durch Vergleich der Beziehungen (7) und (9) ergibt sich nun

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}\,u, u)}{||u||^2} = \inf_{u \in D(A)} \frac{(A\,u, u)}{||u||^2}. \tag{10}$$

Die Lösbarkeit der Gleichung (6) für beliebiges $f \in H$ ist lediglich eine andere Formulierung der oben festgestellten Tatsache, daß $R(\tilde{A}) = H$ ist. Wenn nämlich $f \in H$ ist, dann ist $f \in R(\tilde{A})$, d. h., es existiert ein Element u_0 mit $\tilde{A}\,u_0 = f$. Die Eindeutigkeit der Lösung ist eine Folgerung der positiven Definitheit des Operators $\tilde{A}$ (vgl. Satz 5.4.1 und Satz 5.5.1).

Aus der Lösbarkeit der Gleichung (6) für beliebiges $f \in H$ folgt, daß die verallgemeinerte Lösung dieser Gleichung eine gewöhnliche Lösung ist. Schließlich bemerken wir noch, daß die verallgemeinerte Lösung der Gleichung $A\,u = f$ die gewöhnliche Lösung der Gleichung $\tilde{A}\,u = f$ darstellt.

Die in diesem Paragraphen beschriebene Erweiterung $\tilde{A}$ des positiv-definiten Operators A ist zuerst von K. Friedrichs konstruiert worden. Im weiteren nennen wir $\tilde{A}$ die *Friedrichssche Erweiterung des Operators A.*

Bemerkung. Den Leser, der mit dem Begriff des selbstadjungierten Operators vertraut ist, weisen wir darauf hin, daß die Friedrichssche Erweiterung $\tilde{A}$ des positiv-definiten Operators A die selbstadjungierte Erweiterung dieses Operators darstellt.

Den Beweis dieser Behauptung findet man in dem Artikel von K. FRIEDRICHS [7] sowie in dem Buch des Autors [5], welche im Literaturverzeichnis zum Teil II aufgeführt sind.

Die Größe γ_0^2 [siehe Formel (8)] heißt *untere Grenze* des positiv-definiten Operators A. Wir gelangen somit zu dem folgenden Satz von K. FRIEDRICHS.

Satz 5.7.2. *Ein positiv-definiter Operator kann zu einem selbstadjungierten Operator mit derselben unteren Grenze erweitert werden.*

Satz 5.7.3. *Die energetischen Räume eines positiv-definiten Operators und seiner* FRIEDRICHS*schen Erweiterung stimmen überein.*

Beweis. Seien A ein positiv-definiter Operator im HILBERT-Raum H und $\tilde{A}$ die FRIEDRICHSsche Erweiterung dieses Operators. Es ist zu beweisen, daß die Räume H_A und $H_{\tilde{A}}$ aus ein und denselben Elementen bestehen und daß

$$|u_0|_{\tilde{A}} = |u_0|_A, \qquad u_0 \in H_A, \tag{11}$$

ist.

1. Jedes Element aus H_A gehört auch zu $H_{\tilde{A}}$, und die Normen eines solchen Elementes stimmen in beiden Räumen überein. Diese Behauptung ist für die Elemente aus dem Definitionsgebiet $D(A)$ offensichtlich: Aus $u_0 \in D(A)$ folgt $u_0 \in D(\tilde{A}) \subset H_{\tilde{A}}$; dabei gilt $|u_0|_A^2 = (A\,u_0, u_0) = (\tilde{A}\,u_0, u_0) = |u_0|_{\tilde{A}}^2$. Auf Grund des Satzes 5.3.2 bedeutet die Beziehung $u_0 \in H_A$ die Existenz einer Folge $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$, mit den Eigenschaften

$$\|u_n - u_0\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad |u_n - u_m|_A^2 \underset{n,\,m\to\infty}{\to} 0. \tag{12}$$

Da aber $u_n, u_m \in D(A)$ ist, gilt $u_n, u_m \in D(\tilde{A})$ und

$$|u_n - u_m|_A^2 = \big(A\,(u_n - u_m), u_n - u_m\big) = \big(\tilde{A}\,(u_n - u_m), u_n - u_m\big) = |u_n - u_m|_{\tilde{A}}^2.$$

Somit existiert eine Folge $\{u_n\}$, $u_n \in D(\tilde{A})$, mit folgenden Eigenschaften:

$$\|u_n - u_0\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad |u_n - u_m|_{\tilde{A}} \underset{n,\,m\to\infty}{\to} 0. \tag{13}$$

Aus demselben Satz 5.3.2 folgt nun $u_0 \in H_{\tilde{A}}$. Dabei gilt entsprechend der Definition der idealen Elemente

$$|u_n - u_0|_A \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad |u_n - u_0|_{\tilde{A}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

und damit

$$|u_0|_A = \lim_{n\to\infty} |u_n|_A = \lim_{n\to\infty} |u_n|_{\tilde{A}} = |u_0|_{\tilde{A}}.$$

2. Wir beweisen jetzt, daß aus der Beziehung $u \in H_{\tilde{A}}$ die Beziehung $u \in H_A$ sowie die Gleichung (11) folgen. Wenn $u \in H_{\tilde{A}}$ ist, dann existiert eine Folge $\{u_n\}$, $u_n \in D(\tilde{A})$, mit den Eigenschaften (13). Wie wir oben gesehen haben, ist $D(\tilde{A}) \subset \subset H_A$; somit ist $u_n \in H_A$, und nach dem im Abschnitt 1 Bewiesenen gilt

$$|u_n - u_m|_{\tilde{A}} = |u_n - u_m|_A.$$

Die Eigenschaften (13) gehen also in die Eigenschaften (12) über, d. h. $u \in H_A$. Für die Elemente $u \in H_A$ wurde die Gleichung (11) bereits im Abschnitt 1 aufgestellt. Der Satz ist damit bewiesen.

Weiter oben haben wir die Formel (3.6) bewiesen:

$$[u, v]_A = (A\,u, v)\,, \qquad u \in D(A)\,, \quad v \in H_A\,.$$

Es gilt nun auch die folgende, etwas allgemeinere Formel:

$$[u, v]_A = (\tilde{A}\,u, v)\,, \qquad u \in D(\tilde{A})\,, \quad v \in H_A\,. \tag{14}$$

Wenn nämlich $u \in D(\tilde{A})$ und $v \in H_A = H_{\tilde{A}}$ ist, dann gilt nach der Formel (3.6)

$$[u, v]_{\tilde{A}} = (\tilde{A}\,u, v)\,. \tag{15}$$

In den Räumen H_A und $H_{\tilde{A}}$ stimmen die Normen überein. Dann gilt aber dasselbe auch für die Skalarprodukte:

$$[u, v]_{\tilde{A}} = \frac{1}{4}\,\{|u + v|_{\tilde{A}}^2 - |u - v|_{\tilde{A}}^2\} = \frac{1}{4}\,\{|u + v|_A^2 - |u - v|_A^2\} = [u, v]_A\,.$$

Ersetzen wir nun in Gleichung (15) $[u, v]_{\tilde{A}}$ durch $[u, v]_A$, so erhalten wir die Formel (14).

§ 8. Das einfachste Randwertproblem für die gewöhnliche lineare Differentialgleichung

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{du}{dx}\right] + q(x)\,u(x) = f(x) \tag{1}$$

und stellen folgendes Problem: Gesucht ist das Integral dieser Gleichung auf dem Segment $[a, b]$ bei den Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0\,. \tag{2}$$

Dabei machen wir folgende Voraussetzungen: $p,\ p',\ q \in C[a, b]$, $f \in L_2(a, b)$. Weiterhin nehmen wir an, daß $p(x) \geqq p_0 = \text{const} > 0$ und $q(x) \geqq 0$ ist. Da die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ auf dem Segment $[a, b]$ stetig sind, so gelten die Ungleichungen

$$p_0 \leqq p(x) \leqq p_1\,, \qquad 0 \leqq q(x) \leqq q_1\,, \quad x \in [a, b]\,,$$

wobei p_1 und q_1, genauso wie p_0, positive Konstanten sind.

Als Grundraum H wählen wir den Raum $L_2(a, b)$, und als Definitionsgebiet des Operators

$$A\,u = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{du}{dx}\right] + q(x)\,u(x) \tag{3}$$

nehmen wir die Menge der Funktionen $u(x)$, die folgenden Bedingungen genügen:

$$u \in C^{(2)}\,[a, b]\,, \quad u(a) = u(b) = 0\,.$$

Wir beweisen die positive Definitheit des Operators A. Aus der Folgerung 1.3.1 ergibt sich zunächst, daß sein Definitionsgebiet im Raum $L_2(a, b)$ dicht ist. Wir prüfen jetzt die Symmetrie des Operators A nach. Sei $u, v \in D(A)$, dann gilt

$$(A\,u, v) = -\int_a^b v\,\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{du}{dx}\right] dx + \int_a^b q(x)\,u(x)\,v(x)\,dx\,.$$

Das erste Integral integrieren wir partiell. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2) für die Funktion $v(x)$ erhalten wir dann den symmetrischen Ausdruck

$$(A\,u,\,v) = \int_a^b \left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q(x)\,u\,v\right] dx\,, \tag{4}$$

der uns zeigt, daß $(A\,u,\,v) = (u,\,A\,v)$ ist. Der Operator A ist also symmetrisch.

Setzen wir in der Formel (4) $v = u$, so ergibt sich

$$(A\,u,\,u) = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)\,u^2(x)\right] dx\,. \tag{5}$$

Unter Berücksichtigung der Bedingungen für die Koeffizienten erhalten wir hieraus

$$(A\,u,\,u) \geqq p_0 \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\,.$$

Des weiteren gilt

$$\int_a^x u'(t)\,dt = u(x) - u(a) = u(x)\,.$$

Nach der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung ergibt sich dann

$$u^2(x) \leqq (x-a)\int_a^x u'^2(t)\,dt \leqq (b-a)\int_a^b u'^2(t)\,dt\,.$$

Daraus folgt

$$\|u\|^2 = \int_a^b u^2(x)\,dx \leqq (b-a)^2 \int_a^b u'^2(t)\,dt\,.$$

Wir erhalten nun endgültig

$$(A\,u,\,u) \geqq \frac{p_0}{(b-a)^2}\|u\|^2\,,$$

was die positive Definitheit des Operators A bedeutet; dabei kann

$$\gamma = \frac{\sqrt{p_0}}{b-a}$$

gesetzt werden.

Da sich der Operator A als positiv-definit erwiesen hat, so können wir den energetischen Raum H_A einführen. Wir beweisen jetzt, daß H_A aus all den auf dem Segment $[a, b]$ absolut stetigen Funktionen besteht, die in den Endpunkten dieses Segments verschwinden und die eine quadratisch summierbare erste Ableitung besitzen.

Wir nehmen an, es sei $u \in H_A$. Nach dem Satz 5.3.2 existiert dann eine Folge $\{u_n\} \subset D(A)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

$$|u_n - u_m| \underset{n,\,m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \qquad \|u_n - u\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Wenn $u \in D(A)$ gilt, dann ist

$$|u|^2 = \langle A\,u,\,u\rangle = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)\,u^2(x)\right] dx\,.$$

Folglich gilt

$$|u_n - u_m|^2 = \int_a^b [p(x)\,(u_n' - u_m')^2 + q(x)\,(u_n - u_m)^2]\,dx \underset{n,\,m\to\infty}{\to} 0\,,$$

und da beide Summanden unter dem Integral nicht negativ sind, so ergibt sich

$$\int_a^b p(x)\,(u_n' - u_m')^2\,dx \underset{n,\,m\to\infty}{\to} 0\,.$$

Unter Berücksichtigung der Einschränkungen für p erhalten wir

$$p_0 \int_a^b (u_n' - u_m')^2\,dx \leqq \int_a^b p(x)\,(u_n' - u_m')^2\,dx \leqq p_1 \int_a^b (u_n' - u_m')^2\,dx\,.$$

Folglich ist die Konvergenz des Integrals

$$\int_a^b p(x)\,(u_n' - u_m')^2\,dx \underset{n,\,m\to\infty}{\to} 0$$

gleichbedeutend mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_a^b (u_n' - u_m')^2\,dx \underset{n,\,m\to\infty}{\to} 0\,. \tag{6}$$

Die letzte Beziehung bedeutet ihrerseits, daß die Folge der Ableitungen $\{u_n'\}$ in der Metrik des Raumes $L_2(a, b)$ in sich konvergiert. Da der Raum $L_2(a, b)$ vollständig ist, so konvergiert die genannte Folge gegen eine gewisse Funktion $v \in L_2(a, b)$.

In Gleichung

$$\int_a^x u_n'(t)\,dt = u_n(x) - u_n(a) = u_n(x)$$

kann man den Grenzübergang durchführen. Dann ergibt sich

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt\,.$$

Die letzte Gleichung bedeutet die absolute Stetigkeit der Funktion $u(x)$; dabei ist $u' = v \in L_2(a, b)$. Offensichtlich ist auch $u(a) = 0$, und es genügt deshalb zu zeigen, daß $u(b) = 0$ ist. Letzteres ergibt sich wie folgt: In Gleichung

$$\int_x^b u_n'(t)\,dt = u_n(b) - u_n(x) = -\,u_n(x)$$

gehen wir zum Grenzwert über. Dann erhalten wir

$$u(x) = -\int_x^b v(t)\,dt$$

und somit $u(b) = 0$.

Wie wir oben sehen konnten, gilt für die Funktionen $u \in D(A)$ folgende Formel:

$$|u|^2 = \int_a^b \left[p(x) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)\, u^2(x) \right] dx \,. \tag{7}$$

Wir beweisen jetzt, daß diese Formel auch für eine beliebige Funktion aus dem energetischen Raum gilt. Sei $u \in H_A$. Wir wählen eine Folge $\{u_n\} \subset D(A)$ mit den Eigenschaften

$$|u_n - u| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,, \qquad ||u_n - u|| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Formel (6) ergibt dann die Beziehung

$$||u_n' - u'|| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Da die Norm des Grenzelementes gleich dem Grenzwert der Norm ist, so gilt

$$||u_n||^2 \to ||u||^2\,, \qquad |u_n|^2 \to |u|^2\,, \qquad ||u_n'||^2 \to ||u'||^2\,. \tag{8}$$

Für die Funktionen u_n gilt aber Formel (7):

$$|u_n|^2 = \int_a^b [p\, u_n'^2 + q\, u_n^2]\, dx\,.$$

Aus den Beziehungen (8) folgt, daß für $n \to \infty$ die linke Seite der letzten Gleichung den Grenzwert $|u|^2$ besitzt. Wir beweisen, daß der Grenzwert der rechten Seite gleich

$$\int_a^b [p\, u'^2 + q\, u^2]\, dx$$

ist. Es gilt

$$\left| \int_a^b [p\, u_n'^2 + q\, u_n^2]\, dx - \int_a^b [p\, u'^2 + q\, u^2]\, dx \right| \leqq$$

$$\leqq p_1 \int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\, dx + q_1 \int_a^b |u_n^2 - u^2|\, dx\,.$$

Nach der Cauchy-Bunjakowskischen Ungleichung ist aber

$$\int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\, dx \leqq \left\{ \int_a^b (u_n' + u')^2\, dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b (u_n' - u')^2\, dx \right\}^{1/2} =$$

$$= ||u_n' + u'||\; ||u_n' - u'||\,.$$

Wegen $||u_n'|| \to ||u'||$ ist $||u_n' + u'|| \leqq ||u_n'|| + ||u'||$ eine beschränkte Größe, und es gilt somit

$$\int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\, dx \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Analog beweist man die Konvergenz von

$$\int_a^b |u_n^2 - u^2|\, dx \to 0\,,$$

womit Formel (7) für eine beliebige Funktion aus H_A bewiesen ist.

Wir müssen nun die entgegengesetzte Behauptung zeigen: Wenn die Funktion u den oben formulierten drei Bedingungen genügt, dann ist $u \in H_A$. Auf Grund des Satzes 5.3.2 existiert eine Folge $\{u_n\}$ mit den Eigenschaften

$$u_n \in D(A)\,, \quad |u_n - u_m| \underset{n,\, m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \qquad ||u_n - u|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Um dies zu zeigen, entwickeln wir die Ableitung der Funktion u in eine FOURIER-Reihe nach Kosinusfunktionen:

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi(x-a)}{b-a}\,.$$

Das absolute Glied tritt hierbei nicht auf, da

$$a_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\,[u(b) - u(a)] = 0$$

ist. Durch gliedweise Integration erhalten wir

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi(x-a)}{b-a}\,, \qquad b_k = \frac{a_k(b-a)}{k\pi}\,.$$

Als u_n kann man jetzt die n-te Partialsumme der letzten Reihe wählen.

Die verallgemeinerte Lösung $u_0(x)$ des Problems (1)—(2) existiert und ist eindeutig; es ist dies die Funktion, welche das Minimum des Energiefunktionals

$$F(u) = |u|^2 - 2(u, f)$$

im energetischen Raum realisiert. Wie Formel (7) zeigt, ist in unserem Fall

$$F(u) = \int_a^b [p(x)\,u'^2 + q(x)\,u^2 - 2f(x)\,u]\,dx\,; \tag{9}$$

als Element des energetischen Raumes muß die Funktion $u(x)$ den Bedingungen (2) genügen.

Dabei ist $u_0 \in D$ (grad F). Die Variation des Funktionals (9) hat im Punkt u_0 die Gestalt

$$\delta F(u_0, \eta) = 2\int_a^b [p(x)\,u_0'(x)\,\eta'(x) + q(x)\,u_0(x)\,\eta(x) - f(x)\,\eta(x)]\,dx\,, \qquad \eta \in H_A\,.$$

Sie ist ein im Raum $L_2(a, b)$ beschränktes Funktional von η dann und nur dann, wenn diese Eigenschaft das Integral

$$\int_a^b p(x)\,u_0'(x)\,\eta'(x)\,dx$$

besitzt. Genauso wie beim einfachsten Variationsproblem beweist man, daß dafür notwendig und hinreichend ist, daß die Funktion $p(x)\,\dfrac{du_0}{dx}$ absolut stetig ist und eine auf dem Segment $[a, b]$ quadratisch summierbare Ableitung besitzt. Da aber die Funktion $p(x)$ streng positiv und stetig differenzierbar ist, so ist die letzte Bedingung der folgenden äquivalent: $u_0'(x)$ ist absolut stetig auf dem Segment $[a, b]$ und $u_0'' \in L_2(a, b)$.

Wir haben nebenbei folgende Tatsache bewiesen: Wenn $\tilde{A}$ die FRIEDRICHSsche Erweiterung des Operators A unseres Problems [siehe Formel (3) und (2)] bezeichnet, dann besteht das Definitionsgebiet $D(\tilde{A})$ dieser Erweiterung aus den Funktionen, die folgende Eigenschaften besitzen: Die Funktionen selbst sowie ihre ersten Ableitungen sind auf dem Segment $[a, b]$ absolut stetig, und die zweiten Ableitungen sind quadratisch summierbar; die Funktionen verschwinden in den Endpunkten des Segments.

§ 9. Ein allgemeineres Minimumproblem für das quadratische Funktional

1. Im § 4 wurde das Variationsproblem für ein quadratisches Funktional der Gestalt

$$F(u) = (A\,u, u) - 2(u, f)$$

formuliert. Eine wichtige Besonderheit dieses Funktionals besteht darin, daß sein linearer Anteil $2(u, f)$ im Ausgangsraum beschränkt ist; im § 5 haben wir diesen Umstand beim Existenzbeweis für die verallgemeinerte Lösung des Variationsproblems benutzt.

Hier betrachten wir nun das Minimumproblem für das quadratische Funktional allgemeineren Typs

$$F(u) = (A\,u, u) - 2\,l(u)\,, \tag{1}$$

wobei A ein positiv-definiter Operator im HILBERT-Raum H und l ein lineares (nicht notwendig beschränktes) Funktional in demselben Raum ist; der Faktor 2 wurde aus rein technischen Gründen eingeführt.

Führt man den energetischen Raum H_A des Operators A ein, dann kann man das Funktional (1) in der Form

$$F(u) = |u|^2 - 2\,l(u) \tag{2}$$

schreiben und als Funktional auffassen, das auf (einigen oder allen) Elementen des energetischen Raumes definiert ist. Von Interesse ist nun der Fall, wo $D(l)$ — das Definitionsgebiet des Funktionals l — im Raum H_A dicht ist; offenbar gilt $D(F) = D(l)$.

Dabei sind folgende zwei Möglichkeiten denkbar.

1.1. Das Funktional l ist nicht beschränkt im energetischen Raum. In diesem Fall ist das Funktional F nach unten nicht beschränkt. In der Tat existiert in diesem Fall eine Folge $\{u_n\}$ mit den Eigenschaften

$$|u_n| = 1\,, \qquad |l(u_n)| \underset{n\to\infty}{\to} \infty\,.$$

Ändert man erforderlichenfalls die Vorzeichen bei den Elementen u_n, so kann man erreichen, daß $l(u_n) \to +\infty$ strebt. Dann gilt aber

$$F(u_n) = 1 - 2\,l(u_n) \to -\infty\,.$$

Das Minimumproblem für das Funktional (2) ist also in diesem Fall gar nicht sinnvoll.

1.2. Das Funktional l ist im energetischen Raum beschränkt. Dann kann es auf den ganzen Raum stetig fortgesetzt werden; damit wird auch das Funktional (2) auf den gesamten Raum H_A erweitert. Nach dem Satz von RIESZ existiert dann ein und nur ein Element $u_0 \in H_A$, das der Beziehung $l(u) = [u, u_0]$ genügt. Jetzt ist

$$F(u) = |u|^2 - 2[u, u_0] .$$

Durch Wiederholen derselben Überlegungen wie im § 5 überzeugt man sich davon, daß das Element u_0 das Minimum des Funktionals (2) realisiert.

Wenn der Raum H_A separabel ist, dann läßt sich leicht eine zur Formel (5.11) analoge Formel für die Lösung des Minimumproblems des Funktionals (2) herleiten. Es sei ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, eine im energetischen Raum vollständige und orthonormierte Folge. Dann ist

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n] \, \omega_n .$$

Setzt man in der oben genannten Formel $l(u) = [u, u_0]$ für $u = \omega_n$, dann gilt $[u_0, \omega_n] = [\omega_n, u_0] = l(\omega_n)$ und folglich

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} l(\omega_n) \, \omega_n . \tag{3}$$

2. Es sei A der im vorangegangenen Paragraphen betrachtete Operator [siehe Formel (3) und (2) aus § 8]; die in diesem Paragraphen angenommenen Voraussetzungen bezüglich der Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ sowie bezüglich der Funktionen, welche des Definitionsgebiet des Operators A bilden, behalten wir bei. Wir stellen das Minimumproblem für das quadratische Funktional

$$F(u) = |u|^2 - 2\,u(c) = \\ = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)\,u^2\right] dx - 2\,u(c)\,, \quad a < c < b\,, \tag{4}$$

im energetischen Raum des Operators A. Das bedeutet im besonderen, daß die Funktion u, von welcher das Funktional (4) abhängt, den Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{5}$$

genügen muß. Wie man leicht sieht, ist das lineare Funktional $l(u) = u(c)$ in der energetischen Metrik beschränkt. In der Tat gilt nach der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung

$$|u(c)|^2 = \left|\int_a^c u'(x)\,dx\right|^2 \leqq (c - a)\int_a^c u'^2(x)\,dx \leqq (c - a)\int_a^b u'^2(x)\,dx .$$

Nach der Formel (8.7) ergibt sich

$$|u|^2 = \int_a^b [p(x)\,u'^2(x) + q(x)\,u^2(x)]\,dx \geqq p_0 \int_a^b u'^2(x)\,dx$$

und somit

$$|u(c)| \leqq \sqrt{\frac{c-a}{p_0}}\, |u|\,. \tag{6}$$

Die Formel (6) zeigt, daß im vorliegenden Fall das Funktional l beschränkt ist, wobei $|l| \leqq \sqrt{\frac{c-a}{p_0}}$ gilt. Die Lösung unseres Variationsproblems existiert, und auf Grund der Formel (3) läßt sich diese in Form der Reihe

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(c)\, \omega_n(x) \tag{7}$$

darstellen; dabei bedeutet $\{\omega_n\}$ ein im Raum H_A vollständiges und orthogonales System. Die Reihe (8) konvergiert in der Metrik des Raumes H_A und folglich auch in der Metrik des Raumes $L_2(a, b)$.

Beispiel. Wir betrachten den Spezialfall $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$; dann ist $A\,u = -\frac{d^2u}{dx^2}$. In diesem Fall bilden die Funktionen

$$\omega_n(x) = \frac{\sqrt{2\,(b-a)}}{n\,\pi} \sin \frac{n\,\pi\,(x-a)}{b-a}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

ein im energetischen Raum vollständiges und orthonormiertes System; den Beweis dieser Tatsache überlassen wir dem Leser. Das Minimum des Funktionals

$$\int_a^b u'^2\, dx - 2\,u(c)\,, \quad u(a) = u(b) = 0 \tag{8}$$

wird durch die Funktion

$$u_0(x) = \frac{2\,(b-a)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\,\pi\,(c-a)}{b-a} \sin \frac{n\,\pi\,(x-a)}{b-a}$$

realisiert. Die Summe der letzten Reihe läßt sich leicht bestimmen, indem man z. B. die EULERsche Gleichung für das Funktional (8) aufstellt und diese löst; dies auszuführen, überlassen wir ebenfalls dem Leser.

§ 10. Der Fall eines nur positiven Operators

Einen positiven, aber nicht positiv-definiten Operator nennen wir *nur positiv*. Für einen nur positiven Operator kann der energetische Raum genauso konstruiert werden, wie dies für den positiv-definiten Operator geschah. Dabei besteht allerdings ein wesentlicher Unterschied: Es läßt sich beweisen, daß es jetzt unter den idealen Elementen des energetischen Raumes stets solche gibt, die nicht zum Ausgangs-HILBERT-Raum gehören.

Wir betrachten z. B. den Operator B, der im § 2 untersucht wurde. Wir erinnern daran, daß dieser durch die Formel

$$B\,u = -\frac{d^2u}{dx^2}\,, \qquad 0 \leqq x < \infty\,,$$

definiert wird und daß sein Definitionsgebiet aus denjenigen Funktionen der Klasse $C^{(2)}[0, \infty)$ besteht, welche für $x = 0$ und für $x \geqq a_u$ verschwinden; dabei bedeutet a_u eine Konstante, die von der Funktion $u \in D(B)$ abhängt. Es läßt sich unschwer beweisen, daß

der energetische Raum H_B aus den Funktionen besteht, die folgende Eigenschaften besitzen: 1. Die Funktion $u \in H_B$ ist absolut stetig auf dem Segment $[0, a]$ für eine beliebige positive Zahl a; 2. $u(0) = 0$; 3. $u' \in L_2(0, \infty)$. So gehört z. B. die Funktion $u(x) = \ln(1 + x)$ zum Raum H_B, jedoch nicht zum Ausgangsraum $L_2(0, \infty)$.

Für einen nur positiven Operator gilt der

Satz 5.6.1. *Der energetische Raum ist separabel dann und nur dann, wenn der Ausgangsraum separabel ist.*

Wenn A ein nur positiver Operator und l ein lineares Funktional ist, dann läßt sich das Minimumproblem für das Funktional

$$F(u) = (A\,u, u) - 2\,l(u)\,, \qquad u \in D(A)\,,$$

genauso lösen, wie im vorangegangenen Paragraphen: Wegen $(A\,u, u) = |\,u\,|^2$ können wir dem Funktional F die Gestalt

$$F(u) = |\,u\,|^2 - 2\,l(u)$$

geben. Wenn l in H_A nicht beschränkt ist, dann besitzt unser Variationsproblem keinen Sinn. Ist dagegen l in H_A beschränkt und auf einer in H_A dichten Menge definiert, dann gilt $l(u) = [u, u_0]$, wobei das Element $u_0 \in H_A$ existiert und eindeutig bestimmt ist; dieses Element realisiert nun auch das Minimum des Funktionals F im energetischen Raum.

Übungsaufgaben

1. Der Operator T_p sei durch die Formel

$$T_p\,u = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{du}{dx}\right], \qquad 0 < x \leqq 1\,,$$

definiert, wobei die Funktion $p(x)$ folgende Eigenschaften besitzt: $p(x) \in C^{(1)}\,[0, 1]$, $p(0) = 0$, $p(x) > 0$ für $x > 0$ und das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{p(x)}$$

konvergiert. Das Definitionsgebiet $D(T_p)$ besteht aus den Funktionen $u(x)$, die folgende Bedingungen erfüllen: a) Die Funktionen $u(x)$ und $p(x)\,u'(x)$ sind stetig auf dem Segment $[0, 1]$ und absolut stetig auf einem beliebigen Segment der Gestalt $[\delta, 1]$ mit $0 < \delta < 1$; b) $T_p\,u \in L_2(0, 1)$; c) $u(0) = u(1) = 0$. Man beweise, daß der Operator T_p im Raum $L_2(0, 1)$ positiv-definit ist.

2. Es sei $p(x) \in C^{(1)}\,[0, 1]$, $p(0) = 0$, $p(x) > 0$ für $x > 0$ und

$$\int_0^1 \frac{dx}{p(x)} = \infty\,, \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{p(x)} < \infty\,.$$

Der Operator T_p sei durch dieselbe Formel wie in der Übungsaufgabe 1 definiert; als Definitionsgebiet $D(T_p)$ nehmen wir die Menge der Funktionen $u(x)$, welche denselben Bedingungen wie in der Übungsaufgabe 1, mit Ausnahme der Bedingung $u(0) = 0$, genügen. Man beweise, daß der Operator T_p im Raum $L_2(0, 1)$ positiv-definit ist.

3. Man beschreibe die Menge der Elemente des energetischen Raumes in den Übungsaufgaben 1 und 2.

4. Man beweise die positive Definitheit des Operators

$$T_{x^2}\,u = -\frac{d}{dx}\left(x^2\,\frac{du}{dx}\right), \qquad 0 < x \leqq 1\,,$$

welcher auf der Menge der in der Aufgabe 2 für $p(x) = x^2$ beschriebenen Funktionen definiert ist. Man beweise, daß die untere Grenze des Operators gleich 1/4 ist.

5. Man beweise, daß für $\alpha > 2$ der Operator T_{x^α} nur positiv ist.

KAPITEL 6

DAS EIGENSPEKTRUM EINES POSITIV-DEFINITEN OPERATORS

§ 1. Der Begriff des Eigenspektrums eines Operators

Es sei A ein linearer Operator im HILBERT-Raum H. Die Zahl λ und das Element u heißen *Eigenwert* bzw. *Eigenelement* des Operators A, wenn u nicht das Nullelement des Raumes H ist und die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$A u - \lambda u = 0. \tag{1}$$

Ist H z. B. der Raum L_2, dann ist die Bedingung $u \neq 0$ gleichbedeutend mit $u(x) \not\equiv 0$ [1]).

Das Element u heißt ein zum Eigenwert λ *gehöriges* Eigenelement. Aus Gleichung (1) ergibt sich sofort eine Formel, nach der der Eigenwert λ bestimmt werden kann, wenn ein zu λ gehöriges Eigenelement u bekannt ist. Multiplizieren wir nämlich beide Seiten der Gleichung (1) skalar mit u, so erhalten wir $(A u, u) - \lambda \|u\|^2 = 0$ und somit

$$\lambda = \frac{(A u, u)}{\|u\|^2}. \tag{2}$$

In einem komplexen Raum können die Eigenwerte naturgemäß sowohl reell, als auch komplex sein. In einem reellen Raum dagegen ist eine Multiplikation der Elemente nur mit reellen Zahlen erklärt; entsprechend dieser Definition müßte man in einem reellen Raum auch nur reelle Eigenwerte betrachten. Aber bereits einfachste Beispiele zeigen, daß das nicht zweckmäßig wäre. So erzeugt z. B. eine reelle quadratische Matrix der Ordnung m einen linearen Operator im m-dimensionalen euklidischen Raum. Die Eigenwerte dieses Operators stimmen mit den Eigenwerten seiner Matrix überein, die — wie hinreichend bekannt ist — auch komplex sein können. Wir werden deshalb die Definition der Eigenwerte so erweitern, daß diese auch komplex sein können.

Ausgehend von einem gegebenen reellen HILBERT-Raum H konstruieren wir zunächst einen komplexen HILBERT-Raum H^*. Das geschieht wie folgt: Als Menge der Elemente des neuen Raumes H^* nehmen wir die Menge sämtlicher formal gebildeten Summen der Gestalt $U = u' + i u''$ mit $i = \sqrt{-1}$, $u', u'' \in H$. Auf dieser Menge definieren wir auf übliche Weise die Addition und die Multiplikation mit komplexen Zahlen; diese zwei Operationen führen nicht aus der

---

[1]) $u(x) \equiv 0$ bedeutet hier (vgl. auch Kapitel 2): Die Funktion $u(x)$ ist der Nullfunktion äquivalent, d. h., für fast alle x gilt $u(x) = 0$. (Anm. d. Übers.).

Menge H^* heraus, so daß man H^* als eine lineare Menge auffassen kann. Das Nullelement dieser Menge ist das Element $0 + i\,0$, wobei 0 das Nullelement des Raumes H bedeutet; an Stelle von $0 + i\,0$ schreiben wir jetzt einfach 0. Überhaupt werden wir u und $i\,v$ an Stelle von $u + i\,0$ bzw. $0 + i\,v$ schreiben. In H^* führen wir nun eine skalare Multiplikation nach folgender Regel ein: Wenn $U = u' + i\,u''$, $V = v' + i\,v''$ mit $u', u'', v', v'' \in H$ ist, dann sei

$$(U, V)^* = (u', v') + (u'', v'') + i\,[(u'', v') - (u', v'')]\,. \tag{3}$$

Wie man leicht sieht, sind bei einer solchen Definition alle Axiome des Skalarproduktes in einem komplexen Raum erfüllt. Es gilt nämlich:

A. $(U, V)^* = \overline{(V, U)^*}$.

B. $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2, V)^* = \alpha_1 (U_1, V)^* + \alpha_2 (U_2, V)^*$.

C. $(U, U)^* \geqq 0$, und $(U, U)^* = 0$ gilt dann und nur dann, wenn $U = 0$ ist.

Der Operator A läßt sich nach der Formel

$$A\,U = A\,u' + i\,A\,u'' \tag{4}$$

auf alle Elemente der Gestalt $U = u' + i\,u''$ mit $u', u'' \in D(A) \subset H$ erweitern. Nach dieser neuen Definition kann es sich erweisen, daß der Operator A, welcher ursprünglich im reellen Raum H erklärt war, im Raum H^* komplexe Eigenwerte $\lambda = \lambda' + i\,\lambda''$ und dazugehörige Eigenelemente $u' + i\,u''$ besitzt; die Gleichung

$$A\,(u' + i\,u'') = (\lambda' + i\,\lambda'')\,(u' + i\,u'')$$

ist dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A\,u' &= \lambda' u' - \lambda'' u''\,, \\ A\,u'' &= \lambda'' u' + \lambda' u'' \end{aligned} \tag{5}$$

äquivalent.

Zu ein und demselben Eigenwert können mehrere Eigenelemente gehören; sind $u_1, u_2, \ldots, u_n$ derartige Elemente, dann ist eine beliebige, vom Nullelement verschiedene Linearkombination

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\,u_k$$

ebenfalls ein zu demselben Eigenwert gehöriges Eigenelement. Die soeben gemachte Bemerkung erlaubt es, nur linear unabhängige Eigenelemente, die zu einem gegebenen Eigenwert gehören, zu betrachten und jedes Eigenelement als normiert anzunehmen.

Die Anzahl der linear unabhängigen Eigenelemente heißt *Vielfachheit* (bisweilen auch *Rang*) des entsprechenden Eigenwertes. In einem separablen Raum ist die Vielfachheit eines beliebigen Eigenwertes endlich oder abzählbar.

Die Gesamtheit der Eigenwerte eines Operators heißt *Eigenspektrum* dieses Operators.

§ 2. Eigenwerte und Eigenelemente eines symmetrischen Operators

Satz 6.2.1. *Die Eigenwerte eines symmetrischen Operators sind reell.*

Beweis. Wir multiplizieren skalar die erste der Gleichungen (1.5) mit u'', die zweite mit u' und ziehen die erste von der zweiten Gleichung ab:

$$(A\,u'', u') - (A\,u', u'') = \lambda''\,(\|u'\|^2 + \|u''\|^2)\,. \tag{1}$$

Infolge der Symmetrie des Operators A ist die linke Seite der letzten Gleichung gleich Null. Da das Eigenelement $u' + i\,u''$ verschieden vom Nullelement ist, so ist entweder u' oder u'' von Null verschieden, und der Klammerausdruck auf der rechten Seite in (1) ist positiv. Daraus folgt, daß $\lambda'' = 0$ ist, d. h. die Eigenwerte sind reell. Das System (1.5) nimmt jetzt die Gestalt

$$A\,u' = \lambda'\,u'\,, \qquad A\,u'' = \lambda'\,u''$$

an; jedes der von Null verschiedenen Elemente u' und u'' ist ein zum Eigenwert λ' gehöriges Eigenelement.

Satz 6.2.2. *Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenelemente eines symmetrischen Operators sind orthogonal.*

Beweis. Es seien λ_1 und λ_2 verschiedene Eigenwerte des symmetrischen Operators A. Zum Eigenwert λ_1 gehöre das Eigenelement u_1, zum Eigenwert λ_2 das Eigenelement u_2.

Dann gelten die Beziehungen

$$A\,u_1 = \lambda_1\,u_1\,, \qquad A\,u_2 = \lambda_2\,u_2\,.$$

Die erste Gleichung multiplizieren wir skalar mit u_2, die zweite mit u_1; danach ziehen wir die zweite von der ersten Gleichung ab:

$$(A\,u_1, u_2) - (A\,u_2, u_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)\,(u_1, u_2)\,.$$

Da der Operator A symmetrisch ist, so ist die linke Seite gleich Null, und es gilt folglich

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,(u_1, u_2) = 0\,.$$

Wegen $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ergibt sich daraus

$$(u_1, u_2) = 0\,.$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Folgerung 6.2.1. *Ein symmetrischer Operator in einem separablen* Hilbert-*Raum besitzt eine höchstens abzählbare Menge von Eigenwerten.*

Wenn zu einem Eigenwert mehrere linear unabhängige Eigenelemente gehören, dann kann man auf diese den Orthogonalisierungsprozeß anwenden. Da man nun die Eigenelemente auch stets normieren kann, so gelangen wir zu folgendem wichtigen Korollar: *Man darf stets annehmen, daß die Eigenelemente eines symmetrischen Operators ein orthonormiertes System bilden.*

§ 3. Das verallgemeinerte Eigenspektrum eines positiv-definiten Operators

Da jeder positiv-definite Operator symmetrisch ist, so gelten die im vorangegangenen Paragraphen getroffenen Feststellungen auch für einen positiv-definiten Operator. Für diese Operatoren erweist es sich aber als zweckmäßig, noch den Begriff des verallgemeinerten Eigenspektrums, genauer gesagt, die Begriffe der verallgemeinerten Eigenwerte sowie der dazugehörigen verallgemeinerten Eigenelemente einzuführen; wir führen diese Begriffe in Analogie zum Begriff der verallgemeinerten Lösung ein.

Es sei A ein positiv-definiter Operator, λ sein Eigenwert und u ein zum Eigenwert λ gehöriges Eigenelement. Letzteres bedeutet, daß die Bedingungen $u \neq 0$, $u \in D(A)$ und die Gleichung

$$A u = \lambda u \tag{1}$$

erfüllt sind.

Wir nehmen ein beliebiges Element $\eta \in H_A$ und multiplizieren skalar beide Seiten der Gleichung (1) mit η:

$$(A u, \eta) = \lambda(u, \eta) .$$

In der letzten Gleichung ist $u \in D(A)$ und $\eta \in H_A$. Dann gilt aber auf Grund der Formel (3.6) des Kap. 5

$$(A u, \eta) = [u, \eta]_A .$$

Somit ergibt sich, daß der Eigenwert λ und das dazugehörige Eigenelement u folgender Beziehung genügen:

$$[u, \eta]_A = \lambda(u, \eta) , \qquad \forall \eta \in H_A . \tag{2}$$

Es erfülle nun umgekehrt das Element $u \in D(A)$, $u \neq 0$, die Gleichung (2) für eine gewisse Zahl λ. Dann gilt nach Formel (3.6) des Kap. 5

$$[u, \eta]_A = (A u, \eta) .$$

Durch Einsetzen in die Beziehung (2) erhalten wir

$$(A u - \lambda u, \eta) = 0 , \qquad \forall \eta \in H_A .$$

Das Element $A u - \lambda u$ des Raumes H ist also orthogonal zu einem beliebigen Element $\eta \in H_A$. Da aber die Menge der Elemente des Raumes H_A im Ausgangsraum H dicht ist und da jedes zu einer dichten Menge orthogonales Element gleich dem Nullelement ist, so ergibt sich

$$A u - \lambda u = 0 .$$

Die letzte Gleichung bedeutet, daß u ein Eigenelement und λ ein Eigenwert des Operators A ist.

Das Element $u \in H_A$, $u \neq 0$, und die Zahl λ nennen wir nun *verallgemeinertes Eigenelement* bzw. *verallgemeinerten Eigenwert des Operators* A, wenn diese der Gleichung (2) genügen.

Satz 6.3.1. *Die verallgemeinerten Eigenwerte und Eigenelemente eines positiv-definiten Operators sind die gewöhnlichen Eigenwerte und Eigenelemente der* FRIEDRICHS*schen Erweiterung dieses Operators.*

Der Beweis ist äußerst einfach. Wenn λ ein verallgemeinerter Eigenwert und u ein verallgemeinertes Eigenelement des positiv-definiten Operators A sind, dann genügen diese der Gleichung (2). Setzen wir auf der rechten Seite dieser Gleichung $\lambda u = f$, so bringen wir dieselbe auf die Gestalt

$$[\eta, u]_A = (\eta, f), \qquad \forall \eta \in H_A. \tag{3}$$

Durch Vergleich der Gleichungen (3) und (5.5) aus Kap. 5 erkennt man, daß sich diese nur in der Bezeichnung unterscheiden. Daraus folgt, daß das in die Formel (3) eingehende Element u das Minimum des Funktionals

$$F(v) = |v|^2 - 2(f, v), \qquad \forall v \in H_A,$$

realisiert. Dann gilt aber $u \in D(\tilde{A})$, wobei $\tilde{A}$ die FRIEDRICHSsche Erweiterung des Operators A bedeutet, und $\tilde{A}u = f$ oder

$$\tilde{A} u = \lambda u,$$

was zu beweisen war.

Da der Operator $\tilde{A}$ symmetrisch ist, so gelten für die verallgemeinerten Eigenwerte und Eigenelemente die Sätze 6.2.1 und 6.2.2. Wir erwähnen hier noch zwei weitere Eigenschaften der verallgemeinerten Eigenwerte und Eigenelemente eines positiv-definiten Operators; das Wort „verallgemeinerte" lassen wir der Einfachheit halber im weiteren weg.

Satz 6.3.2. *Die Eigenelemente eines positiv-definiten Operators sind orthogonal im energetischen Raum, wenn sie im Ausgangsraum orthogonal sind.*

Beweis. Es seien u_1 und u_2 zwei Eigenelemente des positiv-definiten Operators A, und es gelte $(u_1, u_2) = 0$. Setzen wir in Gleichung (2) $u = u_1$, $\eta = u_2$, so erhalten wir $[u_1, u_2]_A = 0$.

Satz 6.3.3. *Ein beliebiger Eigenwert eines positiv-definiten Operators kann nicht kleiner als die untere Grenze dieses Operators sein.*

Beweis. Es sei γ_0^2 die untere Grenze des Operators A. Nach Satz 5.7.1 ist die untere Grenze der FRIEDRICHSschen Erweiterung $\tilde{A}$ des Operators A ebenfalls gleich γ_0^2. Wenn λ ein Eigenwert und u ein dazugehöriges Eigenelement des Operators A bedeuten (beide im verallgemeinerten Sinne), dann gilt auf Grund der Formel (1.2) sowie des Satzes 6.3.1

$$\lambda = \frac{(\tilde{A} u, u)}{\|u\|^2} \geqq \gamma_0^2. \tag{4}$$

Wir bemerken noch, daß man der Formel (1.2) in unserem Fall die Gestalt

$$\lambda = \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} \tag{5}$$

geben kann.

Bei Multiplikation von u mit einer von Null verschiedenen Konstanten ändert sich die rechte Seite der letzten Gleichung nicht. Wir wählen diese Konstante derart, daß das Eigenelement u in der Metrik des Ausgangsraumes normiert

ist: $||u|| = 1$. Dann ergibt sich für den Eigenwert die folgende, in verschiedener Hinsicht günstigere Formel:

$$\lambda = |u|_A^2, \quad ||u||^2 = 1. \tag{6}$$

§ 4. Die Variationsfassung des Eigenwertproblems

Wir beginnen mit folgender Bemerkung: Wenn γ_0^2 die untere Grenze des positiv-definiten Operators A ist, dann gilt

$$\inf_{\substack{u \in H_A \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{||u||^2} = \gamma_0^2. \tag{1}$$

Wir wollen diese Beziehung beweisen. Wegen $D(A) \subset H_A$ ist

$$\inf_{\substack{u \in H_A \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{||u||^2} \leqq \inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{||u||^2} = \inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{||u||^2} = \gamma_0^2.$$

Andererseits ist $D(A)$ dicht im Raum H_A; für $u \in H_A$ läßt sich ein Element $v \in D(A)$ finden derart, daß gilt: $|v - u|_A < \varepsilon$ und $||v - u|| < \varepsilon$, wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Dann ist aber $\left| |v|_A - |u|_A \right| < \varepsilon$, $\left| ||v|| - ||u|| \right| < \varepsilon$. Würde nun für ein gewisses Element $u \in H_A$

$$\frac{|u|_A^2}{||u||^2} < \gamma_0^2$$

gelten, dann wäre für hinreichend kleines ε auch

$$\frac{|v|_A^2}{||v||^2} = \frac{(Av, v)}{||v||^2} < \gamma_0^2,$$

was der Definition der unteren Grenze widerspricht.

Satz 6.4.1. *Wenn ein Element u_1 existiert, auf dem die untere Grenze* (1) *angenommen wird, dann ist γ_0^2 der kleinste verallgemeinerte Eigenwert und u_1 das dazugehörige Eigenelement des Operators A.*

Beweis. Da sich der Quotient

$$\Psi(u) = \frac{|u|_A^2}{||u||^2} \tag{2}$$

bei Multiplikation des Elementes u mit einer Konstanten nicht ändert, so darf man das Element u als normiert annehmen. Dann gilt

$$\Psi(u) = |u|_A^2, \quad ||u|| = 1. \tag{3}$$

Wir führen jetzt die Bezeichnung $\gamma_0^2 = \lambda_1$ ein.

Die untere Grenze wird auf dem Element u_1 angenommen; das bedeutet, daß

$$u_1 \in H_A, \quad ||u_1||^2 = 1, \quad |u_1|^2 = \lambda_1$$

ist. Wir nehmen ein beliebiges Element $\eta \in H_A$ und eine beliebige reelle Zahl α und bilden den Quotienten

$$\frac{|u_1 + \alpha\eta|^2}{||u_1 + \alpha\eta||^2}. \tag{4}$$

Bei festem η ist der Ausdruck (4) eine Funktion von α, welche für $\alpha = 0$ ihr Minimum annimmt. Dann muß aber ihre Ableitung nach α im Punkte $\alpha = 0$ gleich Null sein:

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{[u_1, u_1] + 2\,\alpha[u_1, \eta] + \alpha^2[\eta, \eta]}{(u_1, u_1) + 2\,\alpha(u_1, \eta) + \alpha^2(\eta, \eta)}\Bigg|_{\alpha=0} = 0\,.$$

Nach Differentiation erhalten wir

$$2(u_1, u_1)\,[u_1, \eta] - 2(u_1, \eta)\,[u_1, u_1] = 0\,. \tag{5}$$

Schließlich bemerken wir, daß

$$(u_1, u_1) = ||u_1||^2 = 1\,, \qquad [u_1, u_1] = |u_1|^2 = \lambda_1$$

ist. Setzen wir dies in die Beziehung (5) ein, so ergibt sich

$$[u_1, \eta] - \lambda_1(u_1, \eta) = 0\,.$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß λ_1 ein Eigenwert und u_1 ein Eigenelement des Operators A ist. Aus Satz 6.3.3 folgt schließlich, daß λ_1 der kleinste Eigenwert ist. Der Satz ist damit bewiesen.

Wir nehmen jetzt an, daß wir den kleinsten Eigenwert λ_1 und das dazugehörige Eigenelement u_1 des Operators A bereits gefunden haben. Wie finden wir den nächstfolgenden Eigenwert λ_2 und das Eigenelement u_2? Offenbar hat man λ_2 unter denjenigen Werten des Quotienten (2) zu suchen, die auf den Funktionen, welche zu u_1 in den Metriken der beiden Räume H und H_A orthogonal sind, angenommen werden.

Wir bezeichnen mit $H^{(1)}$ den Teilraum des Raumes H, der zum Element u_1 orthogonal ist, und mit $H_A^{(1)}$ den Teilraum des Raumes H_A, der zu u_1 im Sinne der neuen Metrik orthogonal ist:

$$[u, u_1] = 0\,, \qquad u \in H_A^{(1)}\,.$$

Wir beweisen, daß

$$H_A^{(1)} = H_A \cap H^{(1)}$$

gilt. Es sei $u \in H_A^{(1)}$. Wir betrachten die Gleichung, welche das erste Eigenelement definiert:

$$[u_1, \eta] = \lambda_1(u_1, \eta)\,.$$

Setzen wir darin $\eta = u$, so erhalten wir $(u_1, u) = \frac{1}{\lambda_1}\,[u_1, u] = 0$. Letzteres bedeutet, daß $u \in H^{(1)}$ und somit $u \in H_A \cap H^{(1)}$ ist.

Es sei umgekehrt $u \in H_A \cap H^{(1)}$; das bedeutet, daß $u \in H_A$ und $(u, u_1) = 0$ ist. Völlig analog gelangen wir dann zur Gleichung

$$[u_1, u] = \lambda_1(u_1, u) = 0\,,$$

woraus $u \in H_A^{(1)}$ folgt.

Wenn die paarweise orthogonalen Eigenelemente $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bekannt sind, dann kann man die Teilräume $H^{(n)}$ und $H_A^{(n)}$ der Räume H bzw. H_A einführen,

welche entsprechend zu den Elementen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ orthogonal sind (jeder in seiner Metrik). Man beweist dann analog die Beziehung $H_A^{(n)} = H_A \cap H^{(n)}$.

Satz 6.4.2. *Für den positiv-definiten Operator A seien die ersten n Eigenwerte*

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$$

sowie die dazugehörigen Eigenelemente

$$u_1, u_2, \ldots, u_n ,$$

welche wir als paarweise orthogonal annehmen, bekannt. Es sei λ_{n+1} die untere Grenze von $|u|^2$ auf den normierten Elementen $u \in H_A^{(n)}$. Wenn diese Grenze angenommen wird, dann ist λ_{n+1} der nach λ_n nächstfolgende Eigenwert des Operators A. Dasjenige Element, auf dem diese untere Grenze angenommen wird, ist ein zum Eigenwert λ_{n+1} gehöriges Eigenelement.

Beweis. Durch dieselben Überlegungen wie beim Beweis des vorangegangenen Satzes gelangen wir zu der Gleichung

$$[u_{n+1}, \zeta] - \lambda_{n+1}(u_{n+1}, \zeta) = 0, \qquad \forall\, \zeta \in H_A^{(n)} . \tag{6}$$

Sei η ein beliebiges Element des Raumes H_A. Wir setzen

$$\zeta = \eta - \sum_{k=1}^{n} (\eta, u_k)\, u_k . \tag{7}$$

Dann ist $\zeta \in H^{(n)}$ und folglich $\zeta \in H_A^{(n)}$. Für das von uns konstruierte Element ζ gilt Gleichung (6). Setzt man in diese Gleichung den Ausdruck (7) ein und berücksichtigt man dabei, daß $[u_{n+1}, u_k] = (u_{n+1}, u_k) = 0$ ist, dann ergibt sich

$$[u_{n+1}, \eta] - \lambda_{n+1}(u_{n+1}, \eta) = 0 , \qquad \forall\, \eta \in H_A .$$

Der Satz ist damit bewiesen.

§ 5. Der Satz über den kleinsten Eigenwert

Der Satz 6.4.1 macht in gewissem Sinne eine bedingte Aussage: Es wird behauptet, daß $\lambda_1 = \gamma_0^2$ als die untere Grenze des Funktionals

$$\Psi(u) = |u|_A^2 , \qquad ||u|| = 1 , \tag{1}$$

der kleinste Eigenwert des Operators A ist, wenn die genannte untere Grenze angenommen wird. Im vorliegenden Paragraphen wird dafür eine gewisse hinreichende Bedingung aufgestellt.

Satz 6.5.1. *Es sei $\{w_n\}$ eine Minimalfolge für das Funktional (1). Wenn sich aus dieser Folge eine Teilfolge auswählen läßt, welche in der Metrik des Ausgangsraumes H konvergiert, dann ist $\lambda_1 = \inf \Psi(u)$ der kleinste Eigenwert des gegebenen Operators, und das Grenzelement der ausgewählten Teilfolge ist das dazugehörige Eigenelement.*

Beweis. Nach Voraussetzung des Satzes läßt sich aus der Folge $\{w_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{w_{n_k}\}$ auswählen. Der Einfachheit halber setzen wir $w_{n_k} = \varphi_k$. Wie man leicht sieht, ist die Teilfolge $\{\varphi_k\}$ ebenfalls eine Minimalfolge. Deshalb nehmen wir an, daß uns eine Minimalfolge $\{\varphi_k\}$, welche im Raum H konvergiert, gegeben ist. Die Elemente φ_k besitzen folgende Eigenschaften: 1. $\varphi_k \in H_A$; 2. $\|\varphi_k\| = 1$; 3. $\lim |\varphi_k|_A^2 = \lambda_1$; 4. es existiert ein Element $u_1 \in H$ mit $\|\varphi_k - u_1\| \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Wir bemerken, daß dann auch

$$\|\varphi_k - \varphi_m\| \underset{k,\, m\to\infty}{\to} 0 \tag{2}$$

gilt. Es ist unser Ziel zu beweisen, daß $u_1 \in H_A$ und $|u_1|_A^2 = \lambda_1$ ist.

Wir nehmen ein beliebiges Element $\eta_k \in H_A$, und es sei t eine beliebige reelle Zahl. Das Element $\varphi_k + t\,\eta_k$ gehört zum Raum H_A und ist im allgemeinen verschieden von Null. Setzen wir dasselbe in den Quotienten (4.2) ein, so erhalten wir

$$\frac{|\varphi_k + t\,\eta_k|_A^2}{\|\varphi_k + t\,\eta_k\|^2} \geqq \inf \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \lambda_1 .$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner ergibt sich

$$[\varphi_k + t\,\eta_k, \varphi_k + t\,\eta_k]_A - \lambda_1 (\varphi_k + t\,\eta_k, \varphi_k + t\,\eta_k) \geqq 0 ,$$

woraus

$$t^2 \{|\eta_k|_A^2 - \lambda_1 \|\eta_k\|^2\} + 2\,t\,\{[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)\} + |\varphi_k|_A^2 - \lambda_1 \|\varphi_k\|^2 \geqq 0$$

folgt. Da das quadratische Polynom auf der linken Seite für beliebiges reelles t nicht negativ ist, so ist seine Diskriminante nicht positiv, und es gilt

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqq \sqrt{|\eta_k|_A^2 - \lambda_1 \|\eta_k\|^2}\,\sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1};$$

dabei wurde berücksichtigt, daß $\|\varphi_k\| = 1$ ist.

Wir verschärfen die letzte Ungleichung, indem wir den Subtrahenden unter der ersten Wurzel weglassen:

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqq |\eta_k|_A \sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1} . \tag{3}$$

Die Elemente $\eta_k \in H_A$ waren bisher beliebig. Wir verlangen jetzt, daß sie gleichmäßig beschränkt sind, d. h. für beliebiges k gilt

$$|\eta_k|_A \leqq C , \qquad C = \text{const} . \tag{4}$$

Dann folgt aus der Ungleichung (3)

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqq C \sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1} . \tag{5}$$

In der Ungleichung (5) konvergiert die rechte und somit auch die linke Seite gegen Null, und diese Konvergenz ist gleichmäßig bezüglich der Elemente η_k, welche der Ungleichung (4) genügen. Demzufolge setzen wir

$$\eta_k = \varphi_k - \varphi_m ,$$

wobei der Index m beliebig ist. Eine derartige Wahl der η_k ist auf Grund der

folgenden Überlegungen zulässig: Die Zahlenfolge $|\varphi_n|_A$ konvergiert gegen einen Grenzwert und ist deshalb beschränkt. Es existiert also eine Konstante C derart, daß $|\varphi_n|_A \leqq C$ ist; dann gilt aber $|\eta_k|_A \leqq 2\,C$.

Jetzt folgt aus Ungleichung (5), daß

$$\lim_{k\to\infty} \{[\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m]_A - \lambda_1 (\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m)\} = 0$$

ist, und diese Konvergenz ist gleichmäßig bezüglich m. Lassen wir dann $m \to \infty$ streben, so ergibt sich

$$\lim_{k,\, m\to\infty} \{[\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m]_A - \lambda_1 (\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m)\} = 0\,. \tag{6}$$

Da hierbei die Indizes k und m gleichberechtigt sind, so kann man ihre Reihenfolge ändern:

$$\lim_{k,\, m\to\infty} \{[\varphi_m, \varphi_m - \varphi_k]_A - \lambda_1 (\varphi_m, \varphi_m - \varphi_k)\} = 0\,. \tag{7}$$

Durch Addition der Gleichungen (6) und (7) erhalten wir

$$\lim_{k,\, m\to\infty} \{|\varphi_k - \varphi_m|_A^2 - \lambda_1 \|\varphi_k - \varphi_m\|^2\} = 0\,,$$

und auf Grund der Beziehung (2) gilt somit

$$|\varphi_k - \varphi_m|_A^2 \underset{k,\, m\to\infty}{\to} 0\,. \tag{8}$$

Die Minimalfolge ist also im Raum H_A in sich konvergent. Da aber dieser Raum vollständig ist, so konvergiert die Folge $\{\varphi_k\}$ in H_A, und zwar gegen dasselbe Element, gegen das sie auch im Raum H konvergiert. Somit ergibt sich: $u_1 \in H_A$ und

$$|\varphi_k - u_1|_A \underset{k\to\infty}{\to} 0\,.$$

Dann gilt aber

$$|u_1|_A^2 = \lim_{k\to\infty} |\varphi_k|_A^2 = \lambda_1;$$

dabei ist

$$\|u_1\| = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\| = 1\,.$$

Somit existiert ein Element $u_1 \in H_A$ derart, daß $\|u_1\| = 1$ und $|u_1|_A^2 = \lambda_1$ ist. Letzteres bedeutet, daß die untere Grenze des Funktionals (1) angenommen wird. Nach dem Satz 6.4.1 ist diese untere Grenze λ_1 der kleinste Eigenwert und u_1 das dazugehörige Eigenelement des Operators A.

§ 6. Ein Satz über das diskrete Spektrum

Der Formulierung und dem Beweis des Hauptsatzes dieses Paragraphen stellen wir folgende Bemerkung voran.

Wir nehmen an, daß die ersten n Eigenwerte

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$$

sowie die dazugehörigen, in der Metrik des Raumes H orthonormierten Eigenelemente

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

des Operators A gegeben seien.

Wir betrachten das Funktional[1])

$$\Psi_n(u) = |u|_A^2, \qquad u \in H_A^{(n)}, \qquad ||u|| = 1. \tag{1}$$

Dieses ist vom Funktional (5.1) verschieden, da es auf einer engeren Menge definiert ist. Wir bezeichnen

$$\lambda_{n+1} = \inf \Psi_n(u) = \inf |u|_A^2,$$

wobei das Infimum über alle $u \in H_A^{(n)}$ mit $||u|| = 1$ genommen wird.

Wir konstruieren für das Funktional (1) eine Minimalfolge. Wenn sich aus dieser Folge eine Teilfolge auswählen läßt, welche in der Metrik des Raumes H konvergiert, dann ist λ_{n+1} der $(n+1)$-te Eigenwert, und das Grenzelement der ausgewählten Teilfolge ist das $(n+1)$-te Eigenelement des Operators A.

Den Beweis dieser Behauptung führt man völlig analog zum Beweis des Satzes 6.5.1.

Definition. Der Raum H sei unendlichdimensional. Wir sagen, der symmetrische Operator A besitze ein *diskretes Spektrum*, wenn

1. der Operator A eine unendliche Folge von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ besitzt, welche nur im Unendlichen einen Häufungspunkt hat;

2. die Folge der Eigenelemente $\{u_n\}$ im Raum H vollständig ist.

Die Existenz eines einzigen Häufungspunktes im Unendlichen bedeutet, daß sich die Eigenwerte nach der Größe ihrer Absolutbeträge ordnen lassen:

$$|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq \cdots \leqq |\lambda_n| \leqq \cdots,$$

wobei $|\lambda_n| \to \infty$ strebt. Wenn ein positiv-definiter Operator ein diskretes Spektrum besitzt, dann lassen sich seine Eigenwerte einfach nach ihrer Größe ordnen:

$$0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \leqq \ldots, \qquad \lambda_n \to \infty.$$

Satz 6.6.1. *Ein positiv-definiter Operator eines unendlichdimensionalen* Hilbert-*Raumes besitze die Eigenschaft, daß eine beliebige, in der energetischen Metrik beschränkte Menge in der Metrik des Ausgangsraumes kompakt ist. Dann ist das verallgemeinerte Spektrum dieses Operators diskret.*

Beweis. 1. Wir betrachten die Zahl

$$\lambda_1 = \inf |u|^2, \qquad u \in H_A, \qquad ||u|| = 1,$$

und konstruieren eine Minimalfolge $\{\omega_k\}$. Dies bedeutet folgendes:

$$\text{a) } \omega_k \in H_A; \qquad \text{b) } ||\omega_k|| = 1; \qquad \text{c) } \lim_{k\to\infty} |\omega_k|^2 = \lambda_1.$$

Da jede konvergente Zahlenfolge beschränkt ist, so existiert eine Konstante C derart, daß $|\omega_k| \leqq C$ ist. Letzteres bedeutet die Beschränktheit der Minimal-

[1]) Wegen der Definition des Unterraumes $H_A^{(n)}$ siehe § 4.

folge in der Metrik von H_A. Auf Grund der Bedingung des Satzes ist dann diese Folge kompakt in der Metrik des Ausgangsraumes, und nach Satz 6.5.1 ist λ_1 der kleinste Eigenwert des Operators; das dazugehörige Eigenelement bezeichnen wir mit u_1.

2. Wir nehmen jetzt an, daß bereits die ersten n Eigenwerte

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

und die dazugehörigen Eigenelemente

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

ermittelt seien. Wir setzen $\lambda_{n+1} = \inf |u|^2$, $u \in H_A^{(n)}$, $||u|| = 1$, und konstruieren eine Minimalfolge $\{\omega_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Dann gilt $|\omega_k^{(n)}|^2 \underset{k\to\infty}{\to} \lambda_{n+1}$, und folglich existiert eine Konstante C mit

$$|\omega_k^{(n)}| \leqq C .$$

Die Folge $\{\omega_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist demnach kompakt in der Metrik des Ausgangsraumes. Nach der an den Anfang dieses Paragraphen gestellten Bemerkung ist dann λ_{n+1} der $(n + 1)$-te Eigenwert des Operators A, und es existiert ein zu diesem Wert gehöriges Eigenelement u_{n+1}.

Dieser Prozeß bricht ab, wenn sich ab einem gewissen n die Bedingungen $||u|| = 1$ und $u \in H_A^{(n)}$ widersprechen. Das wird eintreten, wenn der Raum $H_A^{(n)}$ nur aus dem Nullelement besteht; letzteres ist nur dann der Fall, wenn H_A ein endlichdimensionaler Raum ist. Da aber H_A in H dicht ist, so ist H_A dann und nur dann endlichdimensional, wenn der Raum H endlichdimensional ist. Wir betrachten aber nur den Fall eines unendlichdimensionalen Raumes. Somit bricht dieser Prozeß nicht ab, und wir erhalten eine unendliche Folge von Eigenwerten

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \leqq \cdots \tag{2}$$

sowie eine Folge dazugehöriger Eigenelemente

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, \tag{3}$$

welche in den Räumen H und H_A orthogonal und im Raum H normiert sind.

3. Wir beweisen jetzt, daß die Folge der Eigenwerte gegen Unendlich strebt. Wir nehmen das Gegenteil an: Die Folge $\{\lambda_n\}$ sei beschränkt,

$$\lambda_n \leqq K = \text{const} .$$

Dann gilt

$$|u_n| = \sqrt{\lambda_n} \leqq \sqrt{K};$$

die Folge der Eigenelemente ist beschränkt in H_A und somit kompakt in der Metrik des Raumes H. Es ergibt sich also, daß eine in H orthogonale und normierte Folge in diesem Raum kompakt ist. Das ist aber bekanntlich nicht möglich.

4. Wir beweisen jetzt die Vollständigkeit des Systems der Eigenelemente im Raum H_A. Wir nehmen das Gegenteil an und betrachten den Teilraum $H_A^{(\infty)}$

des Raumes H_A, der zu allen Eigenelementen u_n, $n = 1, 2, \ldots$, orthogonal ist. Dieser Teilraum enthält von Null verschiedene und folglich auch normierte Elemente. Wir setzen

$$\lambda_\infty = \inf |u|^2, \qquad u \in H_A^{(\infty)}, \qquad ||u|| = 1 .$$

Durch wortwörtliche Wiederholung der weiter oben angestellten Überlegungen erhalten wir, daß λ_∞ ein Eigenwert des gegebenen Operators ist.

Eine Gegenüberstellung der Zahlen λ_∞ und λ_n zeigt, daß diese die unteren Grenzen ein und derselben Größe $\frac{|u|_A^2}{||u||^2}$ auf den verschiedenen Mengen $H_A^{(\infty)}$ und $H_A^{(n)}$ darstellen. Da die erste Menge eine Teilmenge der zweiten ist, so ist auf ihr das Infimum größer (höchstens gleich) demselben auf der zweiten Menge. Dann gilt also $\lambda_\infty \geqq \lambda_n$, was aber unsinnig ist, da die Folge $\{\lambda_n\}$ nicht beschränkt ist. Aus dem sich ergebenden Widerspruch folgt die Vollständigkeit der Folge $\{u_n\}$ im Raum H_A.

5. Wir beweisen schließlich, daß die Folge der Eigenelemente auch im Raum H vollständig ist. Wir nehmen ein beliebiges $u \in H_A$. Da das System (3) im Raum H_A vollständig ist, so existieren für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N sowie gewisse Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ derart, daß

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right|_A < \varepsilon$$

ist.

Auf Grund der Ungleichung (3.3) des Kap. 5 gilt dann aber

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{\gamma} .$$

Somit kann ein beliebiges Element des energetischen Raumes durch eine Linearkombination der Elemente (3) in der Metrik des Ausgangsraumes approximiert werden.

Es sei jetzt $u \in H$. Da die Menge H_A dicht in H ist, so gibt es für eine beliebige positive Zahl ε ein Element $u' \in H_A$ derart, daß

$$||u - u'|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Jetzt wählen wir die Zahlen N und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ so, daß die Ungleichung

$$\left\| u' - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist. Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \varepsilon .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 7. Das STURM-LIOUVILLEsche Problem

Wir betrachten den Operator

$$A\,u = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{du}{dx}\right] + q(x)\,u \tag{1}$$

auf der Menge $D(A)$ aller auf dem Segment $[a, b]$ stetigen Funktionen, welche eine absolut stetige erste sowie eine quadratisch summierbare zweite Ableitung besitzen und welche den Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{2}$$

genügen. An die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ stellen wir dieselben Bedingungen wie im § 8 des Kap. 5. Diese Bedingungen waren folgende: Die Funktionen $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ sind stetig auf dem Segment $[a, b]$, $p(x) \geqq p_0$, wobei p_0 eine positive Konstante ist, und $q(x) \geqq 0$. Das Problem besteht nun in der Untersuchung des Spektrums des Operators A.

Wir werden beweisen, daß dieser Operator im Raum $L_2(a, b)$ ein diskretes Spektrum besitzt. Wie wir wissen, ist der Operator A positiv-definit, und es genügt somit, sich davon zu überzeugen, daß jede in dem Raum H_A beschränkte Menge im Raum

$$H = L_2(a, b)$$

kompakt ist.

Auf Grund der Formel (8.7) des Kap. 5 gilt

$$|u|^2 = \int_a^b [p(x)\,u'^2 + q(x)\,u^2]\,dx\,,$$

woraus

$$|u|^2 \geqq p_0 \int_a^b u'^2\,dx \tag{3}$$

folgt.

Die weiteren Überlegungen stützen sich auf den folgenden Satz, den wir vorläufig ohne Beweis angeben. Ein allgemeinerer Satz (siehe Satz 7.2.2) ist im nachfolgenden § 2 des Kap. 7 bewiesen.

Satz 6.7.1. *Die Funktion $K(x, t)$ sei im Quadrat $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ fast überall definiert, meßbar und beschränkt. Dann überführt der Integraloperator*

$$\int_a^b K(x, t)\,u(t)\,dt \tag{4}$$

jede im Raum $L_2(a, b)$ beschränkte Menge von Funktionen in eine in demselben Raum kompakte Menge von Funktionen.

Für die Funktionen $u \in H_A$ gilt die Beziehung

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt\,. \tag{5}$$

Wir betrachten die beschränkte Funktion

$$K(x, t) = \begin{cases} 1\,, & a \leqq t \leqq x\,, \\ 0\,, & x < t \leqq b \end{cases}$$

und schreiben dann die letzte Gleichung in der Form

$$u(x) = \int_a^b K(x, t)\, u'(t)\, dt\,.$$

Es sei jetzt eine Menge $\mathfrak{M}$ von Funktionen gegeben, welche in der energetischen Metrik beschränkt ist:

$$\forall\, u \in \mathfrak{M}: \quad |u| \leqq C = \text{const}\,, \qquad \mathfrak{M} \subset H_A\,. \tag{6}$$

Dann folgt aus der Ungleichung (3)

$$\int_a^b u'^2(t)\, dt \leqq \frac{C^2}{p_0}\,, \qquad \|u'\| \leqq \frac{C}{\sqrt{p_0}}\,.$$

Somit ist die Menge der Ableitungen u' mit $u \in \mathfrak{M}$ im Raum $L_2(a, b)$ beschränkt. Da nun der Operator (5) eine beliebige, in $L_2(a, b)$ beschränkte Menge in eine kompakte Menge desselben Raumes überführt, so ist die Menge $\mathfrak{M}$ kompakt im Raum $L_2(a, b)$. Nach dem Satz 6.6.1 ist dann das Spektrum des Operators A diskret: Dieser Operator besitzt mithin eine unendliche Folge von Eigenwerten

$$0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \leqq \cdots, \qquad \lambda_n \to \infty\,, \tag{7}$$

und dazugehörigen Eigenfunktionen

$$u_1(x),\, u_2(x),\, \ldots,\, u_n(x),\, \ldots, \tag{7'}$$

bezüglich derer man annehmen darf, daß $\|u\| = 1$ und $(u_k, u_m) = 0$ $(k \neq m)$ ist. Das System (7′) ist dabei in jedem der Räume $L_2(a, b)$ und H_A vollständig. In der energetischen Metrik sind die Eigenfunktionen nach wie vor orthogonal: $[u_k, u_m] = 0$ $(k \neq m)$; sie sind dort jedoch nicht normiert, da $|u_n| = \sqrt{\lambda_n}$ ist.

Wir erinnern daran, daß das Aufsuchen des Spektrums des im vorliegenden Paragraphen betrachteten Operators A folgendem Problem gleichwertig ist: Gesucht sind die Werte des Parameters λ, für welche (verallgemeinerte) nicht triviale Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right) - q(x)\, u + \lambda\, u = 0$$

existieren, die den Randbedingungen (2) genügen.

Es läßt sich auch ein allgemeineres Problem formulieren. Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right) - q(x)\, u + \lambda\, r(x)\, u = 0 \tag{8}$$

mit den Randbedingungen (2); an die Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$ stellen wir die früheren

Bedingungen, bezüglich $r(x)$ nehmen wir an, daß $r \in C[a, b]$ und $r(x) \geqq r_0 = \text{const} > 0$ gilt. Die Untersuchung des Spektrums dieses Problems steht in Übereinstimmung mit der allgemeinen Konzeption des vorliegenden Kapitels.

Dividieren wir beide Seiten der Gleichung (8) durch $r(x)$, dann bringen wir diese auf die Gestalt

$$\frac{1}{r(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)\,u\right] + \lambda\,u = 0\,. \tag{9}$$

Wir führen jetzt den Raum $L_2(r; a, b)$ derjenigen Funktionen ein, welche im Intervall (a, b) mit der Gewichtsfunktion $r(x)$ quadratisch summierbar sind[1]); die Norm und das Skalarprodukt in diesem Raum werden durch die Formeln

$$\|u\|^2 = \int_a^b r(x)\,u^2(x)\,dx\,, \qquad (u, v) = \int_a^b r(x)\,u(x)\,v(x)\,dx \tag{10}$$

festgelegt. In diesem Raum betrachten wir den Operator B, der nach der Vorschrift

$$B\,u = \frac{1}{r(x)}\left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\,u\right] \tag{11}$$

gebildet wird. Wir definieren diesen Operator auf derselben Funktionenmenge wie den weiter oben betrachteten Operator A; $D(B)$ ist also die Menge der auf dem Segment $[a, b]$ stetigen Funktionen, welche den Bedingungen (2) genügen und welche auf demselben Segment absolut stetige erste Ableitungen sowie quadratisch summierbare zweite Ableitungen besitzen.

Der Operator B ist positiv-definit im Raum $H = L_2(r; a, b)$. In der Tat, dieser Operator ist symmetrisch: Für $u, v \in D(B)$ gilt

$$(B\,u, v) = \int_a^b u\left[-\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + q\,v\right]dx = \int_a^b \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q\,u\,v\right)dx = (u, B\,v)\,.$$

Daß er positiv-definit ist, beweisen wir nun wie folgt: Zunächst gilt

$$(B\,u, u) = \int_a^b (p\,u'^2 + q\,u^2)\,dx \geqq p_0 \int_a^b u'^2\,dx\,. \tag{12}$$

Da die Funktion $u(x)$ in den Endpunkten des Segments $[a, b]$ verschwindet, so ist $u(a) = 0$ und

$$\sqrt{r(x)}\,u(x) = \sqrt{r(x)}\int_a^x u'(t)\,dt\,.$$

Als stetige Funktion auf einem Segment ist $r(x)$ beschränkt. Es sei $r(x) \leqq r_1$, dann ergibt sich

$$r(x)\,u^2(x) \leqq r_1\left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2 \leqq r_1\,(x - a)\int_a^x u'^2(t)\,dt \leqq r_1\,(b - a)\int_a^b u'^2(t)\,dt\,.$$

Durch Integration dieser Ungleichung nach x in den Grenzen von a bis b erhalten wir

$$\int_a^b u'^2(t)\,dt \geqq \frac{1}{r_1\,(b - a)^2}\int_a^b r(x)\,u^2(x)\,dx = \frac{1}{r_1\,(b - a)^2}\,\|u\|^2\,.$$

---

[1]) Offensichtlich bestehen die Räume $L_2(r; a, b)$ und $L_2(a, b)$ aus denselben Funktionen.

Schließlich gilt

$$(B\,u, u) \geqq \frac{p_0}{r_1\,(b-a)^2} \int\limits_a^b r(x)\, u^2(x)\, dx = \frac{p_0}{r_1\,(b-a)^2}\, ||u||^2 ,$$

womit die positive Definitheit des Operators B bewiesen ist.

Wir beweisen schließlich, daß eine beliebige, in H_B beschränkte Menge im Raum $H = L_2(r;\, a, b)$ kompakt ist. Wie man sich leicht überzeugt, besteht der Raum H_B aus denselben Funktionen wie der energetische Raum des Operators (1)—(2); diese Funktionen genügen im besonderen den Bedingungen (2), und für sie gilt somit die Formel (5).

Es sei $\mathfrak{M} \subset H_B$ eine Teilmenge von Funktionen, die in der Norm des Raumes H_B beschränkt ist:

$$|\, u\,|_B \leqq C = \text{const}\,, \qquad u \in \mathfrak{M}\,.$$

Aus Formel (12) ersieht man leicht, daß

$$|\, u\,|_B^2 = \int\limits_a^b (p\, u'^2 + q\, u^2)\, dx \geqq p_0 \int\limits_a^b u'^2\, dx$$

und folglich

$$||u'||^2 = \int\limits_a^b u'^2\, dx \leqq \frac{C}{p_0}\,, \qquad u \in \mathfrak{M}\,, \tag{13}$$

gilt. Die Formel (5) transformieren wir auf die Gestalt

$$\sqrt{r(x)}\; u(x) = \int\limits_a^b K_1(x, t)\; u'(t)\; dt \tag{14}$$

mit

$$K_1(x, t) = \begin{cases} \sqrt{r(x)}\,, & a \leqq t < x\,, \\ 0\,, & x < t \leqq b\,. \end{cases}$$

Da die Funktion $K_1(x, t)$ beschränkt ist, so überführt der Integraloperator (14) die Menge der Funktionen $u'(x)$, welche im Raum $L_2(a, b)$ beschränkt ist [vgl. die Ungleichung (13)], in die im Raum $L_2(a, b)$ kompakte Menge der Funktionen $\sqrt{r(x)}\, u(x)$. Dies bedeutet nun folgendes: Aus der Menge $\mathfrak{M}$ läßt sich eine Folge $\{u_n(x)\}$ auswählen derart, daß gilt

$$\left|\left|\sqrt{r}\;\, u_n - \sqrt{r}\;\, u_m\right|\right|^2_{L_2(a,\, b)} = \int\limits_a^b r(x)\, [u_n(x) - u_m(x)]^2\, dx \underset{n,\, m \to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Die letzte Beziehung ist aber einfach mit der Behauptung

$$||u_n - u_m||_{L_2(r;\, a,\, b)} \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

identisch. Aus der Menge $\mathfrak{M}$ läßt sich also eine Folge auswählen, welche in der Norm des Raumes $L_2(r;\, a, b)$ in sich konvergiert, das heißt die Menge $\mathfrak{M}$ ist kompakt im Raum $L_2(r;\, a, b)$. Nach dem Satz 6.6.1 besitzt der Operator B ein diskretes Spektrum oder, anders ausgedrückt, es existiert eine abzählbare Menge von Zahlen $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, für die das Problem (8), (2) nicht triviale Lösungen besitzt, und die Menge dieser Lösungen ist vollständig sowohl in $L_2(r;\, a, b)$, als auch in H_B. Bezeichnet man diese Lösungen nach wie vor mit $u_n(x)$, dann sind diese orthonormiert in $L_2(r;\, a, b)$ und orthogonal in H_B:

$$\int\limits_a^b r(x)\; u_n(x)\; u_m(x)\; dx = \delta_{mn},$$

$$\int\limits_a^b [p(x)\; u_n'(x)\; u_m'(x) + q(x)\; u_m(x)\; u_n(x)]\; dx = 0\,, \qquad m \neq n\,.$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b [p(x)\, u_n'^2(x) + q(x)\, u_n^2(x)]\, dx = \lambda_n .$$

Die Zahlen λ_n sind sämtlich einfache Eigenwerte. Letzteres folgt daraus, daß die Differentialgleichung (8) von zweiter Ordnung ist. Wenn nämlich zu dem Eigenwert λ_n zwei linear unabhängige Eigenfunktionen $u_n(x)$ und $u_m(x)$ gehören, dann ist zunächst $u_n'(0) \neq 0$ — anderenfalls wäre die Funktion $u_n(x)$, welche nicht identisch gleich Null ist, eine Lösung des CAUCHY-Problems für die homogene Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) - q\,u + \lambda_n\,r\,u = 0 \tag{15}$$

mit den homogenen Anfangsbedingungen

$$u_n(0) = u_n'(0) = 0\,,$$

was aber dem Unitätssatz für das CAUCHY-Problem widerspricht. Analog ergibt sich, daß $u_m'(0) \neq 0$ ist. Dann ist aber die Funktion

$$u(x) = \frac{u_n(x)}{u_n'(0)} - \frac{u_m(x)}{u_m'(0)}\,,$$

welche nicht identisch gleich Null ist, eine Lösung desselben homogenen CAUCHY-Problems, was ebenfalls nicht sein kann.

§ 8. Einige Elementarfälle

Bei der eigentlichen Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Operators auf der Grundlage der Sätze der §§ 4—7 stößt man auf große technische Schwierigkeiten. Deshalb sind jene Spezialfälle, wo sich das Spektrum des Operators mit elementaren Mitteln auffinden läßt, von besonderem Interesse. Zwei solcher Fälle werden nachstehend behandelt.

1. Wir betrachten den einfachsten Spezialfall für den Operator A aus § 7, wo $p(x) \equiv 1$ und $q(x) \equiv 0$ ist. Das Problem besteht dann in der Bestimmung derjenigen Werte λ, für die die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda\,u = 0 \tag{1}$$

eine nicht triviale Lösung besitzt, welche den Bedingungen

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{2}$$

genügt. Das allgemeine Integral der Gleichung (1) läßt sich in folgender Form angeben:

$$u(x) = C \sin\sqrt{\lambda}\,(x - a) + C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,(x - a)\,.$$

Die Bedingung $u(a) = 0$ ergibt $C_1 = 0$ und $u(x) = C \sin\sqrt{\lambda}\,(x - a)$. Aus der Bedingung $u(b) = 0$ erhalten wir $C \sin\sqrt{\lambda}\,(b - a) = 0$. Dabei ist notwendigerweise $C \neq 0$; anderenfalls ergibt sich die triviale Lösung $u = 0$. Folglich ist $\sin\sqrt{\lambda}\,(b - a) = 0$. Hieraus erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_n = \frac{n^2\,\pi^2}{(b - a)^2}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

und die Eigenfunktionen

$$u_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}. \tag{4}$$

Die Konstante C_n bestimmen wir aus der Normierungsbedingung

$$||u||^2 = C_n^2 \int_a^b \sin^2 n\pi \frac{x-a}{b-a}\, dx = 1\,,$$

womit sich $C_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}$ und

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \tag{4a}$$

ergibt.

2. Wir bestimmen die nicht trivialen Lösungen der Gleichung (1) mit den Randbedingungen

$$u'(a) = u'(b) = 0\,. \tag{5}$$

Für das allgemeine Integral ergibt sich wiederum $u(x) = C \sin \sqrt{\lambda}(x-a) + C_1 \times \times \cos \sqrt{\lambda}(x-a)$. Aus der Bedingung $u'(a) = 0$ folgt $C = 0$, und aus der Bedingung $u'(b) = 0$ finden wir $\sin \sqrt{\lambda}(b-a) = 0$. Daraus erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

sowie die normierten Eigenfunktionen

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

§ 9. Das Mini-Max-Prinzip

Es sei A ein positiv-definiter Operator, der die Bedingung des Satzes 6.6.1 erfüllt: Eine beliebige, in der energetischen Metrik beschränkte Menge ist kompakt in der Metrik des Ausgangsraumes. Dann ist das Spektrum dieses Operators diskret; λ_n seien die Eigenwerte und u_n die dazugehörigen, im Ausgangsraum orthonormierten Eigenelemente des Operators A. Wir stellen folgendes Problem: Gesucht ist das Minimum des Funktionals

$$\Phi_A(u) = |u|_A^2 \tag{1}$$

auf der Menge derjenigen Elemente des energetischen Raumes H_A, welche den zusätzlichen Bedingungen

$$||u||^2 = 1 \tag{2}$$

und

$$(u, v_1) = 0, (u, v_2) = 0, \ldots, (u, v_{k-1}) = 0\,, \tag{3}$$

wobei $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ feste Elemente des Ausgangsraumes H sind, genügen. Die soeben beschriebene Menge von Elementen betrachten wir als Definitions-

gebiet des Funktionals Φ_A und bezeichnen sie mit $D(\Phi_A)$. Wir beweisen jetzt, daß auf der Menge $D(\Phi_A)$ das Minimum des Funktionals Φ_A angenommen wird. Zunächst bemerken wir, daß die Funktionale (u, v_j) in H_A beschränkt sind:

$$|(u, v_j)| \leqq ||u|| \cdot ||v_j|| \leqq \frac{||v_j||}{\gamma_0} |u|_A .$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}_k$ die Menge derjenigen Elemente des Raumes H_A welche die Bedingungen (3) erfüllen. Diese Menge ist offenbar linear. Sie ist auch abgeschlossen in H_A: Wenn gilt $u_n \in \mathfrak{H}_k$, $|u_n - u|_A \underset{n\to\infty}{\to} 0$ und $(u_n, v_j) = 0$, dann ist, auf Grund der Beschränktheit der Funktionale (3) im Raum H_A, $(u, v_j) = 0$. Folglich ist $\mathfrak{H}_k$ ein Teilraum des Raumes H_A.

Unser Variationsproblem läßt sich jetzt wie folgt formulieren: Gesucht ist das Minimum des Funktionals (1) auf der Menge derjenigen Elemente des Teilraumes $\mathfrak{H}_k$, welche der zusätzlichen Bedingung (2) genügen. Jetzt genügt es, die Überlegungen des Satzes 6.5.1 zu wiederholen, um sich davon zu überzeugen, daß in $\mathfrak{H}_k$ ein Element w mit $||w|| = 1$ existiert, welches das Minimum unseres Funktionals realisiert. Dieses Minimum bezeichnen wir mit $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$.

Das Mini-Max-Prinzip besteht nun in der Gleichung

$$\max \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \lambda_k ; \tag{4}$$

das Maximum wird dabei über alle möglichen $(k-1)$-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ von Elementen des Ausgangsraumes H gebildet. Der Beweis des Mini-Max-Prinzips besteht in dem Nachweis der folgenden zwei Behauptungen:
1. $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \leqq \lambda_k$ und 2. es existieren Elemente $v_j^{(0)} \in H$ derart, daß $\lambda(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_{k-1}^{(0)}) = \lambda_k$ ist. Wir beweisen jetzt diese Behauptungen.

Es sei u ein beliebiges Element des energetischen Raumes H_A. Das System $\{u_n\}$ ist orthonormiert und vollständig im Raum H; wir entwickeln nach diesem System die Elemente u und v_j:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n , \tag{5}$$

$$v_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_{jn} u_n , \quad j = 1, 2, \ldots, k .$$

Das System $\{u_n\}$ ist auch orthogonal und vollständig in H_A; dabei gilt $|u_n|_A^2 = \lambda_n$. Dann ist aber das System $\{u_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ in H_A orthonormiert und vollständig; die Entwicklung des Elementes $u \in H_A$ nach diesem System hat offenbar die Gestalt

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, a_n \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} . \tag{6}$$

Auf Grund der Abgeschlossenheitsrelation gilt

$$|u|_A^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2 . \tag{7}$$

Wir nehmen jetzt als u die endliche Summe

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{k} a_n u_n , \tag{8}$$

wobei die Zahlen a_n beliebig sind. Verlangen wir, daß das Element (8) die Bedingungen (3) erfüllt, dann erhalten wir ein System von $k - 1$ linearen homogenen Gleichungen in den k Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\sum_{n=1}^{k} b_{jn} a_n = 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, k - 1 . \tag{9}$$

Da die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist, so besitzt das System (9) eine unendliche Lösungsmenge. Wenigstens eine dieser Lösungen läßt sich derart wählen, daß

$$||\bar{u}||^2 = \sum_{n=1}^{k} a_k^2 = 1$$

ist. Dann ist $\bar{u} \in D(\Phi_A)$, und nach Formel (7) gilt dabei

$$|\bar{u}|_A^2 = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n a_n^2 .$$

Ersetzt man hierbei alle λ_n durch die größte Zahl λ_k, so erhält man

$$|\bar{u}|_A^2 \leqq \lambda_k \sum_{n=1}^{k} a_n^2 = \lambda_k .$$

Da aber $\bar{u}$ ein Element der Menge $D(\Phi_A)$ ist, so gilt um so mehr

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \min_{u \in D(\Phi_A)} \Phi_A(u) \leqq \lambda_k .$$

Setzt man nun

$$v_j^0 = u_j , \quad j = 1, 2, \ldots, k ,$$

dann wird in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen angenommen. Die Gültigkeit des Mini-Max-Prinzips ist damit bewiesen.

Aus dem Mini-Max-Prinzip ergibt sich ein wichtiger Satz, der in vielen Fällen einen Vergleich der Eigenwerte zweier Operatoren zuläßt. Bevor wir diesen Satz formulieren, führen wir noch einen neuen Begriff ein.

Es seien A und B positiv-definite Operatoren in ein und demselben HILBERT-Raum H. Wir sagen, der *Operator A sei nicht kleiner als der Operator B* und schreiben dafür $A \geqq B$ oder $B \leqq A$, wenn 1. ein beliebiges Element des Raumes H_A auch zum Raum H_B gehört und 2. für ein beliebiges Element $u \in H_A$ die Ungleichung

$$|u|_A \geqq |u|_B \tag{10}$$

gilt.

Satz 6.9.1. *Es seien A und B positiv-definite Operatoren, welche der Bedingung des Satzes* 6.6.1 *sowie der Bedingung $A \geqq B$ genügen. Wenn λ_k und μ_k die nach ihrer Größe geordneten Eigenwerte der Operatoren A und B sind, dann gilt*

$$\lambda_k \geqq \mu_k , \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ und $\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ die Minima der Funktionale $|u|_A^2$ und $|u|_B^2$ mit den Bedingungen (2) und (3). Mit $\tilde{u}$ bezeichnen wir das Element, auf dem das erste Minimum angenommen wird. Auf Grund der Ungleichung (10) ergibt sich

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = |\tilde{u}|_A^2 \geqq |\tilde{u}|_B^2 \geqq \min |u|_B^2 = \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) ,$$

dann gilt aber

$$\max \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \geqq \max \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) ,$$

was mit der Ungleichung (11) identisch ist.

§ 10. Über das Wachstum der Eigenwerte beim STURM-LIOUVILLEschen Problem

Wir bezeichnen mit λ_n die Eigenwerte des Operators A aus dem STURM-LIOUVILLEschen Problem

$$A\,u = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + q\,u\,, \qquad u(a) = u(b) = 0\,. \tag{1}$$

An die Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$ stellen wir dieselben Bedingungen wie oben: $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ sind stetig, $p(x) \geqq p_0$ und $q(x) \geqq 0$ auf dem Segment $[a, b]$. Wie wir im § 8 des Kap. 5 gesehen haben, ist die Menge derjenigen Funktionen, welche den energetischen Raum des Operators (1) bilden, von den Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$ unabhängig, und es gilt

$$|u|_A^2 = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)\,u^2\right] dx\,. \tag{2}$$

Als stetige Funktionen auf einem Segment sind $p(x)$ und $q(x)$ beschränkt:

$$p(x) \leqq p_1\,, \qquad q(x) \leqq q_1\,, \qquad x \in [a, b]\,.$$

Wir setzen

$$A_0\,u = -\,p_0\frac{d^2u}{dx^2}\,, \qquad u(a) = u(b) = 0\,,$$

$$A_1\,u = -\,p_1\frac{d^2u}{dx^2} + q_1\,u\,, \qquad u(a) = u(b) = 0\,.$$

Die Operatoren A_0 und A_1 stellen gewisse Spezialfälle des Operators A dar, die man erhält, indem man $p(x) \equiv p_0$, $q(x) \equiv 0$ bzw. $p(x) \equiv p_1$, $q(x) \equiv q_1$ festlegt. Aus Formel (2) ergibt sich

$$|u|_{A_0}^2 = p_0\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\,, \qquad |u|_{A_1}^2 = p_1\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + q_1\int_a^b u^2\,dx\,.$$

Offenbar gilt

$$|u|_{A_0}^2 \leqq |u|_A^2 \leqq |u|_{A_1}^2$$

und somit

$$A_0 \leqq A \leqq A_1\,.$$

Wenn μ_k und ν_k die Eigenwerte der Operatoren A_0 bzw. A_1 sind, dann ist nach dem Satz 6.9.1

$$\mu_k \leqq \lambda_k \leqq \nu_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{3}$$

Die Zahlen μ_k und ν_k lassen sich leicht bestimmen.

Die Zahlen μ_k sind die Eigenwerte des Problems

$$p_0 \frac{d^2u}{dx^2} + \mu\, u = 0\,, \qquad u(a) = u(b) = 0\,.$$

Setzen wir hierbei $\frac{\mu}{p_0} = \lambda$, so gelangen wir zu der im § 8, Abschnitt 1 behandelten Aufgabe. Folglich ist

$$\mu_k = \frac{p_0\, \pi^2\, k^2}{(b-a)^2}\,. \tag{4}$$

Ebenso sind die Zahlen ν_k die Eigenwerte des Problems

$$p_1 \frac{d^2u}{dx^2} + (\nu - q_1)\, u = 0\,, \qquad u(a) = u(b) = 0\,,$$

und ein Vergleich mit den Ergebnissen des § 8 ergibt

$$\nu_k = \frac{p_1\, \pi^2\, k^2}{(b-a)^2} + q_1\,. \tag{5}$$

Die Beziehungen (3)—(5) liefern die folgende Ungleichung, welche die Wachstumsordnung der Eigenwerte beim STURM-LIOUVILLEschen Problem festlegt:

$$\frac{p_0\, \pi^2\, k^2}{(b-a)^2} \leqq \lambda_k \leqq \frac{p_1\, \pi^2\, k^2}{(b-a)^2} + q_1\,. \tag{6}$$

Übungsaufgabe

1. Man beweise, daß das Spektrum des Operators T_p (siehe Übungsaufgabe 1 und 2 aus Kap. 5) diskret ist.

Teil III

Elemente der Theorie der Integralgleichungen

KAPITEL 7

VOLLSTETIGE OPERATOREN

§ 1. Notwendige Kenntnisse aus der Funktionalanalysis

Im vorliegenden Paragraphen geben wir, größtenteils ohne Beweis, einige Begriffe und Tatsachen an, die für die Untersuchung von Integralgleichungen erforderlich sind. Eine ausführliche Darstellung dieser Fragen findet man z. B. in den Büchern von L. W. KANTOROWITSCH und G. P. AKILOW [1] oder von F. RIESZ und B. SZ.-NAGY [5], die im Literaturverzeichnis zu diesem Teil aufgeführt sind.

1. Ein linearer Operator des BANACH-Raumes X in den BANACH-Raum Y, welcher auf einer in X dichten Menge definiert ist, heißt *vollstetig*, wenn er eine beliebige beschränkte Teilmenge seines Definitionsgebietes in eine im Raum Y kompakte Menge überführt.

2. Jeder vollstetige Operator ist beschränkt. Die umgekehrte Behauptung gilt in endlichdimensionalen Räumen, sie gilt jedoch nicht für unendlichdimensionale Räume. Insbesondere ist in einem unendlichdimensionalen Raum der identische Operator nicht vollstetig.

Ein beschränkter, auf einer dichten Menge definierter vollstetiger Operator läßt sich durch Stetigkeit auf den ganzen Raum X fortsetzen. Im weiteren werden wir stets voraussetzen, daß eine solche Erweiterung bereits vorgenommen wurde.

3. Die Summe endlich vieler vollstetiger Operatoren ist ein vollstetiger Operator. Das Produkt eines vollstetigen Operators mit einem beschränkten Operator ist (unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren) ein vollstetiger Operator.

4. Endlichdimensionaler Operator heißt ein Operator der Gestalt

$$T u = \sum_{k=1}^{n} l_k(u)\, v_k\,, \tag{1}$$

wobei die Zahl n endlich ist und nicht von u abhängt; l_k sind lineare und beschränkte Funktionale in X und v_k feste Elemente des Raumes Y.

Jeder endlichdimensionale Operator ist vollstetig.

5. Es sei T_n, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge vollstetiger Operatoren von X in Y, und es existiere ein Operator T von X in Y derart, daß gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0 .$$

Dann ist T ein vollstetiger Operator.

6. Wenn T ein vollstetiger Operator ist, dann ist auch der zu ihm adjungierte Operator T^* vollstetig.

Im weiteren wird nur der Fall betrachtet, wo die Räume X und Y übereinstimmen.

Satz 7.1.1. *Es sei T ein vollstetiger Operator im* HILBERT-*Raum H. Für eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ läßt sich ein endlichdimensionaler Operator T_ε angeben derart, daß gilt*

$$\|T - T_\varepsilon\| \leqq \varepsilon . \tag{2}$$

Beweis. Wir bezeichnen mit S_1 die Einheitssphäre des Raumes H, d. h. die Menge aller Elemente des Raumes H, deren Norm gleich Eins ist. Mit $T(S_1)$ bezeichnen wir die Menge, auf die der Operator T die Menge S_1 abbildet. Da letztere Menge beschränkt und der Operator T vollstetig ist, so ist $T(S_1)$ eine kompakte Menge. Nach dem bekannten Satz von HAUSDORFF existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz der Menge $T(S_1)$, d. h., es existiert eine endliche Anzahl r von Elementen $v_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots, r$, mit folgenden Eigenschaften: Für ein beliebiges Element $u \in S_1$ läßt sich ein Element v_j auffinden derart, daß gilt

$$\|T u - v_j\| \leqq \varepsilon . \tag{3}$$

Aus der endlichen Folge $v_1, v_2, \ldots, v_r$ entfernen wir alle Elemente, die von den übrigen linear abhängig sind; auf die restlichen Elemente (ihre Anzahl sei s) wenden wir den Orthogonalisierungsprozeß nach E. SCHMIDT an. Als Ergebnis erhalten wir s Elemente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, für die $(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$ gilt, und jedes Element aus dem ε-Netz ist eine Linearkombination der Elemente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$:

$$v_k = \sum_{l=1}^{s} a_{kl}\, \varphi_l .$$

Die Ungleichung (3) nimmt jetzt die Gestalt

$$\left\| T u - \sum_{l=1}^{s} a_{jl}\, \varphi_l \right\| \leqq \varepsilon$$

an. Wir setzen

$$T_\varepsilon u = \sum_{l=1}^{s} (T u, \varphi_l)\, \varphi_l = \sum_{l=1}^{s} (u, T^* \varphi_l)\, \varphi_l . \tag{4}$$

Wie aus der Theorie der Orthogonalreihen bekannt ist, gilt nun

$$\|T u - T_\varepsilon u\| \leqq \left\| T u - \sum_{l=1}^{s} a_{jl}\, \varphi_l \right\| \leqq \varepsilon .$$

Diese Ungleichung gilt für ein beliebiges Element $u \in H$ mit $||u|| = 1$, und folglich ist $||T - T_\varepsilon|| \leqq \varepsilon$. Da gleichzeitig der Operator T_ε, wie man aus der Formel (4) ersieht, endlichdimensional ist, so ist der Satz bewiesen.

§ 2. Der FREDHOLMsche Operator

Es seien Ω eine meßbare (beschränkte oder unbeschränkte) Menge des m-dimensionalen euklidischen Raumes und x, ξ beliebige Punkte der Menge Ω. Die meßbare Funktion $K(x, \xi)$ heißt FREDHOLM*scher Kern*, wenn die Bedingung (wir beschränken uns auf den Fall eines reellen Kernes)

$$\int_\Omega \int_\Omega K^2(x, \xi)\, dx\, d\xi < \infty \tag{1}$$

erfüllt ist. Der Integraloperator

$$(K\, u)(x) = \int_\Omega K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi\,, \tag{2}$$

wobei $K(x, \xi)$ ein FREDHOLMscher Kern ist, heißt FREDHOLM*scher Operator.*

Wir erwähnen hier eine wichtige Klasse FREDHOLMscher Kerne. Wenn die Menge Ω ein endliches LEBESGUEsches Maß besitzt (z. B. wenn Ω beschränkt ist), dann ist jeder beschränkte Kern $K(x, \xi)$ ein FREDHOLMscher Kern. Ist nämlich $|K(x, \xi)| \leqq C = \text{const}$, dann gilt

$$\int_\Omega \int_\Omega |K^2(x, \xi)|\, dx\, d\xi \leqq C^2\, (\text{mes}\, \Omega)^2\,,$$

und die Ungleichung (1) ist erfüllt.

Satz 7.2.1. *Der* FREDHOLM*sche Operator ist auf dem ganzen Raum* $L_2(\Omega)$ *definiert und beschränkt. Dabei gilt*

$$||K|| \leqq \left\{\int_\Omega \int_\Omega K^2(x, \xi)\, dx\, d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Beweis. Es sei $u \in L_2(\Omega)$. Wir beweisen, daß dann das Integral (2) für fast alle $x \in \Omega$ existiert und eine in Ω quadratisch summierbare Funktion von x darstellt. Es gilt

$$|K(x, \xi)\, u(\xi)| \leqq \frac{1}{2}\, K^2(x, \xi) + \frac{1}{2}\, u^2(\xi)\,. \tag{4}$$

Da das Integral (1) konvergiert, so ist nach dem Satz von FUBINI die Funktion $K^2(x, \xi)$ für fast alle $x \in \Omega$ summierbar nach ξ; die Funktion $u^2(\xi)$ ist ebenfalls summierbar nach ξ. Folglich ist die rechte Seite der Ungleichung (4) summierbar nach ξ für fast alle x. Dann besitzt aber dieselbe Eigenschaft auch die linke Seite der Ungleichung (4), und das Integral (2) existiert für fast alle $x \in \Omega$.

Nach der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung gilt

$$|(K\, u)(x)|^2 \leqq \int_\Omega K^2(x, \xi)\, d\xi \int_\Omega u^2(\xi)\, d\xi = ||u||^2 \int_\Omega K^2(x, \xi)\, d\xi\,.$$

Durch Integration nach x gelangen wir zu der Ungleichung

$$||K u||^2 \leqq ||u||^2 \int_\Omega \int_\Omega K^2(x, \xi)\, dx\, d\xi ,$$

welche mit der Ungleichung (3) gleichbedeutend ist. Der Satz ist damit bewiesen.

Satz 7.2.2. *Der* FREDHOLM*sche Operator ist vollstetig im Raum* $L_2(\Omega)$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\Omega \times \Omega$ die Punktmenge des $2m$-dimensionalen euklidischen Raumes, die wie folgt definiert wird: Diese Menge besteht aus den Punkten $(z_1, z_2, \ldots, z_{2m})$, wobei beide Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ und $(z_{m+1}, z_{m+2} \ldots, z_{2m})$ zur Menge Ω gehören. Wenn $x \in \Omega$ und $\xi \in \Omega$ ist, dann kann man eine beliebige Funktion von x und ξ als Funktion betrachten, die auf der Menge $\Omega \times \Omega$ erklärt ist. Auch das Umgekehrte ist offensichtlich. Die Ungleichung (1) bedeutet, daß sich der FREDHOLMsche Kern als Element des Raumes $L_2(\Omega \times \Omega)$ auffassen läßt.

Da der Raum $L_2(\Omega)$ separabel ist, so kann man in ihm eine vollständige, abzählbare und orthonormierte Folge $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, auswählen. Dann ist die Folge

$$\varphi_k(x)\, \varphi_n(\xi), \qquad k, n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

orthonormiert im Raum $L_2(\Omega \times \Omega)$. Wir beweisen jetzt, daß die Folge (5) in diesem Raum vollständig ist.

Wir nehmen an, eine gewisse Funktion $\omega(x, \xi) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ sei orthogonal zu allen Funktionen der Folge (5):

$$\int_\Omega \int_\Omega \omega(x, \xi)\, \varphi_k(x)\, \varphi_n(\xi)\, dx\, d\xi = 0, \qquad k, n = 1, 2, \ldots .$$

Ersetzt man das mehrfache Integral durch ein iteriertes, so ergibt sich

$$\int_\Omega \varphi_k(x) \left\{ \int_\Omega \omega(x, \xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi \right\} dx = 0, \quad k, n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Wir halten jetzt den Index n fest und setzen

$$\int_\Omega \omega(x, \xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = \omega_n(x) .$$

Die Funktion $\omega(x, \xi)$ kann man als FREDHOLMschen Kern betrachten; dann folgt aus dem oben bewiesenen Satz 7.2.1, daß $\omega_n \in L_2(\Omega)$ ist.

Gleichung (6) nimmt jetzt die Gestalt

$$\int_\Omega \omega_n(x)\, \varphi_k(x)\, dx = 0 , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

an. Da aber die Folge $\{\varphi_k(x)\}$ in $L_2(\Omega)$ vollständig ist, so ergibt sich

$$\omega_n(x) = \int_\Omega \omega(x, \xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = 0 , \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Diese Gleichung gilt für fast alle $x \in \Omega$. Wir halten ein solches x fest. Dann ist $\omega(x, \xi)$ als Funktion von ξ orthogonal zu dem vollständigen System $\{\varphi_n(\xi)\}$. Daraus folgt $\omega(x, \xi) = 0$ für fast alle ξ, womit die Vollständigkeit des Systems (5) bewiesen ist.

Die Funktion $K(x, \xi)$ ist in eine FOURIER-Reihe nach dem System (5) entwickelbar. Diese Reihe habe die Gestalt

$$K(x, \xi) = \sum_{k, n=1}^{\infty} A_{kn} \varphi_k(x) \varphi_n(\xi) .$$

Wir setzen jetzt

$$K_\varepsilon(x, \xi) = \sum_{k, n=1}^{N} A_{kn} \varphi_k(x) \varphi_n(\xi)$$

und wählen dabei die Zahl N derart, daß gilt

$$\sum_{k>N \text{ oder } n>N} A_{kn}^2 < \varepsilon^2;$$

eine solche Wahl der Zahl N ist wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{k, n=1}^{\infty} A_{kn}^2$ möglich.

Außerdem setzen wir

$$K_\varepsilon'(x, \xi) = K(x, \xi) - K_\varepsilon(x, \xi)$$

und bezeichnen mit K_ε und K_ε' entsprechend die FREDHOLMschen Operatoren mit den Kernen $K_\varepsilon(x, \xi)$ und $K_\varepsilon'(x, \xi)$. Der Operator K_ε ist endlichdimensional, da

$$(K_\varepsilon u)(x) = \int_\Omega \sum_{k, n=1}^{N} A_{kn} \varphi_k(x) \varphi_n(\xi) u(\xi) d\xi =$$

$$= \sum_{k, n=1}^{N} A_{kn} \varphi_k(x) \int_\Omega \varphi_n(\xi) u(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{N} (u, \varphi_n) \psi_n(x)$$

mit

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{N} A_{kn} \varphi_k(x)$$

gilt. Wir schätzen jetzt die Norm des Operators K_ε' ab. Es gilt

$$K_\varepsilon'(x, \xi) = \sum_{k>N \text{ oder } n>N} A_{kn} \varphi_k(x) \varphi_n(\xi) .$$

Auf Grund der Abgeschlossenheitsrelation ergibt sich

$$\int_\Omega \int_\Omega [K_\varepsilon'(x, \xi)]^2 \, dx \, d\xi = \sum_{k>N \text{ oder } n>N} A_{kn}^2 < \varepsilon^2 ,$$

und aus Formel (3) folgt nun $||K_\varepsilon'|| < \varepsilon$. Wir erhalten jetzt $||K - K_\varepsilon|| < \varepsilon$ und somit $||K - K_\varepsilon|| \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Nach der Behauptung des Abschnitt 5 aus § 1 ist also der FREDHOLMsche Operator K vollstetig.

§ 3. Der Integraloperator mit schwacher Singularität

Es seien Ω eine beschränkte, meßbare Menge des m-dimensionalen euklidischen Raumes, x und ξ zwei beliebige Punkte aus Ω und $r = |x - \xi|$ der

Abstand zwischen diesen Punkten. Des weiteren sei $A(x, \xi)$ eine für alle $x, \xi \in \Omega$ definierte und beschränkte Funktion:

$$|A(x, \xi)| \leqq C = \text{const} . \tag{1}$$

Die Funktion der Punkte x und ξ

$$K(x, \xi) = \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha}, \qquad \alpha = \text{const} , \qquad 0 \leqq \alpha < m , \tag{2}$$

heißt *Kern mit schwacher Singularität*, und der durch die Formel

$$(K\, u)(x) = \int\limits_\Omega K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = \int\limits_\Omega \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha} u(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

definierte Integraloperator heißt *Integraloperator mit schwacher Singularität*.

Satz 7.3.1. *Der Integraloperator mit schwacher Singularität ist auf dem ganzen Raum $L_2(\Omega)$ definiert und beschränkt. Die Norm dieses Operators übersteigt nicht die Größe*

$$\frac{C\,|S_1|\, H^{m-\alpha}}{m - \alpha}, \tag{4}$$

wobei C die Konstante aus der Ungleichung (1) *und H die obere Grenze der Abstände zwischen den Punkten (d. h. den Durchmesser) der Menge Ω bedeuten.*

Wir erinnern daran, daß

$$|S_1| = \frac{2\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \tag{5}$$

ist.

Beweis.

1. Wir beweisen zunächst, daß das Integral

$$\int\limits_\Omega \frac{d\xi}{r^\alpha}, \qquad x \in \bar{\Omega}, \tag{6}$$

beschränkt ist. Da offenbar die Menge Ω in der Kugel vom Radius H mit dem Mittelpunkt x liegt, so gilt

$$\int\limits_\Omega \frac{d\xi}{r^\alpha} \leqq \int\limits_{r<H} \frac{d\xi}{r^\alpha} .$$

Wir führen jetzt Kugelkoordinaten mit dem Mittelpunkt x ein. Dann ist bekanntlich $d\xi = r^{m-1}\, dr\, dS_1$, wobei dS_1 das Maßelement auf der Einheitssphäre S_1 bedeutet, und es ergibt sich somit

$$\int\limits_{r<H} \frac{d\xi}{r^\alpha} = \int\limits_{S_1} \left\{ \int\limits_0^H r^{m-\alpha-1}\, dr \right\} dS_1 = \frac{|S_1|\, H^{m-\alpha}}{m - \alpha} .$$

Daraus folgt

$$\int_{\Omega} \frac{d\xi}{r^{\alpha}} \leqq \frac{|S_1|\, H^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \qquad x \in \bar{\Omega}\,. \tag{7}$$

Wir bemerken zugleich, daß auf Grund der Symmetrie auch

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{r^{\alpha}} \leqq \frac{|S_1|\, H^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \qquad \xi \in \bar{\Omega}, \tag{7$_1$}$$

gilt.

2. Offenbar existiert das 2 m-dimensionale Integral

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{r^{\alpha}}\, dx\, d\xi = \int_{\Omega} u^2(\xi) \left\{ \int_{\Omega} \frac{dx}{r^{\alpha}} \right\} d\xi \leqq \frac{|S_1|\, H^{m-\alpha}}{m-\alpha}\, ||u||^2\,.$$

Dann existiert aber nach dem Satz von Fubini die durch das Integral

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{r^{\alpha}}\, d\xi \tag{8}$$

definierte Funktion von x für fast alle $x \in \Omega$, und diese ist summierbar in Ω.

3. Es gilt die leicht einzusehende Ungleichung

$$|K(x, \xi)\, u(\xi)| \leqq C \frac{1}{r^{\alpha/2}} \frac{|u(\xi)|}{r^{\alpha/2}} \leqq \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{r^{\alpha}} + \frac{C}{2} \cdot \frac{u^2(\xi)}{r^{\alpha}}\,.$$

Wie in den Abschnitten 1 und 2 bewiesen wurde, sind die beiden Summanden der rechten Seite dieser Ungleichung in Ω summierbar nach ξ — der erste für alle $x \in \Omega$ und der zweite für fast alle $x \in \Omega$. Dann ist aber die Funktion $K(x, \xi)\, u(\xi)$ summierbar nach ξ für fast alle $x \in \Omega$.

4. Nach der Cauchy-Bunjakowskischen Ungleichung gilt

$$[(K\,u)(x)]^2 = \left\{ \int_{\Omega} K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi \right\}^2 \leqq$$

$$\leqq C^2 \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha/2}} \cdot \frac{u(\xi)}{r^{\alpha/2}}\, d\xi \right\}^2 \leqq C^2 \int_{\Omega} \frac{d\xi}{r^{\alpha}} \int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{r^{\alpha}}\, d\xi \leqq$$

$$\leqq \frac{C^2\, |S_1|\, H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{r^{\alpha}}\, d\xi\,.$$

Da die Funktion (8) in Ω summierbar ist, so ist das Integral (3) quadratisch summierbar in Ω. Letzteres bedeutet, daß der Operator K auf dem gesamten Raum $L_2(\Omega)$ definiert ist. Durch Integration der letzten Ungleichung nach x erhalten wir

$$||K\,u||^2 \leqq \frac{C^2\, |S_1|^2\, H^{2(m-\alpha)}}{(m-\alpha)^2}\, ||u||^2\,,$$

woraus

$$||K|| \leqq \frac{C\, |S_1|\, H^{m-\alpha}}{m-\alpha}\,.$$

folgt. Der Satz ist damit bewiesen.

Satz 7.3.2. *Der Operator mit schwacher Singularität ist vollstetig im Raum* $L_2(\Omega)$.

Beweis. Wir geben eine Zahl $\varepsilon > 0$ vor und setzen

$$K_\varepsilon(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi)\,, & r \geqq \varepsilon\,, \\ 0\,, & r < \varepsilon\,; \end{cases}$$

$$K(x, \xi) = \begin{cases} 0\,, & r \geqq \varepsilon\,, \\ K(x, \xi)\,, & r < \varepsilon\,, \end{cases}$$

so daß

$$K(x, \xi) = K_\varepsilon(x, \xi) + K'_\varepsilon(x, \xi)$$

gilt. Wie im vorangegangenen Paragraphen bezeichnen wir mit K_ε und K'_ε die Integraloperatoren mit den Kernen $K_\varepsilon(x, \xi)$ bzw. $K'_\varepsilon(x, \xi)$. Offensichtlich ist $K = K_\varepsilon + K'_\varepsilon$. Der Kern $K_\varepsilon(x, \xi)$ ist beschränkt: Es gilt

$$|K_\varepsilon(x, \xi)| \leqq \begin{cases} \dfrac{C}{r^\alpha}\,, & r \geqq \varepsilon\,, \\ 0\,, & r < \varepsilon\,, \end{cases}$$

und somit

$$|K_\varepsilon(x, \xi)| \leqq \frac{C}{\varepsilon^\alpha}\,.$$

Folglich ist K_ε ein FREDHOLMscher Operator, und nach dem Satz 7.2.2 ist dieser vollstetig in $L_2(\Omega)$. Wir schätzen jetzt die Norm des Operators K'_ε ab. Wenn wir der Einfachheit halber $(K'_\varepsilon u)(x) = v(x)$ bezeichnen, dann ergibt sich

$$|v(x)| = \left| \int\limits_{\Omega \cap (r < \varepsilon)} \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha}\, u(\xi)\, d\xi \right| \leqq C \int\limits_{\Omega \cap (r < \varepsilon)} \frac{|u(\xi)|}{r^{\alpha/2}}\, \frac{1}{r^{\alpha/2}}\, d\xi\,,$$

und nach der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung gilt

$$v^2(x) \leqq C^2 \int\limits_{\Omega \cap (r < \varepsilon)} \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\, d\xi \int\limits_{\Omega \cap (r < \varepsilon)} \frac{d\xi}{r^\alpha} \leqq C^2 \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\, d\xi \int\limits_{r < \varepsilon} \frac{d\xi}{r^\alpha}\,.$$

Nach Einführung von Kugelkoordinaten mit dem Mittelpunkt x erhalten wir

$$\int\limits_{r < \varepsilon} \frac{d\xi}{r^\alpha} = \int\limits_{S_1} \left\{ \int\limits_0^\varepsilon r^{m - \alpha - 1}\, dr \right\} dS_1 = \frac{|S_1|\, \varepsilon^{m - \alpha}}{m - \alpha}\,, \tag{9}$$

und folglich

$$v^2(x) \leqq \frac{C^2\, |S_1|\, \varepsilon^{m - \alpha}}{m - \alpha} \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\, d\xi\,.$$

Durch Integration der letzten Ungleichung nach x und Verwendung der Ungleichung (7_1) gelangen wir zu

$$||v||^2 = ||K'_\varepsilon\, u||^2 \leqq \frac{C^2\, |S_1|^2\, (\varepsilon\, H)^{m - \alpha}}{(m - \alpha)^2}\, ||u||^2\,.$$

Daraus ergibt sich

$$||K'_\varepsilon|| \leqq \frac{C\,|S_1|\,(\varepsilon\,H)^{\frac{m-\alpha}{2}}}{m-\alpha}. \tag{10}$$

Für $\varepsilon \to 0$ gilt $||K'_\varepsilon|| \to 0$, und der Operator K ist somit vollstetig.

Bemerkung. Die Definitionen und Sätze der §§ 2 und 3 über Fredholmsche Operatoren und Operatoren mit schwacher Singularität lassen sich ohne irgendwelche Veränderungen auf den Fall übertragen, wo Ω eine glatte m-dimensionale Fläche im $(m+1)$-dimensionalen Raum ist und $d\xi$ das Element des Inhaltes dieser Fläche bedeutet.

§ 4. Operatoren mit schwacher Singularität im Raum der stetigen Funktionen

Im vorliegenden Paragraphen setzen wir voraus, daß Ω eine beschränkte, abgeschlossene Menge im m-dimensionalen euklidischen Raum ist und daß in der Formel (3.2) $A(x, \xi)$ eine stetige Funktion des Punktes $(x, \xi) \in \Omega \times \Omega$ darstellt.

Satz 7.4.1. *Der Integraloperator mit schwacher Singularität* (3.3) *ist vollstetig im Raum $C(\Omega)$ der in Ω stetigen Funktionen.*

Beweis. Es sei M die Menge derjenigen Funktionen aus $C(\Omega)$, für die gilt

$$||u|| = \max_{x \in \Omega} |u(x)| \leqq c = \text{const}. \tag{1}$$

Es genügt zu zeigen, daß die Menge $K(M)$, wobei K den Operator (3.3) bedeutet, im Raum $C(\Omega)$ kompakt ist. Auf Grund des Satzes von Arzelà ist dafür hinreichend, daß die Funktionen der Menge $K(M)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind.

Es gelte $u \in M$. Wir setzen

$$v(x) = (K\,u)(x) = \int_\Omega \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha}\,u(\xi)\,d\xi. \tag{2}$$

Unter Benutzung der Ungleichungen (3.1) und (3.7) erhalten wir dann

$$|v(x)| \leqq C\,c \int_\Omega \frac{d\xi}{r^\alpha} \leqq \frac{C\,c\,|S_1|\,H^{m-\alpha}}{m-\alpha} = \text{const}. \tag{3}$$

Die letzte Ungleichung zeigt, daß die Menge $K(M)$ gleichmäßig beschränkt ist. Wir schätzen nun die Differenz $v(x+h) - v(x)$ ab. Es gilt

$$v(x+h) - v(x) = \int_\Omega \left[\frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha}\right] u(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Wir beschreiben um den Punkt x eine Kugel $D_{2\delta}$ vom Radius 2δ, wobei δ eine vorläufig beliebige positive Zahl bedeutet. Den Teil der Menge Ω, der außerhalb dieser Kugel liegt, bezeichnen wir mit Ω_1. Wenn wir verlangen, daß $|h| < \delta$ ist, dann liegt der Punkt $x+h$ in der Kugel $D_{2\delta}$, und sein Abstand zur Kugeloberfläche beträgt mindestens δ (vgl. Abb. 8).

Aus Formel (4) ergibt sich nun

$$|v(x+h) - v(x)| \leqq C\,c\left\{\int\limits_{D_{2\delta}} \frac{dx}{|x+h-\xi|^\alpha} + \int\limits_{D_{2\delta}} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha}\right\} + c\int\limits_{\Omega_1}\left|\frac{A(x+h,\xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha}\right| d\xi\,. \qquad (5)$$

Nach Formel (3.9) gilt

$$\int\limits_{D_{2\delta}} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha} = \int\limits_{r<2\delta} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha} = \frac{|S_1|\,(2\,\delta)^{m-\alpha}}{m-\alpha}\,. \qquad (6)$$

Wenn $\xi \in D_{2\delta}$ ist, dann ist $|x-\xi| \leqq 2\,\delta$ und somit

$$|x+h-\xi| \leqq |x-\xi| + |h| < 3\,\delta\,.$$

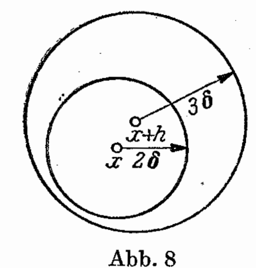


Abb. 8

Letzteres bedeutet, daß der Punkt ξ im Inneren der Kugel vom Radius $3\,\delta$ mit dem Mittelpunkt $x+h$ liegt. Mit anderen Worten, die Kugel $D_{2\delta}$ liegt ganz innerhalb der Kugel $r_1 < 3\,\delta$ mit $r_1 = |x+h-\xi|$. Daraus folgt

$$\int\limits_{D_{2\delta}} \frac{d\xi}{|x+h-\xi|^\alpha} < \int\limits_{r_1<3\delta} \frac{d\xi}{r_1^\alpha} < \frac{|S_1|\,(3\,\delta)^{m-\alpha}}{m-\alpha}\,. \qquad (7)$$

Wir geben die Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig vor und wählen δ derart, daß gilt

$$C\,c\,\frac{(2^{m-\alpha} + 3^{m-\alpha})\,|S_1|\,\delta^{m-\alpha}}{m-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dann ergibt sich aus den Beziehungen (5)—(7)

$$|v(x+h) - v(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + c\int\limits_{\Omega_1}\left|\frac{A(x+h,\xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha}\right| d\xi\,. \qquad (8)$$

Wir halten jetzt die Zahl δ fest. Da im Gebiet Ω_1 die Ungleichung $|x-\xi| \geqq \delta$ erfüllt ist, so ist $\frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha}$ gleichmäßig stetig als Funktion des Punktes (x,ξ). Es läßt sich deshalb eine hinreichend kleine Zahl h_0 finden derart, daß für $|h| < h_0$ die Ungleichung

$$\left|\frac{A(x+h,\xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha}\right| < \frac{\varepsilon}{2\,c\,|\Omega|}$$

erfüllt ist. Dann gilt auf Grund der Formel (8)

$$|v(x+h) - v(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon\,|\Omega_1|}{2\,|\Omega|} < \varepsilon\,, \qquad |h| < h_0\,.$$

Die Zahl h_0 ist dabei nur von ε abhängig, sie hängt weder vom Punkt x noch von der Funktion u ab. Daraus folgt, daß die Funktionen der Menge $K(M)$ gleichgradig stetig sind, und der Satz ist damit bewiesen.

Der Satz 7.4.1 läßt sich in offensichtlicher Weise auch auf den Fall übertragen, wo Ω eine glatte m-dimensionale Fläche im $(m+1)$-dimensionalen euklidischen Raum ist und $d\xi$ das Element des Inhaltes dieser Fläche bedeutet.

Im Beweis des Satzes 7.4.1 wurde in Wirklichkeit nicht von der Stetigkeit der Funktion $u(x)$, sondern nur von deren Beschränktheit Gebrauch gemacht. Es gilt somit die folgende Behauptung:

Wenn Ω eine beschränkte, abgeschlossene Menge und $A(x, \xi)$ eine in $\Omega \times \Omega$ stetige Funktion ist, dann überführt der Operator mit schwacher Singularität

$$(K\,u)(x) = \int_\Omega \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha}\, u(\xi)\, d\xi = v(x)$$

jede beschränkte Funktion $u(x)$ in eine stetige Funktion $v(x)$.

Es sei nach wie vor Ω eine beschränkte, abgeschlossene Menge, und $K(x, \xi)$ sei ein stetiger Kern. Dieser läßt sich als Kern mit schwacher Singularität auffassen, wobei $\alpha = 0$ ist. Dann ergibt sich aus dem Satz 7.4.1 die

Folgerung 7.4.1. *Wenn Ω eine beschränkte, abgeschlossene Menge und $K(x, \xi)$ ein in $\Omega \times \Omega$ stetiger Kern ist, dann ist der durch die Formel*

$$(K\,u)(x) = \int_\Omega K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

definierte Fredholm*sche Operator K vollstetig im Raum $C(\Omega)$.*

Übungsaufgaben

1. Man beweise, daß für $\alpha < \frac{m}{2}$ der Operator mit schwacher Singularität auch ein Fredholmscher Operator im Raum $L_2(\Omega)$ ist.

2. Es sei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und außerdem $\alpha\, p' < m$. Man beweise, daß der Operator mit schwacher Singularität als Operator von $L_p(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$ vollstetig ist.

3. Bekanntlich ist der durch die Formel

$$(S\,u)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{u(\xi)}{\xi - x}\, d\xi + \int_{x+\varepsilon}^{1} \frac{u(\xi)}{\xi - x}\, d\xi \right\}$$

definierte sogenannte singuläre Integraloperator S beschränkt im Raum $L_2(-1, 1)$. Es sei $a(x)$ eine auf dem Segment $[-1, 1]$ stetige Funktion. Man beweise, daß der Operator T mit

$$(T\,u)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{a(\xi) - a(x)}{\xi - x}\, u(\xi)\, d\xi$$

im Raum $L_2(-1, 1)$ vollstetig ist.

KAPITEL 8

DIE FREDHOLMSCHE THEORIE

§ 1. Gleichungen mit vollstetigen Operatoren. Integralgleichungen

Wir betrachten die Gleichung

$$u - \lambda T u = f . \tag{1}$$

Dabei sei T ein vollstetiger Operator in einem BANACH-Raum X, λ ein Parameter, f ein gegebenes und u das gesuchte Element des Raumes X. Die Gleichung

$$v - \bar{\lambda} T^* v = g \tag{2}$$

heißt zu (1) adjungierte Gleichung, wobei T^* den zu T adjungierten Operator, welcher ebenfalls vollstetig ist, und g bzw. v ein gegebenes bzw. das gesuchte Element aus dem zu X konjugierten Raum X^* bedeuten. Wenn f (entsprechend g) verschieden vom Nullelement ist, dann heißt Gleichung (1) [bzw. Gleichung (2)] *inhomogen*, im entgegengesetzten Falle erhält man die *homogenen Gleichungen*

$$u - \lambda T u = 0 \tag{3}$$

und

$$v - \bar{\lambda} T^* v = 0 . \tag{4}$$

Diejenigen Werte λ, für welche nicht triviale (d. h. vom Nullelement verschiedene) Lösungen der Gleichung (3) existieren, heißen *charakteristische Zahlen* des Operators T, die nicht trivialen Lösungen selbst heißen *zur gegebenen charakteristischen Zahl gehörige Eigenelemente*. Die Anzahl der linear unabhängigen und zu einer gegebenen charakteristischen Zahl gehörigen Eigenelemente heißt *Vielfachheit* dieser charakteristischen Zahl. Nicht charakteristische Werte heißen *regulär*.

Für Gleichung (1) gelten folgende vier Sätze, welche unter der Bezeichnung FREDHOLM*sche Sätze* bekannt sind.

Satz 8.1.1 (Erster FREDHOLMscher Satz). *Jede charakteristische Zahl der Gleichung* (1) *besitzt eine endliche Vielfachheit.*

Satz 8.1.2 (Zweiter FREDHOLMscher Satz). *Die Menge der charakteristischen Zahlen der Gleichung* (1) *ist entweder endlich oder abzählbar. Wenn diese Menge abzählbar ist, dann besitzt sie einen einzigen Häufungspunkt im Unendlichen.*

Satz 8.1.3 (Dritter FREDHOLMscher Satz). *Wenn λ eine charakteristische Zahl der Gleichung* (1) *ist, dann ist $\bar{\lambda}$ eine charakteristische Zahl der Gleichung* (2) *und zwar mit derselben Vielfachheit.*

Satz 8.1.4 (Vierter FREDHOLMscher Satz). *Für die Lösbarkeit der Gleichung* (1) *ist notwendig und hinreichend, daß die rechte Seite f dieser Gleichung zu allen Lösungen der adjungierten homogenen Gleichung* (4) *orthogonal ist.*

Die Orthogonalität ist dabei in folgendem Sinne zu verstehen. Gleichung (4) besitze für ein gegebenes λ eine gewisse Lösung v. Diese Lösung gehört zum Raum X^* und ist folglich ein Funktional im Raum X. Wir nennen nun f orthogonal zu v, wenn

$$(v, f) = 0 \tag{5}$$

ist, wobei (v, f) den Wert des Funktionals v auf dem Element f bedeuten soll.

Die wichtigsten Typen von Gleichungen mit vollstetigem Operator sind die FREDHOLM*schen Gleichungen* und die *Gleichungen mit schwacher Singularität.* Beide Gleichungstypen betrachten wir als Gleichungen im Raum $X = L_2(\Omega)$; auf Grund des bekannten Satzes von RIESZ ist dann auch $X^* = L_2(\Omega)$. Eine Gleichung der Gestalt

$$u(x) - \lambda \int_\Omega K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x) \tag{6}$$

heißt FREDHOLM*sche Integralgleichung,* wenn $K(x, \xi)$ ein FREDHOLMscher Kern ist und wenn die Funktionen $f(x)$ und $u(x)$ zum Raum $L_2(\Omega)$ gehören.[1])

Wenn $K(x, \xi)$ ein Kern mit schwacher Singularität ist (dabei muß die Menge Ω notwendigerweise beschränkt sein), dann heißt Gleichung (6) eine *Integralgleichung mit schwacher Singularität.*

Die zur Gleichung (6) adjungierte Gleichung hat im Raum $L_2(\Omega)$ die Gestalt

$$v(x) - \bar{\lambda} \int_\Omega \overline{K(\xi, x)}\, v(\xi)\, d\xi = g(x)\,. \tag{7}$$

Um dies zu beweisen, genügt es nachzuweisen, daß der zum FREDHOLMschen Operator

$$(Ku)(x) = \int_\Omega K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi \tag{8}$$

adjungierte Operator K^* durch die Formel

$$(K^* v)(x) = \int_\Omega \overline{K(\xi, x)}\, v(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

definiert wird.

Auf Grund des Satzes von RIESZ kann man jedes lineare und beschränkte Funktional in $L_2(\Omega)$ mit einem gewissen Element des Raumes $L_2(\Omega)$ identifizieren. Sei $v(x)$ ein solches Element. Dann gilt

$$(K^* v, u) = (v, K u) = \int_\Omega \int_\Omega \overline{K(x, \xi)}\, \overline{u(\xi)}\, v(x)\, dx\, d\xi =$$

$$= \int_\Omega \overline{u(\xi)} \left\{ \int_\Omega \overline{K(x, \xi)}\, v(x)\, dx \right\} d\xi = \int_\Omega \overline{u(x)} \left\{ \int_\Omega \overline{K(\xi, x)}\, v(\xi)\, d\xi \right\} dx\,.$$

[1]) Man kann die FREDHOLMschen Integralgleichungen auch in einigen anderen Funktionalräumen betrachten. Darauf werden wir aber nicht näher eingehen.

Daraus folgt nun

$$(K^* v)(x) = \int_\Omega \overline{K(\xi, x)}\, v(\xi)\, d\xi ,$$

was zu beweisen war.

In den §§ 2—4 des vorliegenden Kapitels liefern wir die Beweise der FREDHOLMschen Sätze für Gleichungen mit vollstetigem Operator in einem HILBERT-Raum. Damit sind dann die genannten Sätze gleichzeitig für FREDHOLMsche Gleichungen sowie für Gleichungen mit schwacher Singularität bewiesen. In den §§ 5—6 wird dann noch auf eine spezielle Frage nach den Bedingungen, unter denen eine quadratisch summierbare Lösung einer Gleichung mit schwacher Singularität gleichzeitig stetig ist, eingegangen.

§ 2. Überführung in eine endlichdimensionale Gleichung. Beweis des ersten und zweiten FREDHOLMschen Satzes

Satz 8.2.1 (Satz von BANACH). *Es sei A ein beschränkter linearer Operator in einem BANACH-Raum X, und es gelte $|\lambda| < ||A||^{-1}$. Dann existiert der Operator $(I - \lambda A)^{-1}$ (wobei I der identische Operator ist) und dieser ist auf dem ganzen Raum X definiert und beschränkt.*

Beweis. Die Reihe

$$I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \cdots + \lambda^n A^n + \cdots \tag{1}$$

konvergiert der Norm nach, da die Reihe aus den Normen ihrer Glieder konvergiert:

$$1 + |\lambda|\, ||A|| + |\lambda|^2\, ||A^2|| + \cdots + |\lambda|^n\, ||A^n|| + \cdots \leqq$$
$$\leqq 1 + |\lambda|\, ||A|| + |\lambda|^2\, ||A||^2 + \cdots + |\lambda|^n\, ||A||^n +$$
$$+ \cdots = \frac{1}{1 - |\lambda|\, ||A||} .$$

Folglich stellt die Summe der Reihe (1) einen Operator dar, der auf dem ganzen Raum definiert und beschränkt ist. Bezeichnen wir diese Summe mit R_λ^A dann gilt

$$||R_\lambda^A|| \leqq \frac{1}{1 - |\lambda| \cdot ||A||} . \tag{2}$$

Durch unmittelbare Multiplikation überzeugt man sich von der Gültigkeit der Beziehung $(I - \lambda A)\, R_\lambda^A = R_\lambda^A\, (I - \lambda A) = I$. Somit ergibt sich

$$(I - \lambda A)^{-1} = R_\lambda^A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n . \tag{3}$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$(I - \lambda T)\, u = f , \tag{4}$$

wobei T ein vollstetiger Operator in einem HILBERT-Raum $\mathfrak{H}$ sei. Wir geben eine beliebige positive Zahl R vor und nehmen an, daß der Parameter λ im

abgeschlossenen Kreis $|\lambda| \leqq R$ der komplexen λ-Ebene variiert. Nach dem Satz 7.1.1 läßt sich ein endlichdimensionaler Operator konstruieren — wir bezeichnen ihn mit T'' — derart, daß die Differenz $T' = T - T''$ der Ungleichung

$$||T'|| \leqq \frac{1}{2R} \tag{5}$$

genügt. Nach dem Satz von BANACH existiert der Operator

$$R'_\lambda = R^{T'}_\lambda = (I - \lambda T')^{-1}, \quad |\lambda| \leqq R,$$

und dieser ist auf dem ganzen Raum $\mathfrak{H}$ definiert und beschränkt. Wir multiplizieren jetzt Gleichung (4) von links mit R'_λ. Dabei gilt

$$R'_\lambda (I - \lambda T) = R'_\lambda (I - \lambda T' - \lambda T'') = I - \lambda R'_\lambda T'',$$

und wir gelangen somit zu der neuen Gleichung

$$(I - \lambda R'_\lambda T'') u = R'_\lambda f, \tag{6}$$

welche der Gleichung (4) offensichtlich äquivalent ist.

Wir beweisen jetzt, daß das Produkt $R'_\lambda T''$ ein endlichdimensionaler Operator ist. In der Tat, der endlichdimensionale Operator T'' wird durch eine Formel der Gestalt

$$T'' u = \sum_{k=1}^{n} l_k(u) v_k$$

definiert, wobei $l_k(u)$ lineare beschränkte Funktionale und v_k feste Elemente des Raumes $\mathfrak{H}$ sind. Dann gilt aber

$$R'_\lambda T'' u = \sum_{k=1}^{n} l_k(u) w_k, \quad w_k = R'_\lambda v_k,$$

d. h., der Operator $R'_\lambda T''$ ist endlichdimensional. Wir bemerken, daß das Element w_k außerdem noch von λ abhängt, wir werden es deshalb im weiteren mit $w_{k,\lambda}$ bezeichnen. Nach dem Satz von RIESZ gilt schließlich $l_k(u) = (u, u_k)$, wobei u_k gewisse feste Elemente des Raumes $\mathfrak{H}$ sind. Somit ergibt sich endgültig

$$R'_\lambda T'' u = \sum_{k=1}^{n} (u, u_k) w_{k,\lambda}. \tag{7}$$

Gleichung (6), und damit auch Gleichung (4), läßt sich leicht in ein äquivalentes lineares algebraisches Gleichungssystem überführen. Zu diesem Zweck setzen wir

$$(u, u_k) = c_k. \tag{8}$$

Dann erhalten wir aus den Beziehungen (6) und (7)

$$u = R'_\lambda f + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k w_{k,\lambda}. \tag{9}$$

Wir multiplizieren jetzt beide Seiten der letzten Gleichung skalar mit u_j, $1 \leqq j \leqq n$, und gelangen dann zu dem genannten Gleichungssystem

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(\lambda) c_k = f_j(\lambda), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Dabei wurden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\alpha_{jk}(\lambda) = (w_{k,\lambda}, u_j), \quad f_j(\lambda) = (R'_\lambda f, u_j). \tag{11}$$

Die Gleichung (4) und das System (10) sind in folgendem Sinne äquivalent. Jeder Lösung des Systems (10) entspricht nach der Formel (9) eine gewisse Lösung der Gleichung (4); umgekehrt wird mit Hilfe der Formel (8) jeder Lösung der Gleichung (4) eine gewisse Lösung des Systems (10) zugeordnet.

Dabei ist wichtig zu bemerken, daß $\alpha_{jk}(\lambda)$, genauso wie $f_j(\lambda)$, holomorphe Funktionen der komplexen Veränderlichen λ im abgeschlosseen Kreis $|\lambda| \leqq R$ sind. In der Tat gilt

$$R'_\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s T'^s,$$

und diese Reihe konvergiert im Kreis $|\lambda| < 2R$; letzteres ergibt sich aus der Ungleichung (5). Daraus folgt jetzt

$$\alpha_{jk}(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s (T'^s v_k, u_j). \tag{12}$$

Da die Potenzreihe (12) ebenfalls im Kreis $|\lambda| < 2R$ konvergiert, so ist die Funktion $\alpha_{jk}(\lambda)$ in diesem Kreis, und um so mehr im abgeschlossenen Kreis $|\lambda| \leqq R$, holomorph. In demselben Kreis ist auch die Determinante des Systems (10)

$$D_R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11}(\lambda) & -\lambda\alpha_{12}(\lambda) & \dots & -\lambda\alpha_{1n}(\lambda) \\ -\lambda\alpha_{21}(\lambda) & 1 - \lambda\alpha_{22}(\lambda) & \dots & -\lambda\alpha_{2n}(\lambda) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ -\lambda\alpha_{n1}(\lambda) & -\lambda\alpha_{n2}(\lambda) & \dots & 1 - \lambda\alpha_{nn}(\lambda) \end{vmatrix} \tag{13}$$

holomorph. Wenn $|\lambda| \leqq R$ und $D_R(\lambda) \neq 0$ gilt, dann besitzt das homogene System

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(\lambda)\, c_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{14}$$

und damit auch die homogene Gleichung

$$(I - \lambda T)\, u = 0 \tag{15}$$

nur die triviale Lösung. Ist dagegen $D_R(\lambda) = 0$, dann besitzt das System (14) wie auch die Gleichung (15) endlich viele linear unabhängige nichttriviale Lösungen. Daraus folgt, daß *die im abgeschlossenen Kreis $|\lambda| \leqq R$ gelegenen charakteristischen Zahlen des Operators T mit den Nullstellen der Determinante $D_R(\lambda)$ in demselben Kreis übereinstimmen.*

Jetzt läßt sich der erste FREDHOLMsche Satz leicht beweisen. Es sei λ_0 eine charakteristische Zahl des Operators T. Wir wählen $R > |\lambda_0|$. Dann ist $D_R(\lambda_0) = 0$, das System (14) wie auch die Gleichung (15) besitzen für $\lambda = \lambda_0$ nur endlich viele linear unabhängige Lösungen, und folglich ist die Vielfachheit der charakteristischen Zahl λ_0 endlich.

Wir beweisen nun den zweiten FREDHOLMschen Satz.

Die im abgeschlossenen Kreis $|\lambda| \leqq R$ holomorphe Funktion $D_R(\lambda)$ besitzt in diesem Kreis nur endlich viele Nullstellen. Daraus folgt, daß in einem beliebigen Kreisringgebiet der Gestalt $N \leqq |\lambda| \leqq N+1$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, nur endlich viele charakteristische Zahlen des Operators T liegen. Da die genannten Kreisringgebiete die gesamte λ-Ebene überdecken, so ist die Menge aller charakteristischen Zahlen des Operators T die Vereinigung einer abzählbaren Menge endlicher Mengen. Eine solche Vereinigung ist aber entweder endlich oder abzählbar. Schließlich können die charakteristischen Zahlen im Endlichen keinen Häufungspunkt besitzen — andernfalls würde sich ein Kreis finden lassen, der unendlich viele charakteristische Zahlen enthält.

§ 3. Beweis des dritten FREDHOLMschen Satzes

Wir betrachten die zur Gleichung (2.4) adjungierte homogene Gleichung

$$(I - \bar{\lambda}\, T^*)\, v = \overset{\circ}{0}\,, \qquad |\lambda| \leqq R\,. \tag{1}$$

Diese führen wir mit Hilfe eines Verfahrens, das sich nur wenig von der im vorangegangenen Paragraphen benutzten Methode unterscheidet, auf ein äquivalentes lineares algebraisches System zurück.

Der Zerlegung $T = T' + T''$ entspricht eine Zerlegung des adjungierten Operators $T^* = T'^* + T''^*$; dabei gilt $||T'^*|| = ||T'|| \leqq \frac{1}{2R}$, und der Operator T''^* ist endlichdimensional: Wenn

$$T'' u = \sum_{k=1}^{n} (u, u_k)\, v_k$$

ist, dann gilt

$$T''^* v = \sum_{k=1}^{n} (v, v_k)\, u_k\,. \tag{2}$$

Nach dem Satz von BANACH (Satz 8.2.1) schließen wir, daß der Operator

$$R_{\bar{\lambda}}'^* = (I - \bar{\lambda}\, T'^*)^{-1}$$

existiert, auf dem ganzen Raum definiert und beschränkt ist. Schließlich bemerken wir noch, daß die Operatoren $R_{\bar{\lambda}}'^*$ und R_λ' zueinander adjungiert sind.

In Gleichung (1) führen wir eine Substitution der gesuchten Funktion aus:

$$v = R_{\bar{\lambda}}'^*\, w\,. \tag{3}$$

Dann nimmt Gleichung (1) die Gestalt

$$(I - \bar{\lambda}\, T^*)\, R_{\bar{\lambda}}'^*\, \omega = 0$$

an. Da nun

$$(I - \bar{\lambda}\, T^*)\, R_{\bar{\lambda}}'^* = (I - \bar{\lambda}\, T'^* - \bar{\lambda}\, T''^*)\, R_{\bar{\lambda}}'^* = I - \bar{\lambda}\, T''^*\, R_{\bar{\lambda}}'^*$$

ist, so genügt die neue Unbekannte der Gleichung

$$(I - \bar{\lambda}\, T''^*\, R_{\bar{\lambda}}'^*)\, w = 0\,. \tag{4}$$

Dabei ist der Operator $T''^* R'^*_{\bar\lambda}$ endlichdimensional, denn es gilt

$$T''^* R'^*_{\bar\lambda} w = \sum_{k=1}^{n} (R'^*_{\bar\lambda} w, v_k) u_k = \sum_{k=1}^{n} (w, R'_\lambda v_k) u_k = \sum_{k=1}^{n} (w, w_{k,\lambda}) u_k . \quad (5)$$

Wir setzen

$$(w, w_{k,\lambda}) = \gamma_k . \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) ergibt sich dann

$$w - \bar\lambda \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k = 0 .$$

Durch skalare Multiplikation mit w_j, $1 \leqq j \leqq n$, erhalten wir das homogene System

$$\gamma_j - \bar\lambda \sum_{k=1}^{n} \bar\alpha_{kj} \gamma_k = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, n ,$$

welches der Gleichung (1) äquivalent ist; dabei wird der Koeffizient α_{kj} durch die Formel (2.11) definiert. Die Determinante des Systems (7) ist gleich $\overline{D_R(\lambda)}$ [vgl. Formel (2.13)].

Es sei nun λ_0, $|\lambda_0| \leqq R$, eine charakteristische Zahl des Operators T. Dann gilt $D_R(\lambda_0) = 0$, und die Matrix des Systems (2.10) ist singulär. Es sei r, $0 \leqq r < n$, der Rang dieser Matrix. Dann besitzt das homogene System (2.14) genau $n - r$ linear unabhängige Lösungen. Ebensoviel Lösungen besitzt dann auch die Gleichung (2.15); letzteres bedeutet, daß die Vielfachheit der charakteristischen Zahl λ_0 gleich $n - r$ ist.

Die Koeffizientenmatrizen der Systeme (2.14) und (7) sind zueinander adjungiert, und ihre Ränge stimmen überein. Daraus folgt schließlich, daß $\bar\lambda_0$ eine charakteristische Zahl des Operators T^* der Vielfachheit $n - r$ ist. Der dritte FREDHOLMsche Satz ist damit bewiesen.

§ 4. Beweis des vierten FREDHOLMschen Satzes

Es seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, $s \geqq 0$, die linear unabhängigen Lösungen der zur Gleichung

$$(I - \lambda T) u = f \quad (1)$$

adjungierten homogenen Gleichung

$$(I - \bar\lambda T^*) v = 0 . \quad (2)$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}_0^*$ den durch die Elemente $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ aufgespannten Teilraum; wenn $s = 0$ ist (d. h. wenn die Gleichung (2) keine nicht trivialen Lösungen besitzt), dann besteht $\mathfrak{H}_0^*$ nur aus dem Nullelement. Das orthogonale Komplement des Teilraumes $\mathfrak{H}_0^*$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_1^*$:

$$\mathfrak{H}_1^* = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0^* .$$

Des weiteren führen wir folgende Bezeichnungen ein: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ seien die linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung

$$(I - \lambda T)\, u = 0 \tag{3}$$

und $\mathfrak{H}_0$ sei der durch diese Elemente aufgespannte Teilraum. Wir setzen

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0 .$$

Schließlich bezeichnen wir noch $A = I - \lambda T$, und es sei $R(A)$ der Wertebereich des Operators A: $R(A) = A(\mathfrak{H})$. Wir bemerken, daß die Teilräume $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_0^*$ mit den Lösungsmengen der homogenen Gleichungen (3) bzw. (2) oder, was dasselbe ist, mit den Lösungsmengen der Gleichungen $A\, u = 0$ bzw. $A^*\, v = 0$ übereinstimmen.

Der vierte FREDHOLMsche Satz ist der Behauptung

$$R(A) = \mathfrak{H}_1^* \tag{4}$$

äquivalent. Die Notwendigkeit der im Satz formulierten Bedingung ist mit der Inklusion

$$R(A) \subset \mathfrak{H}_1^* \tag{5}$$

und die Hinlänglichkeit mit

$$R(A) \supset \mathfrak{H}_1^* \tag{6}$$

gleichbedeutend. Die Gültigkeit dieser Inklusionen wollen wir jetzt beweisen.

N o t w e n d i g k e i t. Gleichung (1.1), welche man auch in der Form

$$A\, u = f \tag{1'}$$

schreiben kann, sei lösbar, d. h., es existiert ein Element $u \in \mathfrak{H}$, das Gleichung (1') genügt. Dann ist $f \in R(A)$. Wenn nun φ ein beliebiges Element des Teilraumes $\mathfrak{H}_0^*$ bezeichnet, dann gilt

$$(f, \varphi) = (A\, u, \varphi) = (u, A^* \varphi) = 0 .$$

Somit ist f orthogonal zu $\mathfrak{H}_0^*$, und folglich gilt $f \in \mathfrak{H}_1^*$. Die Inklusion (5) ist damit bewiesen.

H i n l ä n g l i c h k e i t. Wir betrachten den Operator A_1, welcher nur auf dem Teilraum $\mathfrak{H}_1$ definiert ist und hier mit dem Operator A übereinstimmt:

$$A_1\, u = A\, u\,, \qquad u \in \mathfrak{H}_1 . \tag{7}$$

A_1 heißt *Einengung* des Operators A auf den Teilraum $\mathfrak{H}_1$. Offensichtlich ist[1]) $R(A_1) \subset R(A)$. Wir beweisen jetzt, daß

$$R(A_1) \supset \mathfrak{H}_1^* \tag{8}$$

ist. Zunächst bemerken wir, daß die Gleichung $A_1\, u = 0$ nur die triviale Lösung $u = 0$ besitzt. Wenn nämlich $A_1\, u = 0$ ist, dann gilt $A\, u = 0$ und $u \in \mathfrak{H}_0$. Auf Grund der Definition des Operators A_1 ist aber auch $u \in \mathfrak{H}_1$. Als Element zweier zueinander orthogonaler Teilräume ist u orthogonal zu sich selbst, und es ergibt sich somit $u = 0$. Daraus folgt nun, daß der Operator A_1 einen inversen

[1]) In Wirklichkeit gilt, wie man unschwer sieht, $R(A_1) = R(A)$.

Operator A_1^{-1} besitzt; für sein Definitionsgebiet gilt $D(A_1^{-1}) = R(A_1) \subset R(A)$, und auf Grund der bereits bewiesenen Inklusion (5) ist $D(A_1^{-1}) \subset \mathfrak{H}_1^*$.

Wir beweisen als nächstes, daß die Menge $D(A_1^{-1}) = R(A_1)$ in $\mathfrak{H}_1^*$ dicht ist. Anderenfalls würde sich nämlich ein Element $\omega \in \mathfrak{H}_1^*$, $\omega \neq 0$, finden lassen derart, daß $(A_1 u, \omega) = (A u, \omega) = 0$ ist für alle $u \in \mathfrak{H}_1$. Da die Gleichung $(A u, \omega) = 0$ offenbar auch für $u \in \mathfrak{H}_0$ gilt, so gilt sie überall in $\mathfrak{H}$. Somit ist

$$(u, A^* \omega) = (A u, \omega) = 0, \quad \forall u \in \mathfrak{H}.$$

Das Element $A^* \omega$ ist also orthogonal zum gesamten Raum, und es gilt deshalb $A^* \omega = 0$ und $\omega \in \mathfrak{H}_0^*$. Das Element ω gehört somit gleichzeitig beiden zueinander orthogonalen Teilräumen $\mathfrak{H}_1^*$ und $\mathfrak{H}_0^*$ an, und folglich ist $\omega = 0$.

Wir beweisen jetzt die Beschränktheit des Operators A_1^{-1}. Wir nehmen das Gegenteil an; dann läßt sich eine Folge von Elementen $u_n \in D(A_1^{-1})$ finden derart, daß gilt

$$\frac{\|A_1^{-1} u_n\|}{\|u_n\|} > n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Wir setzen $A_1^{-1} u_n = \psi_n$; dann ist offensichtlich $\psi_n \in R(A_1^{-1}) = D(A_1) = \mathfrak{H}_1$. Jetzt gilt $u_n = A_1 \psi_n = A \psi_n$ und

$$\frac{\|A \psi_n\|}{\|\psi_n\|} < \frac{1}{n}.$$

Des weiteren setzen wir $w_n = \dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$. Dann ergibt sich $w_n \in \mathfrak{H}_1$, $\|w_n\| = 1$ und

$$A w_n = w_n - \lambda T w_n \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{9}$$

Die Menge $\{w_n\}$ ist also beschränkt, und der Operator T ist vollstetig. Wir wählen eine Teilfolge $\{w_{n_k}\}$ aus, für die $\lambda T w_{n_k}$ gegen einen gewissen Grenzwert, welchen wir mit w_0 bezeichnen, konvergiert. Aus Beziehung (9) ergibt sich dann

$$w_{n_k} - \lambda T w_{n_k} \to 0. \tag{10}$$

Daraus folgt $w_{n_k} \to w_0$, $w_0 \in \mathfrak{H}_1$ und $\|w_0\| = \lim \|w_{n_k}\| = 1$. Durch Grenzübergang in der Formel (10) erhalten wir

$$A w_0 = w_0 - \lambda T w_0 = 0,$$

und folglich ist $w_0 \in \mathfrak{H}_0$. Da aber andererseits $w_0 \in \mathfrak{H}_1$ ist, so gilt notwendigerweise $w_0 = 0$, was jedoch der Gleichung $\|w_0\| = 1$ widerspricht. Der Operator A_1^{-1} ist also beschränkt.

Jetzt läßt sich die Gültigkeit der Inklusion (6) leicht beweisen. Sei $f \in \mathfrak{H}_1^*$. Da die Menge $D(A_1^{-1})$ in $\mathfrak{H}_1^*$ dicht ist, so läßt sich eine Folge $\{f_n\}$ finden derart, daß gilt $f_n \in D(A_1^{-1})$ und $f_n \to f$. Wir setzen $u_n = A_1^{-1} f_n$. Da der Operator A_1^{-1} beschränkt und die Folge $\{f_n\}$ konvergent ist, so konvergiert auch die Folge $\{u_n\}$; es sei $u_0 = \lim u_n$. Des weiteren gilt $f_n = A_1 u_n$. Dabei ist A_1 offenbar ein beschränkter Operator, und folglich kann man in der letzten Beziehung zum Grenzwert übergehen. Dann ergibt sich $f = A_1 u_0$. Daraus folgt nun $f \in R(A_1) \subset R(A)$, und die Inklusion (6) ist damit bewiesen.

§ 5. Die FREDHOLMsche Alternative

Aus dem dritten und dem vierten FREDHOLMschen Satz ergibt sich eine wichtige Aussage, welche unter der Bezeichnung FREDHOLMsche Alternative bekannt ist:

Es sei T ein vollstetiger Operator im HILBERT-Raum $\mathfrak{H}$. Entweder besitzt die Gleichung

$$(I - \lambda T)\, u = 0 \tag{1}$$

nur die triviale Lösung, und dann ist die inhomogene Gleichung

$$(I - \lambda T)\, u = f \tag{2}$$

für eine beliebige rechte Seite $f \in \mathfrak{H}$ eindeutig lösbar, oder die Gleichung (1) *besitzt nicht triviale Lösungen. Im letzteren Falle ist die Gleichung* (2) *entweder nicht lösbar, oder sie besitzt unendlich viele Lösungen.*

Beweis. Wenn Gleichung (1) nur die triviale Lösung besitzt, dann ist λ ein regulärer Wert des Operators T. Folglich ist $\bar{\lambda}$ ein regulärer Wert des Operators T^* (siehe dritter FREDHOLMscher Satz), und die Gleichung

$$(I - \bar{\lambda}\, T^*)\, v = 0 \tag{3}$$

besitzt nur die triviale Lösung $v = 0$. Da aber ein beliebiges Element $f \in \mathfrak{H}$ zu dieser Lösung orthogonal ist, so ist Gleichung (2) auf Grund des vierten FREDHOLMschen Satzes lösbar. Die Lösung dieser Gleichung ist eindeutig. Wenn nämlich u_1 und u_2 zwei Lösungen der Gleichung (2) sind, dann gilt

$$(I - \lambda T)\, u_1 = (I - \lambda T)\, u_2 = f\,.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhalten wir

$$(I - \lambda T)\, w = 0\,, \qquad w = u_1 - u_2\,.$$

Da aber λ ein regulärer Wert ist, so ergibt sich daraus $w = 0$ und somit $u_1 = u_2$. Der erste Teil der FREDHOLMschen Alternative ist damit bewiesen.

Gleichung (1) besitze jetzt s linear unabhängige Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$. Dann ist der gegebene Wert λ eine charakteristische Zahl des Operators T der Vielfachheit s. Nach dem dritten FREDHOLMschen Satz ist $\bar{\lambda}$ eine charakteristische Zahl des Operators T^* derselben Vielfachheit s. Es seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ die dazugehörigen linear unabhängigen Eigenelemente. Auf Grund des 4. FREDHOLMschen Satzes ist Gleichung (2) genau dann nicht lösbar, wenn nicht alle Beziehungen

$$(f, \omega_k) = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, s \tag{4}$$

gelten. Sind dagegen sämtliche der Gleichungen (4) erfüllt, dann besitzt Gleichung (2) unendlich viele Lösungen. In der Tat, auf Grund des 4. FREDHOLMschen Satzes besitzt in diesem Fall die Gleichung (2) wenigstens eine Lösung u_0. Die allgemeine Lösung u der Gleichung (2) erhält man wie üblich aus u_0 durch Hin-

zufügen der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (1):

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{s} c_k \varphi_k , \tag{5}$$

wobei c_k beliebige Konstanten bedeuten. Der zweite Teil der FREDHOLMschen Alternative ist somit ebenfalls vollständig bewiesen.

§ 6. Über die Stetigkeit der Lösungen einer Gleichung mit schwacher Singularität

Wir betrachten eine Integralgleichung mit schwacher Singularität

$$u(x) - \int_\Omega \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha} u(\xi)\, d\xi = f(x) , \tag{1}$$

wobei $0 \leqq \alpha < m$, $|A(x, \xi)| \leqq C = \text{const}$ und Ω eine beschränkte Menge ist. Wenn $f(x) \in L_2(\Omega)$ ist und wenn außerdem die im vierten FREDHOLMschen Satz angegebenen Orthogonalitätsbedingungen erfüllt sind, dann existiert eine zu $L_2(\Omega)$ gehörige Lösung der Gleichung (1).

Bei den Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen interessieren oftmals die Fälle, in denen die Lösungen der Gleichung (1) stetig sind. Ein einfacher Fall dieser Art wird im folgenden Satz beschrieben.

Satz 8.6.1. *Wenn Ω eine beschränkte abgeschlossene Menge ist und wenn die Funktionen $f(x)$ und $A(x, \xi)$ in Ω bzw. $\Omega \times \Omega$ stetig sind, dann ist eine beliebige, zur Klasse $L_2(\Omega)$ gehörige Lösung der Gleichung* (1) *stetig in Ω.*

Beweis. Wir wählen eine beliebig kleine positive Zahl ε und eine stetige Funktion $\eta(t)$ der reellen Veränderlichen t, welche für $t \geqq 0$ definiert ist und den folgenden Bedingungen genügt:

$$\eta(t) = 1 , \quad 0 \leqq t \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < \eta(t) < 1 , \quad \frac{\varepsilon}{2} < t < \varepsilon , \quad \eta(t) = 0 , \quad t \geqq \varepsilon .$$

Wir setzen

$$K_1(x, \xi) = \frac{A(x, \xi)\, \eta(r)}{r^\alpha}, \qquad K_2(x, \xi) = \frac{A(x, \xi)\, [1 - \eta(r)]}{r^\alpha} .$$

Dann gilt

$$\frac{A(x, \xi)}{r^\alpha} = K_1(x, \xi) + K_2(x, \xi) ,$$

der Kern der Gleichung (1) läßt sich also als Summe zweier Kerne, von denen der erste eine schwache Singularität besitzt und nur für $r < \varepsilon$ verschieden von Null ist, der zweite hingegen stetig ist, darstellen.

Es sei $u(x) \in L_2(\Omega)$ irgendeine Lösung der Gleichung (1). Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$u(x) - (K_1\, u)\, (x) = g(x) , \tag{2}$$

wobei

$$(K_1\, u)\, (x) = \int_\Omega K_1(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi , \tag{3}$$

$$g(x) = f(x) + \int_\Omega K_2(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

ist.

Die Funktion $g(x)$ ist in Ω stetig; letzteres folgt leicht aus der Stetigkeit der Funktionen $f(x)$ und $K_2(x, \xi)$ sowie aus der Beziehung

$$|(K_2 u)(x_1) - (K_2 u)(x_2)| = \left|\int\limits_\Omega [K_2(x_1, \xi) - K_2(x_2, \xi)]\, u(\xi)\, d\xi\right| \leqq$$
$$\leqq \left\{\int\limits_\Omega [K_2(x_1, \xi) - K_2(x_2, \xi)]^2\, d\xi\right\}^{1/2} ||u||_{L_2(\Omega)}\,.$$

Wenn $|A(x, \xi)| \leqq C$ ist, dann gilt auch $|A(x, \xi)\, \eta(r)| \leqq C$. Wir wählen jetzt die Zahl ε derart, daß die folgenden zwei Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$\frac{C\, |S_1|\, (\varepsilon H)^{\frac{m-\alpha}{2}}}{m-\alpha} < 1\,, \tag{5}$$

$$\frac{C\, |S_1|\, \varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha} < 1\,; \tag{6}$$

dabei bedeutet H in der Ungleichung (5) den Durchmesser der Menge Ω.

Aus Ungleichung (5) folgt nun auf Grund der Formel (3.10) aus Kap. 7

$$||K_1||_{L_2(\Omega)} < 1\,.$$

Betrachtet man jetzt die Beziehung (2) als Integralgleichung mit $u(x)$ als gesuchte und $g(x)$ als gegebene Funktion, so ersieht man, daß sich auf diese Gleichung der Satz 8.2.1 von Banach anwenden läßt. Folglich kann man die Funktion $u(x)$ als Reihe

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (K_1^n g)(x)\,, \tag{7}$$

welche in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$ konvergiert, darstellen, Wir beweisen jetzt, daß diese Reihe in Ω gleichmäßig konvergiert. Die Funktion $g(x)$ ist beschränkt; es sei $|g(x)| \leqq M = \text{const.}$ Dann gilt

$$|(K_1 g)(x)| = \left|\int\limits_\Omega \frac{A(x, \xi)\, \eta(r)}{r^\alpha}\, g(\xi)\, d\xi\right| = \left|\int\limits_{\Omega \cap (r<\varepsilon)} \frac{A(x, \xi)\, \eta(r)}{r^\alpha}\, g(\xi)\, d\xi\right| \leqq MC \int\limits_{r<\varepsilon} \frac{d\xi}{r^\alpha}\,,$$

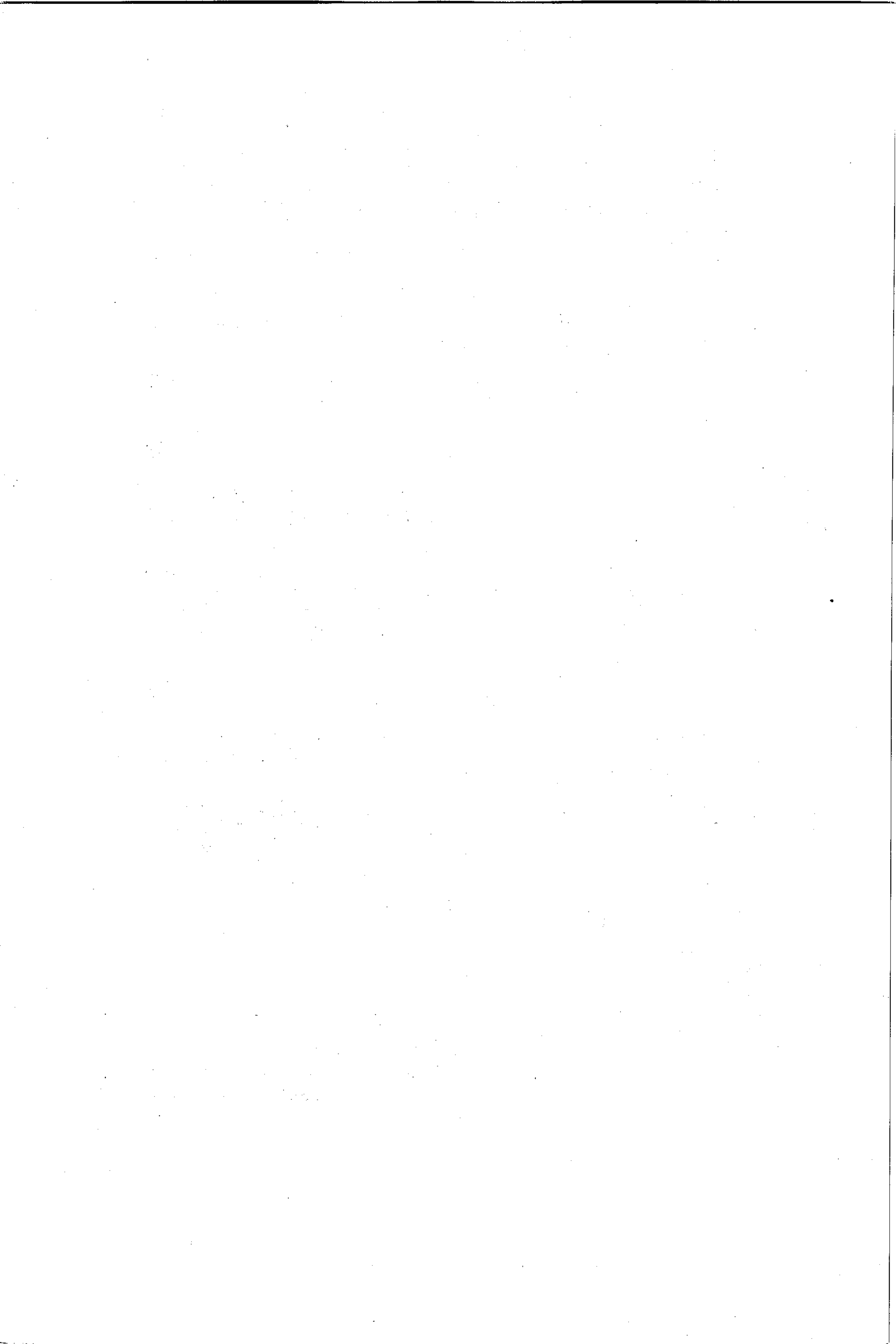
und auf Grund der Formel (3.9) aus Kap. 7 ergibt sich

$$|(K_1 g)(x)| \leqq \frac{M\, C\, |S_1|\, \varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha}\,.$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir schließlich

$$|(K_1^n g)(x)| \leqq M \left[\frac{C\, |S_1|\, \varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha}\right]^n.$$

Auf Grund der Ungleichung (6) konvergiert somit die Reihe (7) gleichmäßig in Ω. Da nun nach Satz 7.4.1 die Glieder dieser Reihe stetig sind, so ist auch die Funktion $u(x)$ als Summe dieser Reihe stetig. Der Satz 8.6.1 ist damit bewiesen.



Teil IV

Allgemeines über partielle Differentialgleichungen

KAPITEL 9

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND RANDWERTAUFGABEN

§ 1. Der Differentialausdruck und die Differentialgleichung

Die allgemeinste partielle Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von m unabhängigen Veränderlichen ist von der Gestalt

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right) = 0 . \tag{1}$$

Die höchste Ordnung k der in die Differentialgleichung eingehenden Ableitungen der gesuchten Funktion heißt *Ordnung* der Differentialgleichung. Die allgemeine Gestalt eines *Systems* von partiellen Differentialgleichungen läßt sich ebenfalls leicht angeben.

In diesem Buch werden fast ausschließlich *lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung* betrachtet. Das System $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ der Werte der unabhängigen Veränderlichen betrachten wir, wie bereits in den vorangegangenen Teilen, als Punkt x des m-dimensionalen euklidischen Raumes E_m mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

In den bei physikalischen Problemen auftretenden Gleichungen sind die unabhängigen Veränderlichen des öfteren die Zeit und die Raumkoordinaten; für deren Bezeichnung benutzen wir gelegentlich die Buchstaben t, x, y, z.

Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion u der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ist im allgemeinsten Fall von der Gestalt

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x)\, u = f(x) , \tag{2}$$

dabei sind A_{jk}, A_k, A_0 und f gegebene Funktionen von x.

Gleichung (2) enthält in Wirklichkeit für $j \neq k$ nicht die einzelnen Summanden $A_{jk} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k}$ und $A_{kj} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_j}$, sondern deren Summe

$$(A_{jk} + A_{kj}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} .$$

Da sich der Ausdruck $A_{jk} + A_{kj}$ auf willkürliche Weise in zwei Summanden zerlegen läßt, kann man stets

$$A_{kj}(x) = A_{jk}(x) \tag{3}$$

annehmen, so daß die aus den Koeffizienten der zweiten Ableitungen bestehende Matrix (die sogenannte *Koeffizientenmatrix des Hauptteiles*) symmetrisch ist. Die genannte Matrix wird im weiteren eine sehr wichtige Rolle spielen.

Die linke Seite der Gleichung (2) heißt *Differentialausdruck zweiter Ordnung*.

Die in die Gleichung (2) eingehende Funktion $f(x)$ nennen wir die *rechte Seite* dieser Gleichung. Wie gewöhnlich unterscheidet man zwischen der homogenen Gleichung $\big(f(x) \equiv 0\big)$ und der inhomogenen Gleichung $\big(f(x) \not\equiv 0\big)$.

Wir betrachten einige Beispiele.

1. Die *Saitenschwingungsgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \,. \tag{4}$$

Dabei ist $m = 2$; die rechte Seite $f(x, t)$ ist der zur Zeit t im Punkt x auf die Saite einwirkenden äußeren Kraft proportional. Die Koeffizientenmatrix des Hauptteiles hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

In dem weniger einfachen Fall, wo die Saite in einem Medium mit einem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand schwingt, lautet die Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \,, \qquad h = \text{const} \,. \tag{6}$$

Die Koeffizientenmatrix des Hauptteiles ist nach wie vor von der Gestalt (5).

2. Die *Membranschwingungsgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y, t) \,. \tag{7}$$

Die Koeffizientenmatrix des Hauptteiles hat in diesem Fall die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

3. Für die *Wärmeleitungsgleichung*

$$k \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z, t) \tag{9}$$

besitzt die Koeffizientenmatrix des Hauptteiles folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

4. Für die LAPLACE-*Gleichung*

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x) \tag{11}$$

ist die Koeffizientenmatrix des Hauptteiles die Einheitsmatrix der Ordnung m.

5. Die *Differentialgleichung*

$$(1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\, x\, y \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + (1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

besitzt die folgende Koeffizientenmatrix des Hauptteiles:

$$\begin{pmatrix} 1 + y^2 & -x\, y \\ -x\, y & 1 + x^2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

§ 2. Die Klassifizierung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden in Abhängigkeit von den Eigenschaften der Eigenwerte ihrer Koeffizientenmatrix des Hauptteiles in Klassen eingeteilt.

Wir erinnern daran, daß die Eigenwerte einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

die Nullstellen der Gleichung

$$\operatorname{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

darstellen; dabei bedeutet I die Einheitsmatrix. Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell.

Wir betrachten jetzt folgende etwas allgemeinere Differentialgleichung als die Gleichung (1.2):

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} + \Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0\,, \tag{1}$$

wobei Φ eine beliebige Funktion ihrer Argumente ist. Da die Matrix des Hauptteiles dieser Gleichung symmetrisch ist, so sind alle ihre Eigenwerte reell. Wir halten einen gewissen Punkt x, in welchem die Koeffizienten der Gleichung (1) definiert sind, fest. In diesem Punkt besitze die Koeffizientenmatrix des Hauptteiles dieser Gleichung α positive, β negative Eigenwerte, und γ Eigenwerte seien gleich Null; dann gilt offenbar

$$\alpha + \beta + \gamma = m\,.$$

In diesem Fall sagen wir, Gleichung (1) gehöre in dem betrachteten Punkt x zum Typ (α, β, γ). Gleichung (1) gehört zum Typ (α, β, γ) auf einer gewissen Punktmenge, wenn sie in jedem Punkt dieser Menge zum Typ (α, β, γ) gehört. Wenn die Koeffizienten A_{jk} der Gleichung (1) konstant sind, dann ist offenbar

der Typ dieser Gleichung ein und derselbe im ganzen Raum. Wenn man bei sämtlichen Gliedern der Differentialgleichung das Vorzeichen ändert, dann wechseln die Zahlen α und β ihre Stellung; wir werden deshalb die Typen (α, β, γ) und (β, α, γ) identifizieren.

Als Beispiele betrachten wir die in den Abschnitten 1 bis 5 des vorangegangenen Paragraphen angegebenen Gleichungen. In den Beispielen 1 bis 4 besitzen die Koeffizientenmatrizen des Hauptteiles Diagonalgestalt, ihre Eigenwerte stimmen deshalb mit den Elementen der Hauptdiagonalen überein. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß in einem beliebigen Punkt des Raumes die Saitenschwingungsgleichung zum Typ (1, 1, 0), die Membranschwingungsgleichung zum Typ (2, 1, 0), die Wärmeleitungsgleichung zum Typ (3, 0, 1) und die LAPLACE-Gleichung des m-dimensionalen Raumes zum Typ $(m, 0, 0)$ gehören.

Die Eigenwerte der Matrix (1.13) sind die Nullstellen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 + y^2 - \lambda & -xy \\ -xy & 1 + x^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

diese sind gleich

$$\lambda_1 = 1 + x^2 + y^2 , \quad \lambda_2 = 1 .$$

Daraus ersieht man, daß in einem beliebigen Punkt (x, y) die Gleichung (1.12) zum Typ (2, 0, 0) gehört.

Es ist nicht schwer, Gleichungen anzugeben, deren Typ in verschiedenen Punkten verschieden sein kann. Eine solche Gleichung ist z. B. die TRICOMI-*Gleichung*

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \tag{2}$$

Ihre Koeffizientenmatrix des Hauptteiles

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = y$; die genannte Gleichung gehört somit zum Typ (2, 0, 0) für $y > 0$, zum Typ (1, 1, 0) für $y < 0$ und zum Typ (1, 0, 1) für $y = 0$.

Drei der hier betrachteten Typen partieller Differentialgleichungen spielen in der mathematischen Physik eine besondere Rolle.

A. Der Typ $(m, 0, 0) = (0, m, 0)$ heißt *elliptisch*. Gleichung (1) gehört folglich in einem gegebenen Punkt zum elliptischen Typ, wenn in diesem Punkt sämtliche Eigenwerte der Koeffizientenmatrix des Hauptteiles von Null verschieden sind und ein und dasselbe Vorzeichen besitzen.

Das wichtigste Beispiel einer Differentialgleichung vom elliptischen Typ ist die LAPLACE-*Gleichung*. Elliptisch ist auch die Gleichung (1.12) und für $y > 0$ auch die TRICOMI-Gleichung.

B. Der Typ $(m - 1, 0, 1) = (0, m - 1, 1)$ heißt *parabolisch*. Gleichung (1) gehört also in einem gewissen Punkt zum parabolischen Typ, wenn in diesem

Punkt ein Eigenwert der Koeffizientenmatrix des Hauptteiles gleich Null ist und alle übrigen Eigenwerte von Null verschieden sind und ein gemeinsames Vorzeichen besitzen.

Das wichtigste Beispiel einer parabolischen Gleichung ist die *Wärmeleitungsgleichung*, welche wir hier in der Form

$$k \frac{\partial u}{\partial x_m} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(x) \tag{3}$$

darstellen. Weiter unten (siehe Teil VI) geben wir dieser Gleichung sowie auch der Wellengleichung (siehe Abschnitt C) eine etwas andere Gestalt. Ein Spezialfall der Gleichung (3) ist Gleichung (1.9). Zum parabolischen Typ zählt auch die TRICOMI-Gleichung für $y = 0$.

C. Der Typ $(m - 1, 1, 0) = (1, m - 1, 0)$ heißt *hyperbolisch*. Gleichung (1) ist folglich hyperbolisch in einem gegebenen Punkt, wenn in diesem Punkt sämtliche Eigenwerte der Koeffizientenmatrix der Hauptteiles von Null verschieden sind und wenn sich eine dieser Zahlen von allen übrigen durch ihr Vorzeichen unterscheidet.

Das wichtigste Beispiel einer hyperbolischen Gleichung ist die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x). \tag{4}$$

Spezialfälle dieser Gleichung sind die Schwingungsgleichungen für die Saite und für die Membran. Zum hyperbolischen Typ gehört auch die TRICOMI-Gleichung für $y < 0$.

Die Wichtigkeit der hier ausgezeichneten drei Typen von partiellen Differentialgleichungen — des elliptischen, des parabolischen und des hyperbolischen Typs — wird durch zwei Umstände bestimmt. Einerseits führen alle bislang aus der Physik bekannten Probleme in der Regel auf Gleichungen der genannten Typen; andererseits existiert für diese Gleichungen eine weitaus vollständigere Theorie als für die partiellen Differentialgleichungen anderer Typen.

Gleichungen des Typs $(\alpha, \beta, 0)$ mit $\alpha \geqq 2$ und $\beta \geqq 2$ vereinigt man häufig unter dem allgemeinen Begriff der *ultrahyperbolischen* Differentialgleichungen. Die einfachste ultrahyperbolische Gleichung hat die Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0 .$$

Die elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Gleichungen werden wir als Gleichungen der mathematischen Physik betrachten.

Es existieren ziemlich viele Arbeiten, welche den Gleichungen vom sogenannten „gemischten“ Typ, d. h. solchen Gleichungen, deren Typ sich von Punkt zu Punkt ändern kann, gewidmet sind. Ausführlicher kann man darüber in [2] und [3] nachlesen. Des weiteren ist eine Reihe von Arbeiten erschienen, in denen Gleichungen des Typs $(\alpha, 0, \gamma)$ (sog. „elliptisch-parabolische Gleichungen“) untersucht werden. Von den neueren Arbeiten dieser Richtung möchten wir auf [1] verweisen.

§ 3. Randbedingungen und Randwertaufgaben

Um ein physikalisches Problem vollständig beschreiben zu können, genügt es nicht, sich allein auf eine Differentialgleichung zu beschränken; man muß vielmehr gewisse Zusatzbedingungen stellen, welche gewöhnlich den Charakter von sogenannten Randbedingungen tragen.

Wir wollen das soeben Gesagte an einigen einfachen Beispielen erläutern. Die Schwingungen einer Saite werden durch die uns bereits bekannte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \tag{1}$$

beschrieben.

Wir nehmen an, die Saite habe die Länge l und nehme im Gleichgewichtszustand den Abschnitt $[0, l]$ der x-Achse ein. Weiterhin nehmen wir an, daß die Saite zu der Zeit $t = 0$ aus dem Gleichgewicht gebracht wird und zu schwingen beginnt. Das Problem besteht darin, den Ausschlag $u(x, t)$ zu bestimmen, den der Punkt der Saite mit einer beliebigen Abszisse $x \in [0, l]$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ besitzt. Mit anderen Worten, die der Gleichung (1) genügende Funktion $u(x, t)$ ist in dem in der Abb. 9 schraffierten Gebiet zu bestimmen; der Rand dieses Gebietes besteht aus dem Abschnitt $[0, l]$ der x-Achse und den zwei Halbgeraden $x = 0$, $t > 0$ und $x = l$, $t > 0$.

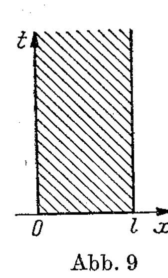


Abb. 9

Die natürlichen Vorgaben der Differentialgleichung (1) sind die Größe a^2, welche in bestimmter Weise von den physikalischen Eigenschaften der Saite (wie deren Dichte und Spannung) abhängt, und die Funktion $f(x, t)$, welche die zu der Zeit t auf den Punkt x der Saite einwirkende äußere Kraft charakterisiert. Gleichung (1) enthält jedoch keinerlei Informationen darüber, auf welche Weise die Saite aus dem Gleichgewicht gebracht wurde. Sie enthält auch keine Information über den Zustand der Endpunkte der Saite; diese können fest eingespannt oder auch frei sein; schließlich kann es vorkommen, daß die Endpunkte der Saite zwar nicht befestigt, aber deren Verschiebungen gewissen Einschränkungen unterworfen sind. Die genannte Information muß also zusätzlich gegeben werden. Die Saite kann aus dem Gleichgewicht gebracht werden, indem man ihren Punkten eine Anfangslage oder eine Anfangsgeschwindigkeit oder beides erteilt. Der Punkt x der Saite, $0 \leqq x \leqq l$, besitze eine Anfangslage $\varphi_0(x)$ und eine Anfangsgeschwindigkeit $\varphi_1(x)$. Dann hat die gesuchte Funktion $u(x, t)$ folgende Beziehungen zu erfüllen:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) , \qquad 0 \leqq x \leqq l . \tag{2}$$

Des weiteren seien die Schwingungsgesetze für die Endpunkte der Saite bekannt: Zu der Zeit $t \geqq 0$ sei der Ausschlag des linken Endpunktes der Saite gleich $\psi_1(t)$ und der des rechten Endpunktes gleich $\psi_2(t)$. Dann müssen außerdem die Bedingungen

$$u|_{x=0} = \psi_1(t) , \quad u|_{x=l} = \psi_2(t) \tag{3}$$

erfüllt sein.

Die Bedingungen (3) sind überflüssig, wenn die Saite unendlich ist, d. h. wenn sie im Gleichgewichtszustand die gesamte x-Achse ausfüllt.

Die Zusatzbedingungen (2) und (3) müssen für $t = 0$, $x = 0$ und $x = l$, d. h. also auf dem Rand des Gebietes, in welchem die Funktion $u(x, t)$ gesucht ist (siehe Abb. 9), erfüllt sein. Aus diesem Grund heißen die genannten Bedingungen auch Randbedingungen.

Wir bemerken noch, daß die Bedingungen (2) und (3) nicht völlig unabhängig voneinander sind: Wenn man verlangt, daß die gesuchte Funktion $u(x, t)$ nicht nur im Inneren, sondern auch auf dem Rande ihres Definitionsgebietes stetig ist, dann gilt notwendigerweise

$$\varphi_0(0) = \psi_1(0)\,, \qquad \varphi_0(l) = \psi_2(0)\,. \tag{4}$$

Die Beziehungen (4) heißen *Verträglichkeitsbedingungen*. Sie ergeben sich auf Grund der Forderung nach der Stetigkeit des Ausschlages der Endpunkte der Saite zur Zeit $t = 0$. Wenn man verlangt, daß auf dem Rande des Gebietes (Abb. 9) auch einige Ableitungen der Funktion $u(x, t)$ stetig sind, dann können neue Verträglichkeitsbedingungen entstehen. So muß

$$\varphi_1(0) = \psi_1'(0)\,, \qquad \varphi_1(l) = \psi_2'(0) \tag{4a}$$

gelten, wenn man die Stetigkeit der ersten Ableitungen verlangt. Fordert man die Stetigkeit der zweiten Ableitungen, dann entstehen die Bedingungen

$$\begin{aligned} \psi_1''(0) - a^2\,\varphi_0''(0) &= f(0, 0)\,, \\ \psi_2''(0) - a^2\,\varphi_0''(l) &= f(l, 0)\,. \end{aligned} \tag{4b}$$

Weiter unten (siehe Teil VI) zeigen wir, daß Gleichung (1) unter hinreichend schwachen Voraussetzungen eine und nur eine Lösung besitzt, welche den Randbedingungen (2) und (3) genügt. Dies bedeutet, daß die Gleichungen (1) bis (3) alle Information, die zur Untersuchung der Schwingungsgleichung notwendig ist, enthalten (Eindeutigkeit der Lösung) und daß sie keine überflüssige, widersprüchliche Information beinhalten (Existenz der Lösung).

Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel. Ein gewisser homogener, isotroper Körper fülle im dreidimensionalen Raum ein Gebiet Ω aus, welches durch die Fläche Γ berandet wird. Wir nehmen an, daß in diesem Körper Wärmequellen mit einer von der Zeit unabhängigen Intensität $F(x) = F(x_1, x_2, x_3)$ verteilt sind. Letzteres bedeutet, daß in jedem Zeitabschnitt der Länge δt in einem beliebigen Teilgebiet $\Omega' \subset \Omega$ eine Wärmemenge von der Größe

$$\delta t \int_{\Omega'} F(x)\, dx$$

frei wird. Wir nehmen an, daß in dem Körper eine stationäre, d. h. von der Zeit unabhängige Temperaturverteilung festgestellt wurde. Dann genügt die Temperatur in dem Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)$ des Körpers der LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -f(x)\,; \tag{5}$$

dabei unterscheidet sich die Funktion $f(x)$ nur durch einen konstanten Faktor von $F(x)$. Die Differentialgleichung (5) allein reicht aber nicht aus, um die Temperaturverteilung in dem Körper Ω vollständig zu bestimmen; letzteres sieht man zumindest daran, daß Gleichung (5) eine unendliche Lösungsmenge besitzt. Es ist also eine zusätzliche Information erforderlich. Diese kann man zum Beispiel wie folgt erhalten: Da die Oberfläche Γ des betrachteten Körpers für Beobachtungen zugängig ist, so kann in jedem ihrer Punkte die Temperatur gemessen werden. Wir nehmen an, daß wir die Temperatur in allen Punkten der Fläche Γ festgestellt haben; in dem Punkt $x \in \Gamma$ sei die Temperatur u gleich $\varphi(x)$. Dann erhalten wir folgende zusätzliche Randbedingung:

$$u|_\Gamma = \varphi(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,. \tag{6}$$

Im Teil V werden wir zeigen, daß das Problem (5), (6) unter hinreichend allgemeinen Voraussetzungen eine und nur eine Lösung besitzt.

Wenn es sich um einen inhomogenen und anisotropen Körper handelt, dann gelangen wir nicht zu der Gleichung (5), sondern zu einer allgemeineren Gleichung der Gestalt

$$-\sum_{j,\,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x)\,, \tag{7}$$

die, ebenso wie Gleichung (5), eine elliptische Differentialgleichung darstellt. Das Problem der Integration der Gleichung (7) (insbesondere der LAPLACE-Gleichung (5)) bei der Randbedingung (6) heißt DIRICHLET*sches Problem.*

Die Zusatzinformation für Gleichung (7) kann auch in Form von Randbedingungen gegeben werden, welche sich von der Bedingung (6) unterscheiden. Wenn z. B. bekannt ist, daß im Punkt $x \in \Gamma$ die Intensität des Wärmeflusses gleich einer gegebenen Funktion $\Psi(x)$ ist, dann gilt

$$\left[\sum_{j,\,k=1}^{3} A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma = \psi(x)\,. \tag{8}$$

Dabei unterscheidet sich $\psi(x)$ nur durch einen konstanten Faktor von der Funktion $\Psi(x)$, und ν bedeutet die äußere Normale zur Fläche Γ. Für die LAPLACE-Gleichung gilt speziell

$$A_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0\,, & j \neq k\,,\\ 1\,, & j = k\,,\end{cases}$$

und die Randbedingung (8) nimmt in diesem Fall die Gestalt

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \psi(x) \tag{9}$$

an. Das Problem (7), (8) [insbesondere also das Problem (5), (9)] nennt man NEUMANN*sches Problem.*

Das DIRICHLETsche und das NEUMANNsche Problem lassen sich nicht nur im dreidimensionalen, sondern auch in einem beliebigen m-dimensionalen Raum formulieren.

Wir geben jetzt die allgemeine Definition des Begriffes der Randbedingungen sowie einer Randwertaufgabe.

Gegeben sei eine gewisse partielle Differentialgleichung

$$L\,u = f(x)\,. \tag{10}$$

Wir nehmen an, die Lösung dieser Gleichung sei in einem gewissen Gebiet Ω des Raumes E_m zu bestimmen; den Rand dieses Gebietes bezeichnen wir mit Γ. Auf dem ganzen Rand Γ, oder auf einem gewissen Teil davon, seien die Werte eines oder auch einiger Differentialausdrücke für die gesuchte Funktion u der Gestalt

$$G_k\,u|_\Gamma = \varphi_k(x)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, l\,, \tag{11}$$

vorgegeben. Die Gleichungen (11) heißen *Randbedingungen,* und das Problem der Integration der Differentialgleichung (10) unter den Randbedingungen (11) heißt *Randwertaufgabe.*

§ 4. Das CAUCHYsche Problem

Für Gleichung (1.2) wird das CAUCHYsche Problem folgendermaßen formuliert: Im $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-Raum sei eine gewisse glatte Fläche Γ gegeben. Mit jedem Punkt $x \in \Gamma$ (x habe die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$) sei eine gewisse Richtung λ, die keine Tangente an Γ ist, verknüpft. In einer gewissen Umgebung der (ein- oder zweiseitigen) Fläche Γ ist die Lösung der Gleichung (1.2) gesucht, welche die sogenannten CAUCHY*schen Anfangsbedingungen*

$$u\bigg|_\Gamma = \varphi_0(x)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda}\bigg|_\Gamma = \varphi_1(x) \tag{1}$$

erfüllt. Dabei sind $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ auf Γ definierte Funktionen; wir nehmen an, daß $\varphi_1(x)$ stetig und $\varphi_0(x)$ stetig differenzierbar ist.

Die Funktionen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ heißten CAUCHY*sche Anfangswerte*; die Fläche Γ, welche die CAUCHYschen Anfangswerte trägt, nennt man CAUCHY*sche Fläche.*

Wir bemerken, daß die Randbedingungen (3.2) die CAUCHYschen Anfangsbedingungen für die Saitenschwingungsgleichung darstellen; die CAUCHYsche Fläche ist in diesem Fall das abgeschlossene Intervall $[0, l]$ auf der x-Achse.

Das CAUCHYsche Problem unterscheidet sich von den im § 3 betrachteten Randwertaufgaben dadurch, daß hier das Gebiet, in dem die gesuchte Lösung zu bestimmen ist, von vornherein nicht angegeben wird. Dennoch werden wir das CAUCHYsche Problem als ein Randwertproblem auffassen.

Im weiteren wird sich folgende Bemerkung als nützlich erweisen: Kennt man die CAUCHYschen Anfangsbedingungen (1), dann lassen sich die Werte sämtlicher ersten Ableitungen der gesuchten Funktion auf der CAUCHYschen Fläche bestimmen. Zum Beweis nehmen wir einen beliebigen Punkt x auf Γ und wählen in diesem Punkt ein *lokales Koordinatensystem* $X_1, X_2, \ldots, X_m$. So heiße ein cartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung im Punkt x liegt, wobei die Koordinatenachsen $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ in der $(m-1)$-dimensionalen Tangentialebene an Γ im Punkt x gelegen sind und X_m die Richtung

der Normalen an Γ in demselben Punkt besitzt (vgl. Abb. 10). Kennt man nun die Werte der Funktion $u = \varphi_0(x)$ auf Γ, dann kann man sofort die Ableitungen

$$\left.\frac{\partial u}{\partial X_k}\right|_\Gamma = \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

berechnen. Des weiteren gilt

$$\varphi_1(x) = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial X_k} \cos(\lambda, X_k).$$

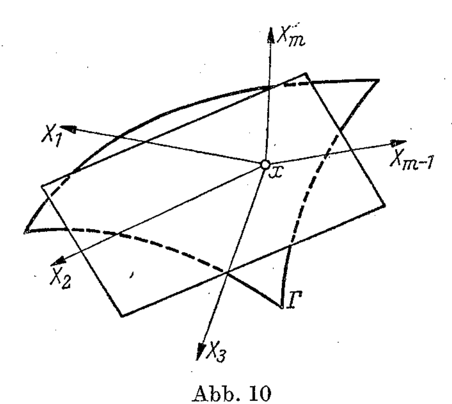


Abb. 10

Da die Richtung λ keine Tangente an die Fläche Γ ist, so ist der Winkel (λ, X_m) kein rechter Winkel. Dann gilt $\cos(\lambda, X_m) \neq 0$, und aus der letzten Gleichung erhalten wir den Ausdruck für die restliche Ableitung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial X_m}\right|_\Gamma = \frac{1}{\cos(\lambda, X_m)}\left[\varphi_1(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_k} \cos(\lambda, X_k)\right].$$

Kennt man die Ableitungen im lokalen Koordinatensystem, dann ergeben sich die Werte für die Ableitungen im $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-Koordinatensystem aus der Formel

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_\Gamma = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial u}{\partial X_j}\right|_\Gamma \cos(X_j, x_k).$$

§ 5. Existenz-, Eindeutigkeits- und Korrektheitsprobleme bei Randwertaufgaben

1. Es sei ein gewisses Randwertproblem gestellt. Dieses zu lösen bedeutet, alle Funktionen zu bestimmen, die einer gegebenen Differentialgleichung sowie den gegebenen Randbedingungen genügen. Gewöhnlich wird man der gesuchten Funktion noch einige Bedingungen allgemeiner Art auferlegen, welche es oftmals gestatten, diese Funktion als Element des einen oder des anderen Funktionalraumes zu betrachten; wir bezeichnen diesen Raum mit B_1. So kann man z. B. beim Dirichletschen Problem für die Laplace-Gleichung fordern, daß

die gesuchte Funktion im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ stetig ist; in diesem Fall ist die gesuchte Funktion, wenn sie existiert, ein Element des Raumes $C(\bar{\Omega})$. Man kann der gesuchten Funktion auch andere Bedingungen auferlegen, z. B. kann man verlangen, daß die Integrale

$$\int_{\Omega} u^2\, dx\,, \qquad \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2\, dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$$

endlich sind. In diesem Fall kann man die gesuchte Funktion als Element desjenigen HILBERT-Raumes auffassen, in welchem die Norm durch die Formel

$$||u||^2 = \int_{\Omega} \{u^2 + (\text{grad } u)^2\}\, dx$$

definiert wird.

Die der gesuchten Funktion auferlegten Bedingungen zwingen dazu, auch bezüglich der in die rechten Seiten der Differentialgleichung und der Randbedingungen eingehenden Vorgaben einige Voraussetzungen zu machen. Gewöhnlich erweist es sich in solchen Fällen, daß man die Gesamtheit dieser rechten Seiten auch als Element eines gewissen anderen Funktionalraumes B_2 betrachten kann. In vielen interessanten Fällen sind B_1 und B_2 BANACH-Räume.

Wir betrachten den Fall, wo sowohl die in die Differentialgleichung als auch die in die Randbedingungen eingehenden Differentialausdrücke linear sind. Die Gesamtheit dieser Differentialausdrücke erzeugt einen gewissen linearen Operator $\mathfrak{A}$, der den Raum B_1 in den Raum B_2 abbildet und der die gesuchte Funktion $u(x)$ in die oben genannte Gesamtheit der rechten Seiten der Differentialgleichung und der Randbedingungen überführt. Bezeichnen wir diese Gesamtheit mit Φ, dann läßt sich unser Randwertproblem in Form der Gleichung

$$\mathfrak{A}\, u = \Phi \tag{1}$$

schreiben. Den Operator $\mathfrak{A}$ nennen wir den *Operator des gegebenen Randwertproblems.*

Die Aufgabe, das gegebene Randwertproblem zu lösen, läßt sich jetzt wie folgt formulieren: Gesucht sind alle Elemente des Raumes B_1, die durch den Operator $\mathfrak{A}$ in das vorgegebene Element $\Phi \in B_2$ übergeführt werden.

Gewöhnlich wird man versuchen, die Randbedingungen so zu stellen, daß das Randwertproblem eine und nur eine Lösung besitzt. Dies bedingt, in jedem Fall Existenz- und Eindeutigkeitssätze zu beweisen. Der Eindeutigkeitssatz ist der Behauptung äquivalent, daß der zum Operator $\mathfrak{A}$ inverse Operator $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert. Der Existenzsatz behauptet, daß der Wertebereich des Operators $\mathfrak{A}^{-1}$ mit dem Raum B_2 zusammenfällt. Wenn sowohl der Existenzsatz als auch der Eindeutigkeitssatz gelten, dann existiert der Operator $\mathfrak{A}^{-1}$, und dieser ist auf dem ganzen Raum B_2 definiert.

Bei der Lösung von Randwertaufgaben spielt außer den Fragen nach der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösung auch noch die Frage, ob es sich um ein *korrekt gestelltes Problem* handelt, eine wichtige Rolle.

Zu dem Begriff eines korrekt gestellten Problems gelangt man leicht mit Hilfe einfacher physikalischer Überlegungen. Der Bestimmung physikalischer Größen liegen letzten Endes gewisse Messungen zugrunde, die stets mit einem gewissen Fehler behaftet sind. Insbesondere wird dann auch das Element Φ in Gleichung (1) — nämlich die Gesamtheit der Vorgaben der Randwertaufgabe — mit einem gewissen Fehler behaftet sein. Es entsteht nun die folgende Frage: Wie wirkt sich der Fehler in den Vorgaben des Randwertproblems auf dessen Lösung aus? Dementsprechend gibt man nun folgende Definition:

Ein Randwertproblem heißt korrekt gestellt in einem Paar von BANACH-*Räumen B_1 und B_2, wenn die Lösung dieses Randwertproblems in B_1 eindeutig ist und bei beliebigen Vorgaben aus B_2 existiert und wenn einer hinreichend kleinen Änderung der Vorgaben (bezüglich der Norm von B_2) eine beliebig kleine Änderung der Lösung (bezüglich der Norm von B_1) entspricht.*

Zu dieser Frage kehren wir im Teil VII am Ende des Buches noch einmal zurück, wo unter anderem gezeigt wird, daß das Problem (1) genau dann korrekt gestellt ist, wenn der Operator $\mathfrak{A}^{-1}$ beschränkt ist. Hier beschränken wir uns auf die Behandlung zweier Beispiele für nicht korrekt gestellte Randwertprobleme. Das erste dieser Beispiele geht auf HADAMARD zurück, welcher erstmalig den Begriff eines korrekt gestellten Randwertproblems einführte.

2. Wir betrachten die LAPLACE-Gleichung in der Ebene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \tag{2}$$

Als Fläche Γ nehmen wir die x-Achse, und auf dieser geben wir die CAUCHYschen Anfangswerte vor. Die Umgebung, in der wir die Lösung suchen, sei der Streifen $0 < y < \delta$, wobei δ eine beliebige positive Zahl bedeutet; wir bezeichnen diesen Streifen mit Ω. Als nichttangentiale Richtung λ wählen wir die y-Achse. Die CAUCHYschen Bedingungen seien folgende:

$$u\Big|_{y=0} = \varphi(x) , \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0 , \quad -\infty < x < \infty . \tag{3}$$

Die Vorgabe der Anfangswerte ist hier gleichbedeutend mit der Vorgabe einer einzigen Funktion $\varphi(x)$, welche wir als auf der ganzen Achse stetig und beschränkt annehmen wollen. Dann kann man diese Funktion als Element des Raumes $C\,(-\infty, +\infty)$ betrachten; dieser Raum übernimmt im vorliegenden Fall die Rolle des Raumes B_2. Als B_1 nehmen wir den Raum $C(\Omega)$ der in dem Streifen Ω stetigen und beschränkten Funktionen. Als Definitionsgebiet des Operators der Randwertaufgabe (2), (3) erklären wir die Menge derjenigen Funktionen aus $C(\Omega)$, welche stetige zweite Ableitungen besitzen und die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$$

erfüllen.

Wir beweisen jetzt, daß das Problem (2), (3) in dem Paar der Räume B_1 und B_2 nicht korrekt gestellt ist. Die Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems

kann man beweisen. Daraus ergibt sich sofort, daß der Funktion $\varphi(x) \equiv 0$ die Lösung $u \equiv 0$ entspricht. Wir erteilen jetzt der Funktion $\varphi(x) \equiv 0$ eine (bezüglich der Norm des Raumes B_2) kleine Änderung: Wir betrachten das CAUCHYsche Problem für Gleichung (2) mit den CAUCHYschen Anfangswerten

$$u\Big|_{y=0} = \frac{\cos n x}{n}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0\,; \tag{4}$$

dabei bedeutet n eine hinreichend große natürliche Zahl.

Die Lösung des neuen Problems ist

$$u(x, y) = \frac{\cos n x \operatorname{ch} n y}{n},$$

was man durch Einsetzen in die Gleichungen (2) und (4) leicht nachprüft. Offenbar gilt

$$\|\varphi\|_{B_2} = \left\|\frac{\cos n x}{n}\right\|_{B_2} = \max_{-\infty<x<+\infty}\left|\frac{\cos n x}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Gleichzeitig erhalten wir aber

$$\|u\|_{B_1} = \max_{\substack{-\infty<x<\infty\\ 0\leqq y\leqq\delta}}\left|\frac{\cos n x \operatorname{ch} n y}{n}\right| = \frac{\operatorname{ch} n\delta}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty\,.$$

Das bedeutet: Beliebig kleine Änderungen (bezüglich der Norm von B_2) der Vorgaben können zu beliebig großen Änderungen (bezüglich der Norm von B_1) der Lösung führen. Folglich ist das CAUCHYsche Problem für die LAPLACE-Gleichung in dem soeben betrachteten Paar von Räumen nicht korrekt gestellt.

3. Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0\,. \tag{5}$$

Diese Gleichung gehört zum hyperbolischen Typ. Ihre Koeffizientenmatrix des Hauptteiles besitzt nämlich die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

Die Eigenwerte dieser Matrix, d. h. die Nullstellen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

sind $\lambda_1 = 1/2$ und $\lambda_2 = -1/2$; diese sind von Null verschieden und besitzen verschiedenes Vorzeichen. Wir bemerken außerdem, daß Gleichung (5) mit

Hilfe der Variablensubstitution

$$x_1 = x + a\,t\,, \qquad x_2 = x - a\,t$$

in die homogene Schwingungsgleichung für die Saite übergeführt wird.

Für Gleichung (5) stellen wir das DIRICHLETsche Problem in dem in Abb. 11 dargestellten Quadrat; dieses Quadrat bezeichnen wir mit Ω, und es sei Γ der Rand desselben. Auf Γ sollen folgende Bedingungen gestellt sein:

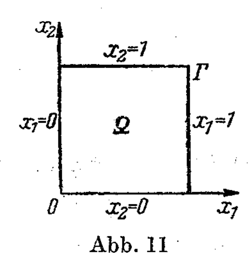


Abb. 11

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= \varphi_1(x_2)\,, & u|_{x_2=0} &= \psi_1(x_1)\,, \\ u|_{x_1=1} &= \varphi_2(x_2)\,, & u|_{x_2=1} &= \psi_2(x_1)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Als B_1 und B_2 nehmen wir die Räume $C(\bar{\Omega})$ bzw. $C(\Gamma)$. Für die Stetigkeit der Lösung müssen die Verträglichkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \psi_1(0)\,, & \varphi_2(0) &= \psi_1(1)\,, \\ \varphi_1(1) &= \psi_2(0)\,, & \varphi_2(1) &= \psi_2(1) \end{aligned} \tag{7}$$

erfüllt sein. Bei beliebig vorgegebenen stetigen Funktionen (6) ist das Problem (5), (6) nicht lösbar. Wir überzeugen uns davon, indem wir die allgemeine Lösung der Gleichung (5) auffinden. Stellen wir diese Gleichung in der Form $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0$ dar, so ergibt sich $\frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_2)$, wobei die Funktion f beliebig sein kann. Durch Integration der letzten Beziehung nach x_2 erhalten wir

$$u(x_1, x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2)\,, \qquad F_2'(x_2) = f(x_2)\;;$$

dabei sind F_1 und F_2 beliebige Funktionen. Die ersten beiden Bedingungen (6) lassen sich erfüllen:

$$\begin{aligned} F_1(0) + F_2(x_2) &= \varphi_1(x_2)\,, \\ F_1(x_1) + F_2(0) &= \psi_1(x_1)\,. \end{aligned}$$

Offenbar ist eine der Konstanten $F_1(0)$ und $F_2(0)$ willkürlich wählbar. Wir setzen $F_2(0) = 0$. Dann gilt

$$F_1(x_1) = \psi_1(x_1)\,, \qquad F_2(x_2) = \varphi_1(x_2) - \psi_1(0)\,.$$

Damit ist die Lösung vollständig bestimmt; die Gleichung $F_2(0) = 0$ ergibt sich aus der ersten der Gleichungen (7). Wenn nun die Funktionen φ_2 und ψ_2 beliebig sind, dann lassen sich offensichtlich die restlichen Randbedingungen (6) nicht erfüllen.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß das Problem (5), (6) in dem Paar der Räume $C(\bar{\Omega})$ und $C(\Gamma)$ nicht korrekt gestellt ist.

KAPITEL 10

CHARAKTERISTIKEN. DIE KANONISCHE FORM. DIE GREENSCHEN FORMELN

§ 1. Transformation der unabhängigen Veränderlichen

Gegeben sei eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem linearen Hauptteil

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0 . \tag{1}$$

Wir nehmen an, es werden an Stelle der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ neue unabhängige Veränderliche

$$\xi_r = \xi_r(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad r = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

eingeführt. Wir wollen untersuchen, in welcher Weise sich dabei Gleichung (1) ändert.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir künftig das Summenzeichen weglassen; wir vereinbaren dabei folgende Regel: Wenn in einem gewissen Ausdruck ein variabler Index, der die Werte von 1 bis m annimmt, zweimal auftritt, dann ist nach diesem Index in den Grenzen von 1 bis m zu summieren. Gleichung (1) nimmt dann die folgende einfache Gestalt an:

$$A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0 .$$

Wir nehmen an, daß in einem gewissen Variabilitätsbereich des Punktes x die Transformation (2) eineindeutig und die entsprechende JACOBIsche Funktionaldeterminante von Null verschieden ist. Eine solche Transformation der unabhängigen Veränderlichen nennen wir *nichtentartet*. Des weiteren setzen wir voraus, daß die Funktionen ξ_r stetige zweite Ableitungen besitzen. Wir berechnen zunächst die in Gleichung (1) auftretenden Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial \xi_r} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_j \partial x_k} .$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in Gleichung (1) erhalten wir eine neue Gleichung

$$A_{jk} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s} + \Phi_1\left(\xi_1, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right) = 0 ,$$

$$\Phi_1 = \Phi + A_{jk} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial \xi_r} .$$

Wir führen jetzt folgende Bezeichnungen ein:

$$A_{jk} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} = \tilde{A}_{rs} . \tag{3}$$

Dann nimmt Gleichung (1) die Gestalt

$$\tilde{A}_{rs} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \, \partial \xi_s} + \Phi_1\left(\xi_1, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right) = 0 \tag{4}$$

an.

Somit geht Gleichung (1) bei einer Transformation der unabhängigen Veränderlichen in eine Gleichung derselben Gestalt über; dabei ändern sich lediglich die Koeffizienten der Gleichung. Wir bemerken außerdem, daß die Koeffizientenmatrix des Hauptteiles der Gleichung (4) symmetrisch ist. Es gilt nämlich

$$\tilde{A}_{rs} = A_{jk} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} = A_{kj} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} .$$

Vertauscht man nun in der letzten Summe die Rollen der Indizes j und k, dann ergibt sich

$$\tilde{A}_{rs} = A_{jk} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} = \tilde{A}_{sr} .$$

Satz 10.1.1. *Der Typ der partiellen Differentialgleichung* (1) *ändert sich nicht bei einer nichtentarteten Transformation der unabhängigen Veränderlichen.*

Beweis. Aus der Algebra ist die folgende Tatsache bekannt. Eine gewisse Matrix sei mit Hilfe einer nichtentarteten Transformation auf Diagonalgestalt gebracht worden. Dann ist die Anzahl der positiven, negativen oder nullwertigen Eigenwerte der gegebenen Matrix entsprechend gleich der Anzahl der positiven, negativen oder Nullelemente in der Hauptdiagonalen der transformierten Matrix.

Wir bezeichnen mit J die JACOBIsche Funktionalmatrix der Transformation (2). Da ihre Determinante — die Funktionaldeterminante dieser Transformation — von Null verschieden ist, so existiert die inverse Matrix J^{-1}. Die Formel (3) ist folgender Matrizengleichung äquivalent:

$$\tilde{A} = J\,A\,J' , \tag{5}$$

der Strich an der Matrix J bedeutet dabei die transponierte Matrix.

Wir nehmen jetzt an, daß eine nichtentartete lineare Transformation mit der Matrix σ die Matrix A in eine Diagonalmatrix D überführt:

$$A = \sigma\,D\,\sigma' .$$

Dann gilt auf Grund der Formel (5)

$$\tilde{A} = J\,\sigma\,D\sigma'\,J' = (J\,\sigma)\,D(J\,\sigma)' ,$$

d. h., die Matrix $\tilde{A}$ wird mit Hilfe der nichtentarteten Transformation $J\,\sigma$ in dieselbe Diagonalmatrix D übergeführt. Folglich stimmen die Anzahlen der positiven, der negativen und der nullwertigen Eigenwerte der Matrizen A und $\tilde{A}$ überein. Die Behauptung ist damit bewiesen.

§ 2. Charakteristiken. Die Beziehung zwischen den Cauchyschen Anfangswerten auf der Charakterstik

Wir betrachten die in bezug auf den Hauptteil lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0\,. \tag{1}$$

Gleichzeitig stellen wir die Differentialgleichung erster Ordnung

$$A_{jk}(x)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0 \tag{2}$$

auf. Diese heißt *charakteristische Gleichung* der Differentialgleichung (1). Wenn die Funktion $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ die charakteristische Gleichung erfüllt, dann heißt die durch die Gleichung

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m) = C \tag{3}$$

(C eine beliebige Konstante) definierte Fläche (Kurve im Falle $m = 2$) *charakteristische Fläche* (entsprechend *charakteristische Kurve*) oder *Charakteristik* der Differentialgleichung (1).

Formal wird die charakteristische Gleichung wie folgt aufgestellt: Man bildet die der Koeffizientenmatrix A des Hauptteiles der Gleichung (1) entsprechende quadratische Form

$$(A\,t, t) = A_{jk}\,t_j\,t_k\,, \tag{4}$$

substituiert in dieser Form $t_k = \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$ und setzt den sich ergebenden Ausdruck gleich Null.

Wir erwähnen folgende wichtige Eigenschaft der Charakteristiken: Die Charakteristiken sind invariant in bezug auf Transformation der unabhängigen Veränderlichen. Dies bedeutet folgendes: Wenn $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine Lösung der Gleichung (2) ist und wenn die Transformation der unabhängigen Veränderlichen (1.2) die Funktion $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ in die Funktion $\tilde{\omega}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ überführt, dann ist diese neue Funktion Lösung der Gleichung

$$\tilde{A}_{jk}\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_j}\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_k} = 0\,; \tag{2a}$$

die letzte Gleichung stellt die charakteristische Gleichung der transformierten Differentialgleichung (1.4) dar.

In der Tat gilt

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_r}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j}\,, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_k}\,.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (2) ergibt sich unter Verwendung der Formel (1.3), daß $\tilde{\omega}$ die Gleichung (2a) erfüllt.

Eine Gleichung vom elliptischen Typ besitzt keine reellen Charakteristiken. Wenn nämlich (1) eine elliptische Gleichung ist, dann ist (4) eine definite quadratische Form, und letztere verschwindet (für reelle t_k) nur dann, wenn $t_1 = t_2 =$

$= \cdots = t_m = 0$ gilt. Folglich besitzt die charakteristische Gleichung nur die Lösung $\omega \equiv \text{const}$, durch die aber keine Fläche definiert wird.

Wir zeigen jetzt, daß die CAUCHYschen Anfangswerte auf der charakteristischen Fläche durch eine gewisse Beziehung miteinander verknüpft sind. Daraus folgt dann, daß man die CAUCHYschen Anfangswerte auf der charakteristischen Fläche nicht unabhängig voneinander vorgeben kann.

Die CAUCHYschen Anfangswerte seien auf einer hinreichend glatten Fläche Γ, welche durch die Gleichung

$$\xi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \tag{5}$$

definiert werde, vorgegeben und mögen folgende Gestalt besitzen:

$$u\Big|_\Gamma = \varphi_0(x)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda}\Big|_\Gamma = \varphi_1(x)\,, \tag{6}$$

dabei bedeutet λ eine Richtung, die keine Tangente an Γ ist. Wie im § 4 des Kap. 9 festgestellt wurde, lassen sich bei Kenntnis der Vorgaben (6) die Werte sämtlicher erster Ableitungen der Funktion u auf der CAUCHYschen Fläche Γ bestimmen.

Wir wählen einen beliebigen Punkt auf der Fläche Γ und führen in einer gewissen Umgebung dieses Punktes ein neues Koordinatensystem ein. Wir setzen $\xi_m = \xi$ und wählen die Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ derart, daß die sich ergebende Koordinatentransformation eineindeutig ist, eine von Null verschiedene JACOBIsche Funktionaldeterminante hat und daß die Funktionen ξ_r stetige zweite Ableitungen besitzen; ansonsten dürfen die Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ beliebig sein. In den neuen Koordinaten nimmt die Gleichung der CAUCHYschen Fläche Γ die besonders einfache Gestalt $\xi_m = 0$ an.

Wir nehmen jetzt an, daß Γ die charakteristische Fläche sei, d. h., es gilt

$$A_{jk}\frac{\partial \xi}{\partial x_j}\frac{\partial \xi}{\partial x_k} = 0\,.$$

Dann verschwindet in den Variablen ξ_r der Koeffizient bei der Ableitung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_m^2}$, und unsere Gleichung stellt in bezug auf die Veränderliche ξ_m eine Gleichung erster Ordnung dar.

Wir zeigen jetzt, daß *man allein mit Hilfe der CAUCHYschen Anfangswerte sämtliche in die transformierte Gleichung* (1) *eingehenden Ableitungen auf der Fläche Γ berechnen kann.* Die Größe $u|_\Gamma = \varphi_0(x)$ ist bekannt. Die ersten Ableitungen $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_r}\Big|_\Gamma$ lassen sich so bestimmen, wie weiter oben ausgeführt wurde. Die zweiten Ableitungen, mit Ausnahme der Ableitung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_m^2}$, erhält man, indem man die ersten Ableitungen nach $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$, d. h. also nach Tangentenrichtungen an die Fläche Γ, differenziert. Die einzige zweite Ableitung, die sich nicht, ausgehend von den CAUCHYschen Anfangswerten, berechnen läßt, ist die Ableitung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_m^2}$; diese tritt jedoch in der transformierten Gleichung nicht auf.

Somit lassen sich auf der Cauchyschen Fläche Γ die Werte sämtlicher Ausdrücke, welche in die linke Seite der auf die Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ transformierten Gleichung (1) eingehen, berechnen. Setzt man diese Werte in die Gleichung ein, dann ergibt sich, daß eine gewisse gegebene Funktion identisch Null sein muß. Dies ist nun die gesuchte Beziehung zwischen den Cauchyschen Anfangswerten auf der Charakteristik. Wird diese Beziehung verletzt, dann besitzt das Cauchysche Problem mit Anfangswerten auf der Charakteristik keine Lösung.

Als Beispiel betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 . \tag{7}$$

Ihre charakteristische Gleichung lautet

$$-\sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 = 0 .$$

Daraus folgt $\omega = f(x_m)$ mit einer willkürlich wählbaren Funktion f. Die Gleichung der charakteristischen Fläche hat die Gestalt $f(x_m) = \text{const}$; löst man diese nach x_m auf, dann ergibt sich eine Gleichung der Gestalt $x_m = \text{const}$. Die Charakteristiken der Gleichung (7) stellen also eine Ebenenschar $x_m = \text{const}$ dar. Die Cauchysche Fläche sei jetzt die Ebene $x_m = 0$, und die Cauchyschen Bedingungen mögen von der Gestalt

$$u\Big|_{x_m=0} = \varphi_0(x_1, \ldots, x_{m-1}) , \qquad \frac{\partial u}{\partial x_m}\Big|_{x_m=0} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) \tag{8}$$

sein. Setzen wir in Gleichung (7) $x_m = 0$, dann erhalten wir sofort die Beziehung

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_k^2} .$$

Daraus folgt, daß die zweite Bedingung aus (8) überflüssig ist — es genügt, nur die Bedingung

$$u\Big|_{x_m=0} = \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$$

vorzugeben.

§ 3. Transformation der Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die kanonische Form

Wir betrachten speziell den Fall einer linearen nichtentarteten Transformation der unabhängigen Veränderlichen:

$$\xi_r = j_{rk}\, x_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \qquad j_{rk} = \text{const} . \tag{1}$$

Führt man die Matrix J mit den Elementen j_{rk} ein, dann läßt sich die Transformation (1) in der Form

$$\xi = J\, x \tag{1_1}$$

schreiben.

Halten wir jetzt den Punkt x fest, dann stellt die Koeffizientenmatrix A des Hauptteiles der Differentialgleichung eine Matrix mit konstanten Elementen dar. Die Matrix J läßt sich nun so wählen, daß die transformierte Koeffizientenmatrix $\tilde{A} = J\,A\,J'$ [vgl. Formel (1.5)] Diagonalgestalt annimmt: $\tilde{A}_{jk} = 0,\ j \neq k$. Dann nimmt in dem festgehaltenen Punkt x Gleichung (1.1) folgende Gestalt an:

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \Phi_1\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right) = 0\,. \tag{2}$$

Dabei ist $\nu_k = \tilde{A}_{kk}$. Eine derartige Gestalt einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der keine gemischten zweiten Ableitungen vorkommen, heißt *kanonische Form* dieser Gleichung. Somit gilt: *Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearem Hauptteil läßt sich in einem beliebigen Punkt des Raumes mit Hilfe einer linearen Transformation der unabhängigen Veränderlichen auf die kanonische Form bringen.*

Wenn die Koeffizienten A_{jk} konstant sind, dann läßt sich offenbar die Differentialgleichung im gesamten Raum gleichzeitig auf die kanonische Form transformieren.

Die LAPLACE-Gleichung, die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung besitzen bereits die kanonische Form.

Die kanonische Form einer Differentialgleichung steht in engem Zusammenhang mit dem Typ dieser Gleichung. Nach dem SYLVESTERschen Trägheitsgesetz für quadratische Formen sind nämlich unter den Zahlen ν_k genauso viele positiv, negativ oder gleich Null, wie unter den Eigenwerten λ_k der Koeffizientenmatrix des Hauptteiles. Somit läßt sich der Typ einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearem Hauptteil wie folgt bestimmen: Die Gleichung (1.1) gehört zum Typ (α, β, γ), wenn von den Zahlen ν_k in der kanonischen Form (2) dieser Gleichung α positiv, β negativ und γ gleich Null sind.

§ 4. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher

Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher zeichnet sich dadurch aus, daß sie sich nicht nur in einem einzelnen Punkt, sondern auch in einem gewissen Gebiet, in welchem sich der Typ der Gleichung nicht ändert, auf die kanonische Form transformieren läßt.

Wir bezeichnen mit x, y die unabhängigen Veränderlichen und mit A, B, C die Koeffizienten des Hauptteiles. Dann nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\,. \tag{1}$$

Wir nehmen an, daß in jedem Punkt wenigstens einer der Koeffizienten A, B oder C von Null verschieden ist. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß diese Koeffizienten der Klasse $C^{(1)}$ in dem entsprechenden abgeschlossenen Gebiet angehören.

Wir betrachten die Koeffizientenmatrix des Hauptteiles

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

sowie deren Eigenwertgleichung

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\lambda^2 - (A + C)\,\lambda + A\,C - B^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung besitzt die reellen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4\,B^2}}{2}\,,$$

letztere haben ein und dasselbe Vorzeichen für $A\,C - B^2 > 0$ und verschiedenes Vorzeichen für $A\,C - B^2 < 0$; gilt $A\,C - B^2 = 0$, dann ist eine der Nullstellen gleich Null, die andere jedoch von Null verschieden. Daraus ergibt sich, daß *Gleichung* (1) *für* $A\,C - B^2 > 0$ *elliptisch, für* $A\,C - B^2 = 0$ *parabolisch und für* $A\,C - B^2 < 0$ *hyperbolisch* ist; andere Typen können hier nicht auftreten.

Die charakteristische Gleichung

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2\,B\,\frac{\partial\omega}{\partial x}\,\frac{\partial\omega}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

läßt sich mit Hilfe des folgenden einfachen Ansatzes auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen. Es sei $\omega(x, y)$ eine Lösung der Gleichung (2). Wir betrachten die Charakteristik

$$\omega(x, y) = \text{const}\,.$$

Auf dieser Charakteristik ist die Beziehung

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}\,dy = 0$$

oder

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} : \frac{\partial\omega}{\partial y} = dy : (-\,dx)$$

erfüllt. Gleichung (2) ist homogen bezüglich $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ und $\frac{\partial\omega}{\partial y}$. Ersetzt man die letzten Ausdrücke durch die ihnen proportionalen Größen dy und $-dx$, dann erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$A\,dy^2 - 2\,B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0\,. \tag{3}$$

Wenn umgekehrt $\omega(x, y) = \text{const}$ das allgemeine Integral der Gleichung (3) ist, dann überzeugt man sich leicht davon, daß die Funktion $\omega(x, y)$ der charakteristischen Gleichung genügt.

Gleichung (3) zerfällt in zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{B + \sqrt{B^2 - A\,C}}{A}\,, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B - \sqrt{B^2 - A\,C}}{A}\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

welche übereinstimmen, wenn Gleichung (1) parabolisch ist; in allen übrigen Fällen sind diese Gleichungen verschieden.

Wir betrachten zunächst den Fall einer elliptischen Gleichung (1): $A\,C - B^2 > 0$. Wir nehmen an, die Koeffizienten A, B und C seien in eine gewisse Umgebung (in der komplexen Ebene) der reellen Punkte x und y analytisch fortsetzbar. Dann lassen sich die Gleichungen (4) als gewöhnliche Differentialgleichungen im Komplexen auffassen. Wir

betrachten z. B. die erste dieser Gleichungen, und es sei $\omega(x, y) = \text{const}$ das allgemeine Integral dieser Gleichung; wie oben gezeigt wurde, erfüllt die Funktion $\omega(x, y)$ die charakteristische Gleichung (2). Wir nehmen jetzt x und y als reell an, und es gelte $\omega(x, y) = \xi(x, y) + i\,\eta(x, y)$, wobei ξ und η reelle Funktionen sind. Es ist leicht einzusehen, daß die JACOBIsche Funktionaldeterminante $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ nirgends verschwindet. Wäre nämlich diese in einem gewissen Punkt gleich Null, dann würde in diesem Punkt

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

oder $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \omega}{\partial y}$ für ein gewisses reelles λ gelten. Setzt man nun dies in Gleichung (2) ein, so ergibt sich, daß die Gleichung $A\,\lambda^2 + 2\,B\,\lambda + C = 0$ reelle Nullstellen besitzt; letzteres kann jedoch wegen $A\,C - B^2 > 0$ nicht eintreten. Wir wählen jetzt ξ und η als neue unabhängige Veränderliche, und es seien $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$ die transformierten Koeffizienten. Da, wie im § 2 gezeigt wurde, die Charakteristiken in bezug auf Transformationen der unabhängigen Veränderlichen invariant sind, so muß die Funktion $\tilde{\omega} = \xi + i\,\eta$ der neuen charakteristischen Gleichung

$$\tilde{A}\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi}\right)^2 + 2\,\tilde{B}\,\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi}\,\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \eta} + \tilde{C}\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \eta}\right)^2 = 0 \tag{5}$$

genügen. Daraus ergibt sich $\tilde{A} = \tilde{C}$, $\tilde{B} = 0$. Dividieren wir nun die transformierte Gleichung durch $\tilde{A}$, so bringen wir dieselbe auf die kanonische Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0\,. \tag{6}$$

Sind die Koeffizienten A, B, C nicht in ein gewisses komplexes Gebiet analytisch fortsetzbar, dann läßt sich Gleichung (1) trotzdem auf die Form (6) transformieren, wenn man eine zusätzliche, natürlich erscheinende Voraussetzung macht, welche wir etwas später formulieren wollen. Wir setzen zunächst

$$\frac{A}{\sqrt{A\,C - B^2}} = a\,, \qquad \frac{B}{\sqrt{A\,C - B^2}} = b\,, \qquad \frac{C}{\sqrt{A\,C - B^2}} = c\,,$$

so daß also $a\,c - b^2 = 1$ gilt. Jetzt stellen wir die elliptische Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + c\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0 \tag{7}$$

auf. Wir wählen einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) und setzen voraus, daß Gleichung (7) in einer gewissen Umgebung dieses Punktes eine Lösung der Klasse $C^{(2)}$ besitzt, welche nicht identisch einer Konstanten ist, dann gilt in dieser Umgebung $\eta_x^2 + \eta_y^2 > 0$. Auf Grund der Gleichung (7) ist das System

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\left(b\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + c\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = a\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\,\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{8}$$

lösbar, und es existiert eine Funktion $\xi \in C^{(2)}$, die dieses System erfüllt. Man beweist leicht, daß $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ ist und daß die Funktion $\xi(x, y) + i\,\eta(x, y)$ der charakteristischen Gleichung genügt. Das Weitere verläuft genauso wie oben. Wir bemerken schließlich noch, daß wir in diesem Falle von den Gleichungen (4) keinen Gebrauch gemacht haben.

Wir wenden uns jetzt dem parabolischen Fall zu. Sei $\xi(x, y) = \text{const}$ das allgemeine Integral jeder der Gleichungen (4). Wir führen die neuen Veränderlichen ξ und η ein; dabei bedeutet $\eta = \eta(x, y)$ irgendeine von $\xi(x, y)$ unabhängige Funktion. Da Gleichung (5) die

Lösung $\tilde{\omega} = \xi$ besitzt, so ist $\tilde{A} = 0$. Da sich außerdem der Typ der Gleichung bei einer Variablensubstitution nicht ändert, so gilt $\tilde{A}\,\tilde{C} - \tilde{B}^2 = 0$ und somit $\tilde{B} = 0$. Dividieren wir die transformierte Gleichung (1) durch $\tilde{C}$, so bringen wir diese auf die kanonische Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 . \tag{9}$$

Im hyperbolischen Fall führen wir $\xi_1 = \xi + \eta$ und $\eta_1 = \xi - \eta$ als neue unabhängige Veränderliche ein; dabei sind $\xi(x, y) = \text{const}$ und $\eta(x, y) = \text{const}$ die allgemeinen Integrale der Gleichungen (4); wie man leicht sieht, verschwindet nirgends die JACOBIsche Funktionaldeterminante $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$. Gleichung (5) besitzt in diesem Fall zwei Lösungen: $\tilde{\omega} = \dfrac{1}{2}(\xi_1 + \eta_1)$, $\tilde{\omega} = \dfrac{1}{2}(\xi_1 - \eta_1)$, und somit gilt $\tilde{A} = -\tilde{C}$, $\tilde{B} = 0$. Dividieren wir nun die transformierte Gleichung (1) durch $\tilde{A}$, so gelangen wir zur kanonischen Form dieser Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2} + \Phi_1\left(\xi_1, \eta_1, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right) = 0 . \tag{10}$$

§ 5. Formal adjungierte Differentialausdrücke

Wir betrachten den linearen Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$L\,u = A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} + A_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0\,u . \tag{1}$$

Im euklidischen $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-Raum geben wir ein endliches Gebiet Ω vor, welches von einer stückweise glatten Fläche Γ berandet wird. Wir setzen voraus, daß im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ die Koeffizienten A_{jk} stetige zweite Ableitungen, die Koeffizienten A_k stetige erste Ableitungen besitzen und der Koeffizient A_0 stetig ist. Des weiteren nehmen wir an, daß $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ gilt, d. h. daß die Funktion $u(x)$ zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ stetig ist.

Wir konstruieren jetzt den Differentialausdruck

$$M\,u = \frac{\partial^2(A_{jk}\,u)}{\partial x_j\,\partial x_k} - \frac{\partial(A_k\,u)}{\partial x_k} + A_0\,u . \tag{2}$$

Diesen nennen wir den *zu L formal adjungierten Differentialdruck*. Es erweist sich als günstig, den Ausdruck L auf die folgende Gestalt umzuformen:

$$L\,u = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + C\,u\,, \qquad B_k = A_k - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_j}\,, \qquad C = A_0 . \tag{3}$$

Wenn L in dieser Form dargestellt wird, dann nimmt M die Gestalt

$$M\,u = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial(B_k\,u)}{\partial x_k} + C\,u \tag{4}$$

an. Unter Berücksichtigung dieser Beziehung prüft man leicht nach, daß *die formale Adjungiertheit eine symmetrische Eigenschaft* ist: Der zu M formal

adjungierte Differentialausdruck ist L. In der Tat gilt

$$M\,u = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - B_k\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right) u\,.$$

Wenn nun N der zu M formal adjungierte Differentialausdruck ist, dann gilt

$$N\,u = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial(B_k\,u)}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right) u = L\,u\,.$$

Wenn $M \equiv L$ ist, dann heißt der Differentialausdruck L *formal selbstadjungiert.*

Wie man aus den Formeln (3) und (4) ersieht, unterscheiden sich formal adjungierte Ausdrücke nur in den mittleren Gliedern dieser Formeln. Offenbar gilt $M \equiv L$ dann und nur dann, wenn $B_k \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, ist. Der Differentialausdruck L ist somit dann und nur dann selbstadjungiert, wenn $B_k \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, ist. Daraus folgt, daß sich ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck zweiter Ordnung auf folgende Gestalt bringen läßt:

$$L\,u = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C\,u\,, \quad A_{jk} = A_{kj}\,. \tag{5}$$

Der LAPLACE-Operator und der Wellenoperator sind formal selbstadjungiert, dagegen ist der Wärmeleitungsoperator nicht formal selbstadjungiert.

§ 6. Die GREENschen Formeln

Der Differentialausdruck L sei durch die Formel (5.3) definiert, und seine Koeffizienten mögen die Bedingungen des § 5 erfüllen. Des weiteren seien die Funktionen $u, v \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. Wir bilden das Integral

$$\int_\Omega v\,L\,u\,dx = \int_\Omega v\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) dx + \int_\Omega v\left(B_k\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + C\,u\right) dx\,. \tag{1}$$

Durch Anwendung der Formel der partiellen Integration (vgl. Kap. 2, § 1) auf das erste Integral der rechten Seite erhalten wir die sogenannte *erste* GREEN*sche Formel*

$$\int_\Omega v\,L\,u\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx + \int_\Omega v\left(B_k\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + C\,u\right) dx + \int_\Gamma v\,A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\,d\Gamma\,. \tag{2}$$

Dabei bedeutet ν die (in bezug auf das Gebiet Ω) äußere Normale zur Fläche Γ.

Jetzt wenden wir die erste GREENsche Formel auf den formal adjungierten Differentialausdruck M an, wobei wir u und v miteinander vertauschen:

$$\int_\Omega u\,M\,v\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx + \int_\Omega u\left\{-B_k\,\frac{\partial v}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right) v\right\} dx + \int_\Gamma u\,A_{jk}\,\frac{\partial v}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\,d\Gamma\,. \tag{3}$$

Die Formel (3) subtrahieren wir nun von der Formel (2). Dabei überzeugt man sich leicht davon, daß rechts sämtliche Raumintegrale verschwinden. Da nämlich $A_{jk} = A_{kj}$ ist, so stimmen die ersten Integrale der rechten Seiten von (2) und (3) überein. Des weiteren ergibt sich durch partielle Integration

$$-\int_\Omega u\, B_k \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx = \int_\Omega v \frac{\partial (B_k\, u)}{\partial x_k}\, dx - \int_\Gamma B_k\, u\, v \cos(\nu, x_k)\, d\Gamma =$$

$$= \int_\Omega \left\{ v\, B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + u\, v \frac{\partial B_k}{\partial x_k} \right\} dx - \int_\Gamma B_k\, u\, v \cos(\nu, x_k)\, d\Gamma .$$

Daraus ersieht man, daß die auf den rechten Seiten der Formeln (2) und (3) auftretenden Raumintegrale gleich sind.

Als Ergebnis der Subtraktion erhalten wir die *zweite* GREEN*sche Formel*

$$\int_\Omega (v\, L\, u - u\, M\, v)\, dx = \int_\Gamma \left[A_{jk} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + B_k\, u\, v \right] \cos(\nu, x_k)\, d\Gamma . \quad (4)$$

Die GREENschen Formeln vereinfachen sich etwas für formal selbstadjungierte Differentialausdrücke. In diesem Fall gilt nämlich $B_k \equiv 0$, und es ergeben sich die folgenden einfacheren Formeln: die erste GREENsche Formel

$$\int_\Omega v\, L\, u\, dx = -\int_\Omega A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx + \int_\Omega C\, u\, v\, dx + \int_\Gamma v\, A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j)\, d\Gamma \quad (5)$$

und die zweite GREENsche Formel

$$\int_\Omega (v\, L\, u - u\, L\, v)\, dx = \int_\Gamma A_{jk} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \cos(\nu, x_j)\, d\Gamma . \quad (6)$$

Wir stellen jetzt die GREENschen Formeln für die drei wichtigsten Differentialausdrücke (man nennt sie gewöhnlich Operatoren) der mathematischen Physik, den LAPLACE-, den Wärmeleitungs- und den Wellenoperator, auf.

1. Der LAPLACE-Operator

$$\Delta = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

ist formal selbstadjungiert; seine Koeffizienten nehmen die Werte $A_{jk} = \delta_{jk}$ und $C = 0$ an. Setzt man diese Werte in die Formel (5) ein, so ergibt sich die *erste* GREEN*sche Formel für den* LAPLACE*-Operator*:

$$\int_\Omega v\, \Delta u\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma . \quad (7)$$

Wir erwähnen noch zwei Spezialfälle der Formel (7).

Für $u = v$ erhalten wir

$$\int_\Omega u\, \Delta u\, dx = -\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma . \quad (8)$$

Wie bereits im § 3 von Kap. 4 bemerkt wurde, nennt man das Integral

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$$

DIRICHLET*sches Integral.*

Setzt man in der Formel (7) $v \equiv 1$, so ergibt sich die folgende, für das Weitere wichtige Formel

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \int\limits_{\Omega} \Delta u \, dx . \tag{9}$$

Die *zweite* GREEN*sche Formel für den* LAPLACE-*Operator* hat die Gestalt

$$\int\limits_{\Omega} (v \, \Delta u - u \, \Delta v) \, dx = \int\limits_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\Gamma . \tag{10}$$

2. Der Wärmeleitungsoperator

$$L = \frac{\partial}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

ist nicht formal selbstadjungiert. Für diesen Operator gilt

$$A_{mm} = 0; \quad A_{kk} = -1, \quad 1 \leqq k \leqq m-1; \quad A_{jk} = 0, \quad j \neq k;$$
$$B_m = 1; \quad B_k = 0, \quad 1 \leqq k \leqq m-1; \quad C = 0 .$$

Der zum Wärmeleitungsoperator formal adjungierte Operator M ist von der Gestalt

$$M = -\frac{\partial}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} .$$

Auf Grund der Formeln (2) und (4) ergibt sich

$$\int\limits_{\Omega} v \, L \, u \, dx = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + v \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx - \int\limits_{\Gamma} v \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k) \, d\Gamma; \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Omega} (v \, L \, u - u \, M \, v) \, dx = \int\limits_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^{m-1} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_k} - v \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \cos(\nu, x_k) + u \, v \cos(\nu, x_m)\right] d\Gamma . \tag{12}$$

3. Der Wellenoperator wird oft durch das Symbol $\Box$ gekennzeichnet:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} .$$

Dieser Operator ist formal selbstadjungiert; seine Koeffizienten sind

$$A_{mm} = 1; \quad A_{kk} = -1, \quad 1 \leqq k \leqq m-1; \quad A_{jk} = 0,$$
$$j \neq k; \quad C = 0 .$$

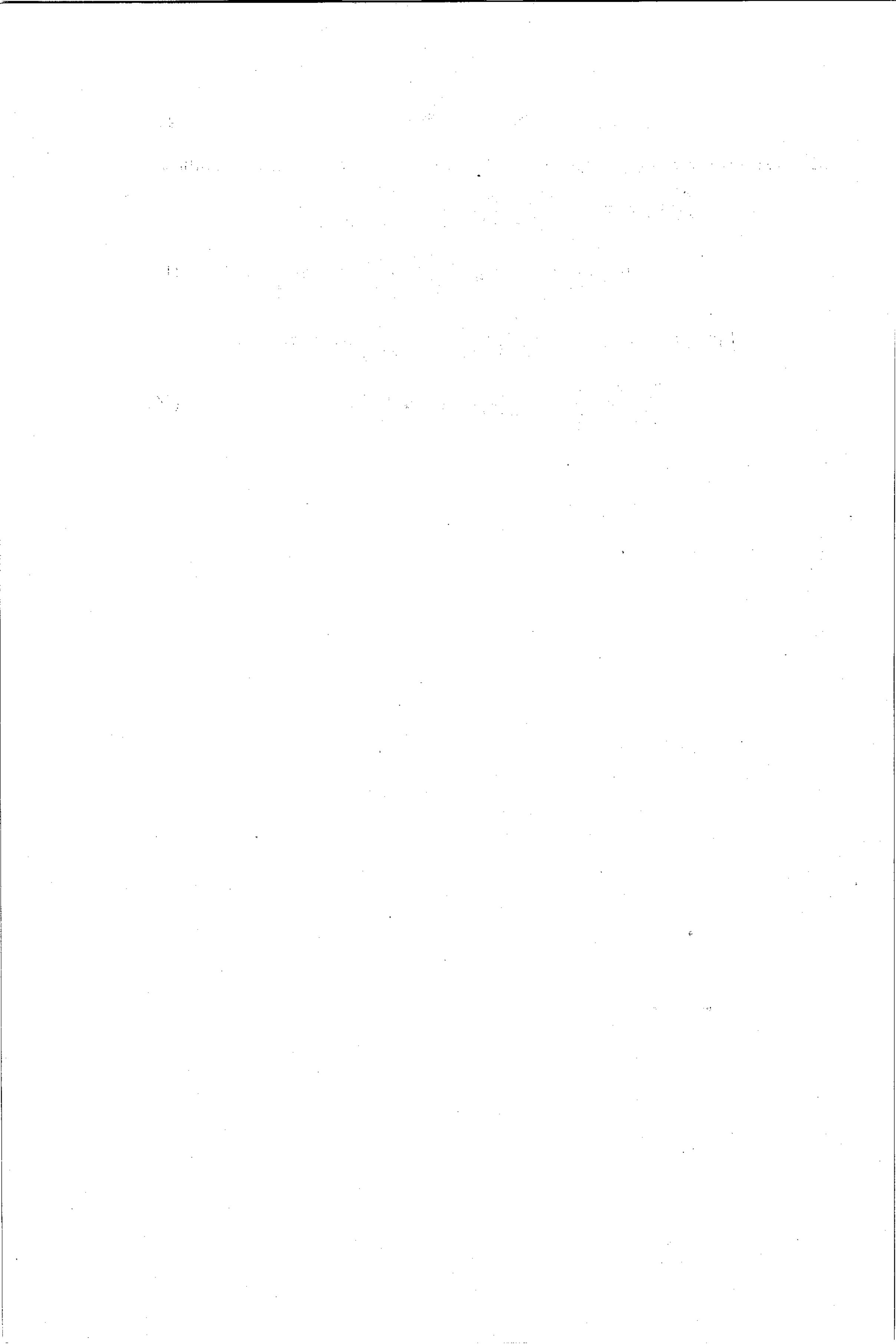
Die Formeln (5) und (6) nehmen für den Wellenoperator folgende Gestalt an:

$$\int\limits_{\Omega} v \, \Box \, u \, dx = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial v}{\partial x_m} \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} v \left[\frac{\partial u}{\partial x_m} \cos(\nu, x_m) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k) \right] d\Gamma, \tag{13}$$

$$\int\limits_{\Omega} (v \, \Box \, u - u \, \Box \, v) \, dx = \int\limits_{\Gamma} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x_m} - u \frac{\partial v}{\partial x_m} \right) \cos(\nu, x_m) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m-1} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \cos(\nu, x_k) \right] d\Gamma. \tag{14}$$



Teil V

Gleichungen vom elliptischen Typ

KAPITEL 11

LAPLACE-GLEICHUNG UND HARMONISCHE FUNKTIONEN

§ 1. Grundbegriffe

Wir beginnen mit der einfachsten, aber wichtigen elliptischen Differentialgleichung, der LAPLACE-Gleichung. Diese Gleichung hat die Gestalt

$$-\Delta u = f(x) . \tag{1}$$

Dabei ist $f(x)$ eine gegebene Funktion. Gilt $f(x) \not\equiv 0$, dann heißt Gleichung (1) *inhomogene* LAPLACE-*Gleichung*. Im Falle $f(x) \equiv 0$ haben wir es mit der *homogenen* LAPLACE-*Gleichung*

$$\Delta u = 0 \tag{2}$$

zu tun. Die inhomogene LAPLACE-Gleichung nennt man häufig auch POISSON *Gleichung*.

In der ausführlicheren Schreibweise nehmen die inhomogene bzw. die homogene LAPLACE-Gleichung die Gestalt

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x)$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

an.

Wir betrachten eine gewisse geschlossene Fläche Γ, die nicht unbedingt zusammenhängend sein muß; Γ berande ein endliches oder unendliches Gebiet Ω (vgl. Abb. 12 bzw. Abb. 13). In beiden Fällen setzen wir voraus, daß

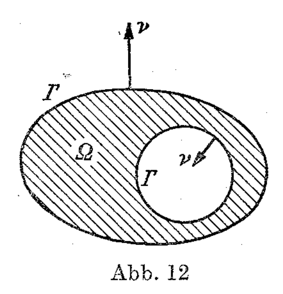


Abb. 12

Abb. 13

die Fläche Γ endlich ist. Wir wollen das Verhalten der Lösungen der homogenen LAPLACE-Gleichung in derartigen Gebieten untersuchen.[1])

Die Funktion $u(x)$ heißt *harmonisch im endlichen Gebiet* Ω, wenn sie in diesem Gebiet zweimal stetig differenzierbar ist und der homogenen LAPLACE-Gleichung genügt.

Die Funktion $u(x)$ nennen wir *harmonisch im unendlichen Gebiet* Ω, wenn $u(x)$ in jedem endlichen Punkt dieses Gebietes zweimal stetig differenzierbar ist, der homogenen LAPLACE-Gleichung genügt und für hinreichend große $|x|$ die Ungleichung

$$|u(x)| \leqq \frac{C}{|x|^{m-2}} \tag{3}$$

erfüllt, wobei m die Dimension des Raumes und C eine gewisse Konstante bedeuten. Im Falle eines ebenen Gebietes ($m = 2$) bedeutet die Bedingung (3), daß eine in einem unendlichen Gebiet harmonische Funktion im Unendlichen beschränkt ist.

Es sei betont, daß sich die Definition der harmonischen Funktion nur auf den Fall eines *offenen Gebietes* (d. h. einer offenen, zusammenhängenden Menge) bezieht. Wenn von einer in einem abgeschlossenen Gebiet harmonischen Funktion die Rede ist, dann ist darunter eine Funktion zu verstehen, die in einem offenen Gebiet, welches das genannte abgeschlossene Gebiet enthält, harmonisch ist.

Wir bemerken schließlich, daß die Definition der harmonischen Funktion keinerlei Bedingungen an das Verhalten der Funktion auf dem Rande des Gebietes stellt.

Beispiel 1. Wenn Ω ein unendliches Gebiet ist, dann ist die Funktion $u(x) \equiv 1$ nur für $m = 2$ harmonisch. Wenn $m > 2$ ist, dann ist diese Funktion in keinem unendlichen Gebiet harmonisch; sie ist allerdings für beliebiges m in jedem endlichen Gebiet harmonisch.

Beispiel 2. In der zweidimensionalen Ebene ist die Funktion

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

mit $z = x + i\,y$ in einem beliebigen Gebiet, welches den Koordinatenursprung nicht enthält, harmonisch.

Beispiel 3. Die Funktion $\operatorname{Re}\sqrt{z}$, $z = x + i\,y$, ist im radial aufgeschnittenen Kreis $|z| < R$ (R beliebig positiv) harmonisch.

Beispiel 4. Die Funktion zweier Veränderlicher $u = x^2 + y^2$ ist in keinem Gebiet harmonisch, da sie nicht der homogenen LAPLACE-Gleichung genügt:

$$\Delta\,(x^2 + y^2) = 4 \neq 0\,.$$

Beispiel 5. Die Funktion $u = x^2 - y^2$ ist in einem beliebigen endlichen Gebiet harmonisch.

In der zweidimensionalen Ebene ist die homogene LAPLACE-Gleichung invariant bezüglich konformer Abbildungen (vgl. Kapitel 13, § 3). Für beliebiges m ist dies nicht der Fall;

---

[1]) Von großem Interesse ist die Untersuchung der Lösungen elliptischer Gleichungen auch in solchen Gebieten, die von unendlichen Flächen berandet werden. Mit derartigen Untersuchungen werden wir uns in diesem Buch nicht beschäftigen; lediglich an einer Stelle (in Kap. 18) wird der Fall des Halbraumes betrachtet.

dennoch existiert eine Abbildung, die eine beliebige harmonische Funktion wieder in eine harmonische Funktion überführt. Es ist dies die KELVIN-*Transformation*, die den Punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ in den Punkt $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ abbildet, welcher zu dem Punkt x in bezug auf die Sphäre vom gegebenen Radius R mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung symmetrisch ist; eine gegebene Funktion $u(x)$ wird dadurch in die Funktion

$$w(x') = \frac{R^{m-2}}{|x'|^{m-2}} u(x) \tag{4}$$

übergeführt.

Es sei daran erinnert, daß die Punkte x und x' in bezug auf die oben genannte Sphäre symmetrisch heißen, wenn beide auf einem vom Koordinatenursprung ausgehenden Strahl liegen und wenn $|x| \cdot |x'| = R^2$ gilt. Die cartesischen Koordinaten symmetrischer Punkte genügen der Beziehung

$$x_k = x'_k \frac{R^2}{|x'|^2}. \tag{5}$$

Eine einfache, aber recht umfangreiche Rechnung ergibt die Beziehung

$$\Delta_{x'} w = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2_k} = \frac{|x|^{m+2}}{R^{m+2}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{|x|^{m+2}}{R^{m+2}} \Delta_x u .$$

Somit folgt aus $\Delta_x u = 0$ stets $\Delta_{x'} w = 0$.

§ 2. Die singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung

Es seien $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ zwei Punkte des m-dimensionalen euklidischen Raumes E_m. Wir setzen

$$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - \xi_k)^2} \tag{1}$$

und betrachten die Funktion

$$v(x, \xi) = \frac{1}{r^{m-2}} \tag{2}$$

für $m > 2$. Den Punkt ξ nehmen wir als fest an, so daß man $v(x, \xi)$ als Funktion des Punktes x betrachten kann.

Die Funktion $v(x, \xi)$ ist im Punkt $x = \xi$ unstetig. Wir beweisen jetzt, daß die Funktion $v(x, \xi)$ in einem beliebigen Gebiet, welches den Punkt ξ nicht enthält, harmonisch ist. Zunächst ist die Funktion $v(x, \xi)$ in einem solchen Gebiet zusammen mit ihren Ableitungen beliebiger Ordnung stetig. Des weiteren gilt im Unendlichen

$$v(x, \xi) = O\left(\frac{1}{|x|^{m-2}}\right). \tag{3}$$

In der Tat, es gilt $r = |x - \xi| \geqq |x| - |\xi|$. Da uns das Verhalten der Funktion v für hinreichend große $|x|$ interessiert, so können wir annehmen, daß $|x| > 2\,|\xi|$ ist. Dann gilt $|\xi| < \frac{|x|}{2}$, $r > \frac{|x|}{2}$ und

$$v(x, \xi) < \frac{2^{m-2}}{|x|^{m-2}}.$$

Die Beziehung (3) ist wesentlich, wenn das betrachtete Gebiet unendlich ist.

Schließlich genügt die Funktion (2) der homogenen LAPLACE-Gleichung.

In der Tat, es gilt $\dfrac{\partial r}{\partial x_k} = \dfrac{x_k - \xi_k}{r}$; daraus ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\partial r}{\partial x_k} = -\frac{(m-2)(x_k - \xi_k)}{r^m}.$$

Des weiteren gilt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = -\frac{m-2}{r^m} + \frac{m(m-2)(x_k-\xi_k)^2}{r^{m+2}} = \frac{m-2}{r^m}\left(\frac{m(x_k-\xi_k)^2}{r^2} - 1\right).$$

Wir summieren nun die letzten Ausdrücke auf und erhalten

$$\Delta v = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = \frac{m-2}{r^m}\left[\frac{m}{r^2}\sum_{k=1}^{m}(x_k-\xi_k)^2 - m\right] = 0\,.$$

Die Funktion $v(x, \xi)$ heißt *singuläre Lösung der* LAPLACE-*Gleichung*.

Für die Anwendungen ist es wichtig, wie wir weiter unten sehen werden, daß die singuläre Lösung für $x \to \xi$ mit einer bestimmten Geschwindigkeit gegen Unendlich strebt. Für $m = 2$ ist die Funktion (2) identisch gleich Eins; eine solche Funktion kann nicht als singuläre Lösung dienen.

Im Falle $m = 2$ nennt man die Funktion

$$v(x, \xi) = \ln\frac{1}{r} \tag{4}$$

singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung. Diese Funktion ist harmonisch in einem beliebigen endlichen Gebiet, welches den Punkt ξ nicht enthält.

Die singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung ist eine symmetrische Funktion von x und ξ. Somit stellt die Funktion $v(x, \xi)$ bei festem x in einem beliebigen Gebiet, welches den Punkt x nicht enthält, eine harmonische Funktion von ξ dar; im zweidimensionalen Fall muß dieses Gebiet außerdem endlich sein.

Bemerkung. Für denjenigen Leser, der mit dem Begriff der verallgemeinerten Funktionen vertraut ist, bemerken wir, daß die singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung der Gleichung

$$-\Delta v = c\,\delta(x - \xi)$$

genügt; dabei ist δ die DIRAC-Funktion und c eine entsprechend gewählte Konstante.

§ 3. Die Integraldarstellung für die Funktionen der Klasse $C^{(2)}$

Wir betrachten ein endliches Gebiet Ω im m-dimensionalen Raum E_m $(m > 2)$, das durch eine stückweise glatte Fläche Γ berandet wird. In Ω sei eine Funktion $u(\xi)$ gegeben; ξ ist ein variabler Punkt dieses Gebietes. Wir nehmen an, daß $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ gilt. Im Gebiet Ω geben wir einen beliebigen Punkt x vor. Wir beschreiben um diesen Punkt eine Kugel D_ε vom Radius ε mit dem Mittelpunkt im Punkt x; die Oberfläche der Kugel D_ε bezeichnen wir mit S_ε. Den Radius ε wählen wir so klein, daß die Kugel D_ε ganz im Inneren des Gebietes Ω liegt (vgl. Abb. 14).

Setzen wir $\Omega^{(\varepsilon)} = \Omega \backslash \bar{D}_\varepsilon$, dann gehören die beiden Funktionen $u(\xi)$ und die singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung

$$v(x, \xi) = \frac{1}{r^{m-2}}$$

zur Klasse $C^{(2)}(\overline{\Omega^{(\varepsilon)}})$, und auf diese Funktionen ist die GREENsche Formel (6.10) aus Kap. 10 anwendbar:

$$\int\limits_{\Omega \backslash D_\varepsilon} (v \, \Delta u - u \, \Delta v) \, d\xi = \int\limits_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d_\xi \Gamma + \int\limits_{S_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d_\xi S_\varepsilon \, . \tag{1}$$

Der Index ξ an den Differentialen bedeutet, daß die Integration nach dem variablen Punkt ξ erfolgt.

Die Formel (1) läßt sich vereinfachen, wenn man bemerkt, daß $\Delta v = 0$ in $\Omega \backslash \bar{D}_\varepsilon$ gilt. Des weiteren ist $r = \varepsilon$ auf der Sphäre S_ε, und die in bezug auf das Gebiet $\Omega \backslash \bar{D}_\varepsilon$ äußere Normale ν zu S_ε ist entgegengesetzt zum Radiusvektor gerichtet. Somit gilt auf S_ε

$$v = \frac{1}{\varepsilon^{m-2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\,.$$

Abb. 14

Unter Benutzung der bekannten Formel $dS_r = r^{m-1} \, dS_1$, wobei S_r die Sphäre vom Radius r bedeutet, erhalten wir für $r = \varepsilon$:

$$dS_\varepsilon = \varepsilon^{m-1} \, dS_1 \, .$$

Schließlich führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$\theta = \frac{\xi - x}{\varepsilon}\,.$$

Für $\xi \in S_\varepsilon$ gilt $|\theta| = 1$ und folglich $\theta \in S_1$. Dabei ist $\xi = x + \varepsilon \, \theta$. Jetzt läßt sich die Formel (1) auf folgende einfachere Gestalt bringen:

$$\int\limits_{\Omega \backslash D_\varepsilon} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi) \, d\xi = \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi \Gamma +$$

$$+ \int\limits_{S_1} \left[\varepsilon \frac{\partial u\,(x + \varepsilon\,\theta)}{\partial \nu} - (m-2) \; u\,(x + \varepsilon\,\theta)\right] dS_1 \, . \tag{2}$$

In der Formel (2) lassen wir jetzt $\varepsilon \to 0$ streben. Dann hat die linke Seite dieser Formel das uneigentliche Integral

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi) \, d\xi$$

zum Grenzwert. Auf der rechten Seite der Formel (2) hängt das erste Integral

nicht von ε ab; das zweite Integral läßt sich in zwei Integrale aufspalten:

$$\int_{S_1} \left[\varepsilon \frac{\partial u\,(x + \varepsilon\,\theta)}{\partial \nu} - (m-2)\; u\,(x + \varepsilon\,\theta)\right] dS_1 =$$

$$= \varepsilon \int_{S_1} \frac{\partial u\,(x + \varepsilon\,\theta)}{\partial \nu}\, dS_1 - (m-2) \int_{S_1} u\,(x + \varepsilon\,\theta)\; dS_1\,. \tag{3}$$

Die ersten Ableitungen der Funktion $u(\xi)$ sind im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ stetig und somit beschränkt. Es sei

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right| \leqq M = \text{const}\,.$$

Dann gilt

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cos\,(\nu, \xi_k)\right| \leqq m\,M\,.$$

Daraus ergibt sich nun

$$\left|\varepsilon \int_{S_1} \frac{\partial u\,(x + \varepsilon\,\theta)}{\partial \nu}\, dS_1\right| \leqq \varepsilon\, m\, M\, |S_1| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Im zweiten Summanden der rechten Seite der Formel (3) kann man wegen der Stetigkeit der Funktion u den Grenzübergang unter dem Integral ausführen. Folglich ist der Grenzwert dieses Summanden gleich

$$-\,(m-2) \int_{S_1} u(x)\; dS_1 = -\,(m-2)\; |S_1|\; u(x)\,.$$

Somit erhalten wir als Ergebnis des Grenzüberganges in der Formel (2) die Beziehung

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r^{m-2}}\, \Delta u(\xi)\; d\xi = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi \Gamma - (m-2)\; |S_1|\; u(x)\,.$$

Daraus ergibt sich nun

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\; |S_1|} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi \Gamma -$$

$$- \frac{1}{(m-2)\; |S_1|} \int_{\Omega} \frac{1}{r^{m-2}}\, \Delta u(\xi)\; d\xi\,. \tag{4}$$

Die Formel (4) nennt man *Integraldarstellung einer Funktion der Klasse* $C^{(2)}$.

Für $m = 3$ gilt $|S_1| = 4\,\pi$, und die Integraldarstellung (4) nimmt in diesem Fall die folgende Gestalt an:

$$u(x) = \frac{1}{4\,\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r}\right) d_\xi \Gamma - \frac{1}{4\,\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r}\, \Delta u(\xi)\; d\xi\,. \tag{5}$$

Für $m = 2$ ist die Formel (4) nicht sinnvoll. Wenn man aber in diesem Fall von der entsprechenden singulären Lösung $v(x, \xi) = \ln \frac{1}{r}$ ausgeht und die

vorangegangenen Überlegungen wiederholt, dann erhält man die Formel

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right) d_\xi \Gamma - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega} \ln \frac{1}{r} \Delta u(\xi)\, d\xi . \quad (6)$$

Diese Formel liefert die Integraldarstellung einer Funktion der Klasse $C^{(2)}$ im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher.

Aus der Integraldarstellung (4) ergeben sich eine Reihe wichtiger Folgerungen, mit deren Herleitung wir uns in den nachfolgenden Paragraphen des vorliegenden Kapitels beschäftigen wollen.

§ 4. Die Integraldarstellung einer harmonischen Funktion

Es sei Ω ein endliches Gebiet mit dem stückweise glatten Rand Γ und $u(x)$ eine in Ω harmonische Funktion; auf Grund der Definition der harmonischen Funktion ist dann $u \in C^{(2)}(\Omega)$. Wir setzen außerdem voraus, daß $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ gilt; dann kann man der Funktion $u(x)$ die Integraldarstellung (3.4) geben. Dabei verschwindet wegen $\Delta u = 0$ das Raumintegral, und es ergibt sich die Formel

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi \Gamma . \quad (1)$$

Letztere nennt man *Integraldarstellung einer harmonischen Funktion.*

Im Falle $m = 2$ erhält man die Integraldarstellung einer harmonischen Funktion aus der Formel (3.5) für $\Delta u = 0$:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right) d_\xi \Gamma . \quad (2)$$

Satz 11.4.1. *Eine in einem gewissen Gebiet harmonische Funktion besitzt in diesem Gebiet sämtliche Ableitungen beliebiger Ordnung.*

Beweis. Die Funktion $u(x)$ sei harmonisch in dem endlichen oder unendlichen Gebiet Ω. Im Gebiet Ω wählen wir ein endliches inneres Teilgebiet Ω_1 mit einem stückweise glatten Rand Γ_1 aus. Offenbar gilt dann $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega}_1)$, und auf das Gebiet Ω_1 läßt sich die Integraldarstellung (1) anwenden:

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \times$$
$$\times \int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi \Gamma , \quad (3)$$
$$x \in \Omega_1 .$$

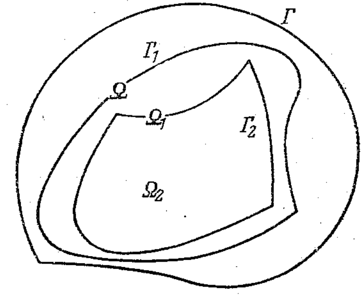


Abb. 15

Wir konstruieren jetzt ein in bezug auf Ω_1 inneres Teilgebiet Ω_2 (Abb. 15) und nehmen an, daß $x \in \bar{\Omega}_2$ ist. Dann ist der Integrand

in (3) eine stetige Funktion des Punktes (x, ξ) und besitzt stetige Ableitungen beliebiger Ordnung nach den cartesischen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des Punktes x. Nach dem bekannten Satz über die Differentiation eines Parameterintegrals besitzt die Funktion $u(x)$ Ableitungen beliebiger Ordnung nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$, und diese Ableitungen erhält man durch Differentiation unter dem Integralzeichen in der Formel (1).

Zum Abschluß des Beweises genügt es zu bemerken, daß man bei einem beliebig vorgegebenen Punkt $x \in \Omega$ die Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 stets so wählen kann, daß der Punkt x zu Ω_2 gehört.

§ 5. Der Potentialbegriff

Die Integraldarstellung (3.4) gibt Veranlassung zur Einführung von drei Integraloperatoren speziellen Typs.

Es sei Γ eine endliche stückweise glatte Fläche. In den Integralen der Darstellung (3.4) ersetzen wir die Funktionen $\Delta u(\xi)$, $\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu}$ und $u(\xi)$ entsprechend durch beliebige Funktionen $\varrho(\xi)$, $\mu(\xi)$ und $\sigma(\xi)$. Dann erhalten wir die drei von x abhängigen Parameterintegrale

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{r^{m-2}} \mu(\xi)\, d_\xi \Gamma, \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \sigma(\xi)\, d_\xi \Gamma, \quad \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^{m-2}} \varrho(\xi)\, d\xi .$$

Man nennt diese nacheinander *Potential der einfachen Schicht, Potential der Doppelschicht* und *Volumenpotential*[1]). Die Funktionen $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$ und $\varrho(\xi)$ heißen die *Dichten* dieser Potentiale.

Wir untersuchen jetzt die einfachsten Eigenschaften der Potentiale der einfachen und der Doppelschicht. Im Gegensatz zu der Formel (3.4), wo der Punkt x unbedingt im Inneren von Γ liegen muß, setzen wir hier voraus, daß sich der Punkt x sowohl innerhalb als auch außerhalb der Fläche Γ befinden kann. Der Fall $x \in \Gamma$ verlangt eine gesonderte Betrachtung, welche wir im Kapitel 18 vornehmen werden.

Satz 11.5.1. *Wenn die Dichten auf Γ summierbar sind, dann sind die Potentiale der einfachen und der Doppelschicht harmonische Funktionen in einem beliebigen (endlichen oder unendlichen) Gebiet, das mit der Fläche Γ keine gemeinsamen Punkte besitzt.*

Beweis. In einem beliebigen Punkt $x \notin \Gamma$ besitzen die Potentiale der einfachen und der Doppelschicht sämtliche Ableitungen beliebiger Ordnung. Davon kann man sich leicht durch wortwörtliche Wiederholung der entsprechenden Überlegungen aus dem Beweis des Satzes 11.4.1 überzeugen. Wenn also D das im vorliegenden Satz genannte Gebiet bezeichnet, dann besitzen beide Potentiale in D alle Ableitungen beliebiger Ordnung, insbesondere auch die zweiten Ableitungen.

---

[1]) Für das Volumenpotential ist auch die Bezeichnung NEWTON*sches Potential* gebräuchlich (Anm. d. Übers.).

Des weiteren genügt das Potential der einfachen bzw. der Doppelschicht der homogenen LAPLACE-Gleichung. In der Tat, wenn $x \notin \Gamma$ ist, dann kann man unter dem Integralzeichen differenzieren. Setzen wir

$$v(x) = \int_\Gamma \frac{1}{r^{m-2}} \mu(\xi)\, d_\xi \Gamma\,,$$

$$w(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \sigma(\xi)\, d_\xi \Gamma\,,$$

dann gilt

$$\Delta_x v(x) = \int_\Gamma \Delta_x \left(\frac{1}{r^{m-2}}\right) \mu(\xi)\, d_\xi \Gamma = 0\,.$$

Dabei bedeutet der Index x an dem Buchstaben Δ, daß die Differentiation nach den Koordinaten des Punktes x erfolgt. Des weiteren gilt

$$\Delta_x w(x) = \int_\Gamma \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right) \sigma(\xi)\, d_\xi \Gamma = \int_\Gamma \sigma(\xi)\, \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} \cos(\nu, x_k)\right) d_\xi \Gamma\,.$$

Da ν die im Punkt ξ errichtete Normale ist, so hängt $\cos(\nu, x_k)$ nicht von x ab, und man kann diesen Faktor vor das Symbol der Operation Δ_x schreiben:

$$\Delta_x w(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \cos(\nu, x_k)\, \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi \Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \sigma(\xi) \cos(\nu, x_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Delta_x \left(\frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi \Gamma = 0\,.$$

Im Falle eines endlichen Gebietes D ist damit der Beweis des Satzes beendet. Wenn dagegen das Gebiet D unendlich ist, dann hat man noch zu beweisen, daß die Funktionen $v(x)$ und $w(x)$ im Unendlichen die Abschätzung (1.3) besitzen.

Wir wählen den Koordinatenursprung im Inneren von Γ. Mit H bezeichnen wir den größten Abstand zwischen den Punkten der Fläche Γ.

Durch Wiederholung der im § 2 angestellten Überlegungen erhalten wir, daß für $|x| > 2\,H$ gilt: $r > 1/2\,|x|$ und somit

$$|v(x)| \leq \frac{2^{m-2}}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma |\mu(\xi)|\, d_\xi \Gamma;$$

das letzte Integral ist endlich, da die Funktion $\mu(\xi)$ auf Γ summierbar ist. Für die Funktion $v(x)$ ist damit die Abschätzung (1.3) mit der Konstanten

$$C = 2^{m-2} \int_\Gamma |\mu(\xi)|\, d_\xi \Gamma$$

gewonnen.

Wir betrachten jetzt das Potential der Doppelschicht $w(x)$. Es gilt

$$|w(x)| \leqq \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \left|\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right| d_\xi \Gamma \leqq (m-2) \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \left|\frac{\xi_k - x_k}{r^m}\right| \cdot |\cos(\nu, x_k)| \, d_\xi \Gamma;$$

da aber $|\xi_k - x_k| \leqq r$ und $|\cos(\nu, x_k)| \leqq 1$ gilt, so ergibt sich

$$|w(x)| \leqq m(m-2) \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \frac{d_\xi \Gamma}{r^{m-1}}.$$

Für $|x| > 2H$ ist nun $r > 1/2\,|x|$, und wir erhalten schließlich

$$|w(x)| \leqq \frac{2^{m-1} m(m-2)}{|x|^{m-1}} \int_\Gamma |\sigma(\xi)| \, d_\xi \Gamma.$$

Da die Funktion $\sigma(\xi)$ auf Γ summierbar ist, so ist das Integral auf der rechten Seite endlich.

Somit gilt für das Potential der Doppelschicht sogar eine schärfere Abschätzung als die Abschätzung (1.3): Das Potential der Doppelschicht verhält sich im Unendlichen wie $|x|^{-(m-1)}$.

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Vollständiger werden die Eigenschaften der Potentiale der einfachen und der Doppelschicht in Kap. 18 untersucht.

Wenn die Fläche Γ den Raum in zwei Gebiete — ein inneres und ein äußeres Gebiet — zerlegt, dann definiert sowohl das Potential der einfachen Schicht als auch das Potential der Doppelschicht zwei harmonische Funktionen: eine harmonische Funktion im Innengebiet und eine andere im Außengebiet.

§ 6. Die Eigenschaften des Volumenpotentials

Es sei Ω ein endliches Gebiet des m-dimensionalen euklidischen Raumes, das durch eine stückweise glatte Fläche Γ berandet wird, und es gelte $\varrho(\xi) \in$ $\in C(\overline{\Omega})$. Wir betrachten das Volumenpotential

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_1} \frac{\varrho(\xi)}{r^{m-2}} \, d\xi; \tag{1}$$

in der Formel (1) kann x einen beliebigen Punkt des Raumes E_m bedeuten.

Satz 11.6.1. *Wenn die Dichte ϱ meßbar und beschränkt in Ω ist, dann ist das Volumenpotential* (1) *stetig und stetig differenzierbar im ganzen Raum E_m.*

Beweis. Die Funktion $\varrho(\xi)$ ist nach Voraussetzung des Satzes beschränkt; es sei $|\varrho(\xi)| \leqq C$. Wir setzen diese Funktion fort, indem wir $\varrho(\xi) \equiv 0$ für $\xi \notin \overline{\Omega}$ festlegen. Die auf diese Weise fortgesetzte Funktion $\varrho(\xi)$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes: sie ist meßbar und beschränkt, und es gilt

nach wie vor $|\varrho(\xi)| \leqq C$. Es sei x ein beliebig vorgegebener Punkt des Raumes E_m. Wir wählen irgendein endliches Gebiet Ω_1, das in seinem Inneren sowohl den Punkt x als auch das Gebiet Ω enthält (vgl. Abb. 16); wenn $x \in \Omega$ gilt, dann kann man $\Omega_1 = \Omega$ nehmen. Da $\varrho(\xi) \equiv 0$ in $\Omega_1 \backslash \Omega$ ist, so läßt sich das Potential (1) in der Form

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_1} \frac{\varrho(\xi)}{r^{m-2}} d\xi . \tag{2}$$

schreiben. Die Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ ergibt sich dann aus der am Schluß des § 4 von Kap. 7 foımulierten Behauptung.

Wir beweisen jetzt, daß das Volumenpotential (1) im Punkt x stetige erste Ableitungen nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$ besitzt. Zu diesem Zweck differenzieren wir zunächst das Integral (2) formal nach x_k unter dem Integralzeichen. Wir erhalten dann das Integral

$$-(m-2)\int_{\Omega_1} \varrho(\xi)\frac{x_k - \xi_k}{r^m} d\xi . \tag{3}$$

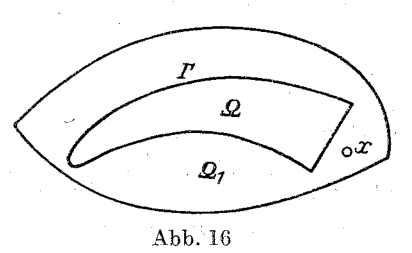


Abb. 16

Dieses konvergiert gleichmäßig, da

$$\frac{|x_k - \xi_k|}{r^m} \leqq \frac{1}{r^{m-1}}$$

gilt. Das Integral (3) bringen wir auf die Gestalt

$$\int_{\Omega_1} \frac{A(x,\xi)}{r^{m-\frac{1}{2}}} \varrho(\xi)\, d\xi ; \qquad A(x,\xi) = -\frac{(m-2)(x_k - \xi_k)}{\sqrt{r}} .$$

Dabei ist die Funktion $A(x, \xi)$ stetig und die Funktion $\varrho(\xi)$ beschränkt in $\overline{\Omega}_1$. Aus der bereits oben erwähnten Behauptung des § 4 von Kap. 7 ergibt sich, daß das Integral (3) eine in $\overline{\Omega}_1$ stetige Funktion von x ist. Nach dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen existiert dann im Punkt $x \in \Omega_1$ die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, und diese ist gleich dem Integral (3):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \int_{\Omega_1} \varrho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi .$$

Berücksichtigt man, daß das Integral über $\Omega_1 \backslash \Omega$ gleich Null ist, so erhält man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \int_{\Omega} \varrho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi . \tag{4}$$

Die ersten Ableitungen des Volumenpotentials erhält man also durch Differentiation unter dem Integralzeichen dieses Potentials.

Satz 11.6.2. *Wenn die Dichte ϱ in Ω meßbar und beschränkt ist, dann ist das Volumenpotential* (1) *in jedem Komplementärgebiet von Ω eine harmonische Funktion.*

Beweis. Wenn der Rand Γ des Gebietes Ω nicht zusammenhängend ist, dann existieren mehrere Komplementärgebiete von Ω: $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ (Abb. 17).

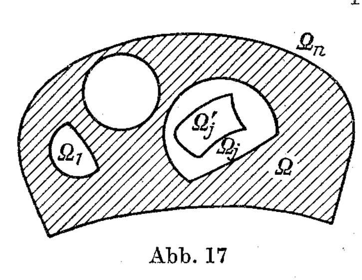


Abb. 17

Es sei Ω_j eines dieser Gebiete. Wir wählen ein beliebiges, in bezug auf Ω_j inneres Teilgebiet Ω_j', und es sei $x \in \Omega_j'$. Dann ist im Integral (1) der Abstand r nach unten beschränkt durch die positive Zahl δ, welche den kleinsten Abstand zwischen den Punkten der Ränder der Gebiete Ω_j und Ω_j' bezeichnet (Abb. 17). Der Integrand $\frac{1}{r^{m-2}}$ ist, ebenso wie seine Ableitungen beliebiger Ordnung nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$, eine stetige Funktion des Punktes (x, ξ) $(x \in \overline{\Omega_j'}, \xi \in \overline{\Omega})$. Daraus folgt, daß die Funktion $\varphi(x)$ im Gebiet Ω_j' stetige Ableitungen sämtlicher Ordnungen besitzt, welche man durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhält. Im Gebiet Ω_j' gilt somit

$$\Delta_x \varphi(x) = \int_\Omega \varrho(\xi)\, \Delta_x \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi = 0\,.$$

Da aber Ω_j' ein beliebiges Teilgebiet ist, so gilt die letzte Beziehung im ganzen Gebiet Ω_j. Wenn dieses Gebiet endlich ist, dann ist damit bereits bewiesen, daß die Funktion (1) harmonisch ist. Wenn dagegen Ω_j ein unendliches Gebiet ist, dann hat man noch die Abschätzung (1.3) im Unendlichen aufzustellen. Dies geschieht nun genauso wie im Satz 11.5.1: Wenn H den Durchmesser des Randes Γ bezeichnet und wenn der Koordinatenursprung in Ω liegt, dann gilt für $|x| > 2\,H$: $r > 1/2\,|x|$ und

$$|\varphi(x)| \leqq \frac{2^{m-2}\, C\, |\Omega|}{|x|^{m-2}}\,.$$

Wir sagen, daß eine auf einer gewissen Menge G des Raumes E_m definierte Funktion $f(x)$ einer LIPSCHITZ-*Bedingung* mit dem Exponenten α genügt und schreiben dafür $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(G)$, wenn für beliebige Punkte $x, x' \in G$, die Ungleichung

$$|f(x') - f(x)| \leqq A\, |x' - x|^\alpha \tag{5}$$

erfüllt ist; dabei bedeuten A und α positive Konstanten. Man sieht leicht, daß für $\alpha > 1$ gilt: $f(x) \equiv \text{const.}$ Deshalb nimmt man gewöhnlich $0 < \alpha \leqq 1$ an.

Die LIPSCHITZ-Bedingung mit einem Exponenten $\alpha < 1$ wird oft auch eine HÖLDER-*Bedingung* genannt.

Satz 11.6.3. *Wenn für die Dichte $\varrho \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega})$ gilt, dann besitzt das Volumenpotential* (1) *in Ω stetige zweite Ableitungen und genügt der inhomogenen* LAPLACE-

Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= (m-2)\,|S_1|\,\varrho(x)\,, \qquad & m > 2\,, \\ -\Delta\varphi &= 2\,\pi\,\varrho(x)\,, & m = 2\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall $m > 2$; für $m = 2$ verläuft er analog.

Es sei $x \in \Omega$. Wir beschreiben um den Punkt x eine Kugel von hinreichend kleinem Radius ε und stellen die Formel (4) in folgender Form dar (bezüglich der Bezeichnungen siehe Abb. 14):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega\setminus D_\varepsilon} \varrho(\xi)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi\,. \tag{7}$$

Die Zahl ε wählen wir so klein, daß die Kugel D_ε zusammen mit ihrer Oberfläche in Ω liegt. Wir beweisen jetzt, daß der Term

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_{\Omega\setminus D_\varepsilon} \varrho(\xi)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi \tag{8}$$

für $\varepsilon \to 0$ in einem beliebigen abgeschlossenen Teilgebiet des Gebietes Ω gleichmäßig gegen eine gewisse Grenzfunktion konvergiert.

Es sei $\overline{\Omega'}$ ein solches Teilgebiet und $x \in \overline{\Omega'}$. Offensichtlich hat man dann ε kleiner als den kleinsten Abstand zwischen den Rändern der Gebiete Ω und Ω' zu wählen. Wir führen jetzt die Differentiation in dem Term (8) aus. Der Einfachheit halber bezeichnen wir den Integranden mit $w(x, \xi)$ und setzen $r' = |\xi - x'|$, wobei x' einen Punkt mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, \ldots, x_m$ bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{\Omega\setminus D_\varepsilon} w(x,\xi)\,d\xi &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Bigg[\int\limits_{\Omega\setminus(r'<\varepsilon)} w(x',\xi)\,d\xi - \int\limits_{\Omega\setminus(r<\varepsilon)} w(x,\xi)\,d\xi\Bigg] = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Bigg[\int\limits_{\Omega\setminus(r'<\varepsilon)} w(x',\xi)\,d\xi - \int\limits_{\Omega\setminus(r'<\varepsilon)} w(x,\xi)\,d\xi\Bigg] + \\ &\quad + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Bigg[\int\limits_{\Omega\setminus(r'<\varepsilon)} w(x,\xi)\,d\xi - \int\limits_{\Omega\setminus(r<\varepsilon)} w(x,\xi)\,d\xi\Bigg]. \end{aligned} \tag{9}$$

Wie man leicht sieht, ist der erste Grenzwert auf der rechten Seite gleich

$$\int\limits_{\Omega\setminus(r<\varepsilon)} \frac{\partial w(x,\xi)}{\partial x_j}\,d\xi = \int\limits_{\Omega\setminus D_\varepsilon} \varrho(\xi)\,\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi\,,$$

wobei die Konvergenz in $\overline{\Omega'}$ gleichmäßig ist.

Wir untersuchen jetzt den zweiten Grenzwert. Der Ausdruck unter dem Limeszeichen läßt sich in der Form

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_1} w(x,\xi)\,d\xi - \frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x,\xi)\,d\xi$$

darstellen, wobei D_1 und D_2 die in der Abb. 18_1 dargestellten mondförmigen

Gebiete bedeuten. Wir betrachten z. B. den Term

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x, \xi)\, d\xi .$$

In D_2 führen wir Kugelkoordinaten mit dem Mittelpunkt x ein. Eine der Koordinaten ist r; ihr kleinster Wert in D_2 ist gleich ε. Auf dem Teil $M\,N\,P$ der Sphäre $r = \varepsilon$ (vgl. Abb. 18_1) wählen wir irgendeinen Punkt z; seine carte-

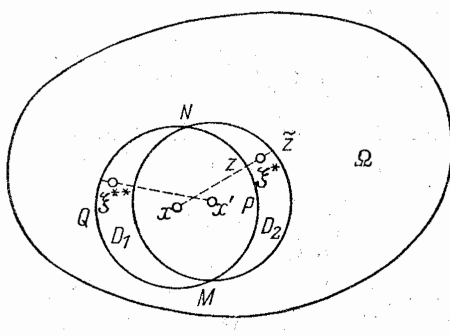


Abb. 18_1

sischen Koordinaten sind $z_k = x_k + \varepsilon \cos(r, x_k)$. Wir bestimmen den Wert der Größe $r = \tilde{r}$ im Schnittpunkt $\tilde{z}$ der Sphäre $r' = \varepsilon$ mit dem durch die Punkte x und z hindurchgehenden Strahl $\xi = x + \lambda(z - x)$ (vgl. Abb. 18_1). Den entsprechenden Wert $\lambda = \tilde{\lambda}$ erhält man aus dem Gleichungssystem

$$\sum_{l \neq j} (\xi_l - x_l)^2 + (\xi_j - x_j - h)^2 = \varepsilon^2 ,$$

$$\xi_l = x_l + \lambda(z_l - x_l) , \qquad l = 1, 2, \ldots, m .$$

Unter Berücksichtigung von $|z - x| = \varepsilon$ ergibt sich folgende Gleichung für λ:

$$\lambda^2 \varepsilon^2 - 2\lambda h \varepsilon \cos(r, x_j) + h^2 - \varepsilon^2 = 0 .$$

Da dem Punkt $\tilde{z}$ der Wert $\tilde{\lambda} > 1$ entspricht, so gilt

$$\tilde{\lambda} = \frac{h}{\varepsilon}\cos(r, x_j) + \sqrt{\frac{h^2}{\varepsilon^2}\cos^2(r, x_j) + 1 - \frac{h^2}{\varepsilon^2}} = 1 + \frac{h}{\varepsilon}\cos(r, x_j) + O(h^2) .$$

Jetzt ergibt sich

$$\tilde{r} = |\tilde{z} - x| = \tilde{\lambda}\,|z - x| = \tilde{\lambda}\,\varepsilon = \varepsilon + h\cos(r, x_j) + O(h^2) .$$

Die Integration über D_2 reduziert sich auf die Integration über den Teil $M\,N\,P$ der Sphäre $r = \varepsilon$ sowie auf die Integration nach r in den Grenzen von ε bis $\tilde{\lambda}\,\varepsilon$:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x, \xi)\, d\xi = \frac{1}{h}\int\limits_{MNP}\left\{\int\limits_{\varepsilon}^{\tilde{\lambda}\varepsilon} w(x, \xi)\, dr\right\} dS_\varepsilon .$$

Wendet man auf das innere Integral den Mittelwertsatz an, dann erhält man

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_2} w(x,\xi)\,d\xi = \int\limits_{MNP} w(x,\xi^*)\,[\cos(r,x_j) + O(h)]\,dS_\varepsilon\,,$$

wobei ξ^* einen gewissen Punkt des Intervalls $(z, \tilde{z})$ bedeutet.

Analog ergibt sich

$$\frac{1}{h}\int\limits_{D_1} w(x,\xi)\,d\xi = -\int\limits_{MQN} w(x,\xi^{**})\,[\cos(r',x_j) + O(h)]\,dS_\varepsilon\,.$$

Für $h \to 0$ streben $M\ P\ N$ und $M\ Q\ N$ gegen zwei Halbsphären, die zusammen die Sphäre $r = \varepsilon$ ergeben. Als Ergebnis erhalten wir dann die gesuchte Formel für die Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_{\Omega\setminus D\varepsilon} w(x,\xi)\,d\xi = \int\limits_{\Omega\setminus D\varepsilon} \frac{\partial w(x,\xi)}{\partial x_j}\,d\xi - \int\limits_{r=\varepsilon} w(x,\xi)\cos(r,x_j)\,dS_\varepsilon; \tag{10}$$

im zweiten Integral wurde die Integrationsvariable z wieder mit ξ bezeichnet.

Setzen wir nun den Ausdruck für $w(x, \xi)$ ein, dann erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_{\Omega\setminus D\varepsilon} \varrho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi = \int\limits_{\Omega\setminus D\varepsilon} \varrho(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi - \int\limits_{r=\varepsilon} \varrho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(r,x_k)\,dS_\varepsilon\,.$$

Das letzte Integral läßt sich etwas vereinfachen. Setzen wir nämlich $\xi = x + \varepsilon\,\theta$, dann gilt $|\theta| = 1$, und die Integration erfolgt über die Sphäre S_1; dabei ist $dS_\varepsilon = \varepsilon^{m-1}\,dS_1$. Des weiteren gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{r=\varepsilon} = -\frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\frac{x_j-\xi_j}{r}\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\cos(r,x_j)$$

und schließlich

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_{\Omega\setminus D\varepsilon} \varrho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi = \int\limits_{\Omega\setminus D\varepsilon} \varrho(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi -$$

$$-(m-2)\int\limits_{S_1} \varrho\,(x+\varepsilon\,\theta)\cos(r,x_j)\cos(r,x_k)\,dS_1\,. \tag{11}$$

Jetzt läßt sich beweisen, daß der Term (8) oder, was dasselbe ist, die rechte Seite der Formel (11) für $\varepsilon \to 0$ im Gebiet $\overline{\Omega'}$ gleichmäßig gegen eine gewisse Grenzfunktion strebt. Für den zweiten Summanden in (11) ist dies offensichtlich; dieser konvergiert nämlich gegen die Grenzfunktion

$$-(m-2)\,\varrho(x)\int\limits_{S_1}\cos(r,x_j)\cos(r,x_k)\,dS_1\,. \tag{12}$$

Wir bemerken noch, daß sich das Integral (12) leicht berechnen läßt. Es gilt nämlich

$$\cos(r,x_j)\Big|_{S_1} = \frac{\xi_j - x_j}{r}\bigg|_{r=1} = \xi_j - x_j\,,$$

und nach dem GAUSS-OSTROGRADSKIschen Integralsatz ergibt sich

$$\int_{S_1} (\xi_j - x_j) \cos(r, x_k)\, dS_1 = \int_{S_1} (\xi_j - x_j) \cos(\nu, x_k)\, dS_1 = \int_{r<1} \frac{\partial(\xi_j - x_j)}{\partial \xi_k}\, d\xi\,.$$

Dabei ist ν die äußere Normale zu S_1. Gilt $j \neq k$, dann ist das letzte Integral gleich Null. Für $j = k$ erhalten wir

$$\int_{r<1} d\xi = \int_{S_1} \left\{ \int_0^1 r^{m-1}\, dr \right\} dS_1 = \frac{|S_1|}{m}\,.$$

Den Term (12) kann man somit in folgender Form darstellen:

$$-\frac{(m-2)}{m} |S_1|\, \varrho(x)\, \delta_{jk}\,. \tag{12_1}$$

Wir wenden uns jetzt dem ersten Summanden in (11) zu. Es sei δ der kleinste Abstand zwischen den Rändern der Gebiete Ω und Ω'. Dann gilt

$$\int_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi = \int_{\Omega \setminus (r<\delta)} \varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi +$$

$$+ \int_{\varepsilon<r<\delta} [\varrho(\xi) - \varrho(x)] \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi + \varrho(x) \int_{\varepsilon<r<\delta} \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi\,.$$

Wie man leicht sieht, ist das letzte Integral gleich Null; es gilt nämlich

$$\int_{\varepsilon<r<\delta} \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi = -(m-2) \int_{\varepsilon<r<\delta} \frac{1}{r^m} [\delta_{jk} - m \cos(r, x_j) \cos(r, x_k)]\, d\xi =$$

$$= -(m-2) \int_{S_1} [\delta_{jk} - m \cos(r, x_j) \cos(r, x_k)] \left\{ \int_\varepsilon^\delta \frac{dr}{r} \right\} dS_1$$

$$= -(m-2) \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \int_{S_1} [\delta_{jk} - m \cos(r, x_j) \cos(r, x_k)]\, dS_1\,.$$

Der letzte Ausdruck ist aber auf Grund der Formeln (12) und (12_1) gleich Null. Somit ergibt sich

$$\int_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi = \int_{\Omega \setminus (r<\delta)} \varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi +$$

$$+ \int_{\varepsilon<r<\delta} [\varrho(\xi) - \varrho(x)] \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi\,. \tag{13}$$

Jetzt sieht man leicht, daß die Funktion (13) für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen eine gewisse Grenzfunktion strebt. In der Tat, während der erste Summand

der rechten Seite nicht von ε abhängt, läßt sich der Integrand des zweiten Summanden wie folgt abschätzen:

$$\left|[\varrho(\xi) - \varrho(x)] \frac{\partial^2}{\partial x_j \, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\right| = \frac{m-2}{r^m} |\delta_{jk} - m \cos(r, x_j) \cos(r, x_k)| \times$$
$$\times |\varrho(\xi) - \varrho(x)| \leqq \frac{(m-2)(m+1) A}{r^{m-\alpha}} .$$

Die Funktion auf der rechten Seite der letzten Ungleichung ist in Ω summierbar, und da für den Exponenten von r im Nenner $m - \alpha < m$ gilt, so konvergiert ihr Integral gleichmäßig bezüglich x. Dann ist aber auch das zweite Integral in (13) gleichmäßig konvergent.

Aus dem bekannten Satz über die Differentiation eines Parameterintegrals ergibt sich jetzt, daß das Volumenpotential $\varphi(x)$ sämtliche Ableitungen zweiter Ordnung besitzt, welche in Ω stetig sind; diese Ableitungen lassen sich durch folgende Formel ausdrücken:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \, \partial x_k} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_j \, \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}} \, d\xi - \frac{m-2}{m} |S_1| \, \varrho(x) \, \delta_{jk} . \tag{14}$$

Setzen wir hier $j = k$ und summieren über alle $k = 1, 2, \ldots, m$, dann erhalten wir

$$\Delta \varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \varrho(\xi) \, \Delta_x \frac{1}{r^{m-2}} \, d\xi - (m-2) \, |S_1| \, \varrho(x) .$$

Nun gilt aber $\Delta_x \frac{1}{r^{m-2}} = 0$ und folglich

$$\Delta \varphi = -(m-2) \, |S_1| \, \varrho(x) .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Es läßt sich folgender Satz beweisen: Wenn $\varrho \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ ist, dann gilt $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \, \partial x_k} \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega'})$; dabei bedeutet φ das Volumenpotential mit der Dichte ϱ und Ω' ein beliebiges inneres Teilgebiet des Gebietes Ω.

Bemerkung 2. Es gilt auch der folgende Satz: *Es sei die Dichte $\varrho \in L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Dann besitzt das Volumenpotential* (1) *verallgemeinerte zweite Ableitungen; diese sind in Ω in derselben Potenz p summierbar und lassen sich nach der Formel* (14) *berechnen. Die in diese Formel eingehende Grenzfunktion existiert fast überall in Ω, und das Volumenpotential* (1) *genügt fast überall der inhomogenen* LAPLACE*-Gleichung* (6).

Gleichung (6) ermöglicht es, eine partikuläre Lösung der inhomogenen LAPLACE-Gleichung zu konstruieren und somit diese Gleichung auf die homogene Gleichung zurückzuführen.

Gegeben sei die inhomogene LAPLACE-Gleichung

$$-\Delta u = f(x) . \tag{15}$$

Ihre allgemeine Lösung stellt die Summe irgendeiner partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen LAPLACE-Gleichung dar. Wenn

man z. B. $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\bar{\Omega})$ voraussetzt, dann liefert die Formel

$$u_0(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{\Omega} \frac{f(\xi)}{r^{m-2}}\, d\xi$$

eine solche partikuläre Lösung der Gleichung (15).

Führt man nun in der inhomogenen Gleichung eine Substitution der gesuchten Funktion nach der Formel $u = u_0 + w$ durch, dann ergibt sich die homogene LAPLACE-Gleichung

$$\Delta w = 0\,.$$

§ 7. Der Mittelwertsatz

Satz 11.7.1 (direkter Mittelwertsatz[1]). *Die Funktion $u(x)$ sei harmonisch in einer gewissen Kugel und stetig in der abgeschlossenen Kugel. Dann ist der Wert dieser Funktion im Mittelpunkt der Kugel gleich dem Mittelwert ihrer Werte auf der Kugeloberfläche.*

Beweis. Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir eine Formel erwähnen, die auch im weiteren eine wichtige Rolle spielen wird. Es sei in der Formel (6.9) des Kap. 10 $u(x)$ eine Funktion der Klasse $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, welche im Gebiet Ω harmonisch ist. Dann gilt $\Delta u = 0$, die rechte Seite der genannten Formel ist gleich Null und es ergibt sich

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0\,. \tag{1}$$

Wir gehen nun zum Beweis des Satzes über. Mit D_R bezeichnen wir die im Satz genannte Kugel, es seien x_0 der Mittelpunkt und R der Radius dieser Kugel. Die Kugeloberfläche von D_R bezeichnen wir mit S_R. Des weiteren sei $D_{R'}$ eine zu D_R konzentrische Kugel vom Radius $R' < R$ und $S_{R'}$ die Kugeloberfläche von $D_{R'}$. Dann ist offenbar $u \in C^{(2)}(\bar{D}_{R'})$, und nach der Formel (4.1) gilt

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{S_{R'}} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) dS_{R'}\,; \qquad x \in D_{R'}\,. \tag{2}$$

In der Formel (2) setzen wir $x = x_0$. Dann ist $r = R'$. Da weiterhin ν die in bezug auf die Kugel äußere, und folglich in Richtung des Radiusvektors gerichtete Normale ist, so gilt

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right|_{r=R'} = \left.\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}}\right|_{r=R'} = -\frac{m-2}{R'^{m-1}}\,.$$

Die Formel (2) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$u(x_0) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|\,R'^{m-2}} \int\limits_{S_{R'}} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS_{R'} + \frac{1}{|S_1|\,R'^{m-1}} \int\limits_{S_{R'}} u\, dS_{R'}\,.$$

---

[1]) In der deutschen Literatur wird dieser Satz gewöhnlich als GAUSS*scher Mittelwertsatz* bezeichnet (Anm. d. Übers.).

Auf Grund der Formel (1) verschwindet das erste Integral, und es ergibt sich somit

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|\, R'^{m-1}} \int\limits_{S_{R'}} u\, dS_{R'}\,.$$

Jetzt lassen wir $R' \to R$ streben. Da die Funktion u in der Kugel D_R stetig ist, so kann man den Grenzübergang unter dem Integralzeichen ausführen und erhält schließlich

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|\, R^{m-1}} \int\limits_{S_R} u\, dS_R\,. \tag{3}$$

Die rechte Seite der Formel (3) nennt man nun den Mittelwert der Werte der Funktion u auf der Kugeloberfläche S_R — dieser ist gleich dem Quotienten des Integrals der genannten Funktion über die Kugeloberfläche S_R und dem Flächeninhalt dieser Kugeloberfläche. Der direkte Mittelwertsatz ist damit bewiesen.

Satz 11.7.2 (umgekehrter Mittelwertsatz). *Es sei Ω ein endliches Gebiet des Raumes E_m und $u \in C(\Omega)$. Wenn die Funktion $u(x)$ für eine beliebige Kugel, welche zusammen mit ihrer Berandung ganz im Gebiet Ω liegt, der Beziehung* (3) *genügt, dann ist diese Funktion in Ω harmonisch.*

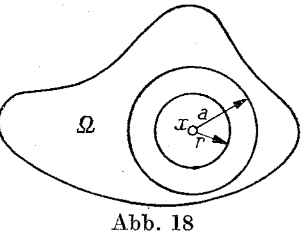


Abb. 18

Beweis. Wir wählen einen beliebigen Punkt $x \in \Omega$ und beschreiben um diesen Punkt eine Kugel D_a vom festen Radius a, welche zusammen mit ihrer Berandung in Ω liegt (Abb. 18). Wenn $r \leqq a$ ist und wenn S_r die Sphäre vom Radius r mit dem Mittelpunkt in x bedeutet, dann gilt nach Voraussetzung des Satzes die Formel

$$u(x) = \frac{1}{r^{m-1}\, |S_1|} \int\limits_{S_r} u(\xi)\, dS_r\,. \tag{4}$$

Es sei $\omega_a(|\xi - x|) = \omega_a(r)$ ein Mittelungskern mit dem Mittelungsradius $h = a$. Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung (4) mit $r^{m-1}\, \omega_a(r)\, dr$ und integrieren nach r in den Grenzen von 0 bis a. Dann ergibt sich auf der linken Seite der Ausdruck $c\, u(x)$ mit $c = \int\limits_0^a r^{m-1}\, \omega_a(r)\, dr$. Da auf Grund der Eigenschaft 3 des Mittelungskernes (vgl. § 1 des Kap. 1) $c = |S_1|^{-1}$ gilt, so gelangen wir zu der Gleichung

$$u(x) = \int\limits_0^a \int\limits_{S_r} u(\xi)\, \omega_a(r)\, dr\, dS_R = \int\limits_{D_a} u(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi\,. \tag{5}$$

Berücksichtigt man schließlich, daß $\omega_a(r) = 0$ außerhalb der Kugel D_a ist, dann kann man der Formel (5) auch noch die Gestalt

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} u(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi \tag{6}$$

geben. Die letzte Darstellung hat den Vorteil, daß das Integrationsgebiet Ω nicht von der Wahl des Punktes x abhängt.

Die Formel (5), und damit auch die Formel (6), gilt für einen beliebigen Punkt $x \in \Omega \backslash \Omega_a$; dabei ist Ω_a der Randstreifen des Gebietes Ω der Breite a.

Da der Mittelungskern stetige Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt und da die Funktion $u(\xi)$ stetig ist, so besitzt der Integrand in der Formel (6) die Ableitungen beliebiger Ordnung nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$, welche als Funktionen der zwei Veränderlichen x und ξ stetig sind. Somit besitzt das Integral (6), d. h. die Funktion $u(x)$, im Gebiet $\Omega \backslash \Omega_a$ stetige Ableitungen beliebiger Ordnung; wir wollen dafür $u \in C^{(\infty)}(\Omega \backslash \Omega_a)$ schreiben. Da man aber die Zahl a beliebig klein wählen kann, so gilt $u \in C^{(\infty)}(\Omega)$.

Wir beweisen jetzt die Beziehung $\Delta u = 0$. Für die oben beschriebene Kugel D_a benutzen wir die Integraldarstellung (3.4):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{S_a} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) dS_a - \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{D_a} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u \, d\xi \,. \tag{7}$$

Wir erinnern daran, daß x der Mittelpunkt der Kugel D_a ist.

Wir betrachten zunächst den zweiten Summanden der rechten Seite. Es gilt wiederum

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}} \bigg|_{r=a} = -\frac{m-2}{a^{m-1}} \,,$$

und das zweite Oberflächenintegral ergibt

$$\frac{1}{a^{m-1}\,|S_1|} \int\limits_{S_a} u(\xi) \, dS_a \,;$$

auf Grund der Formel (4) ist aber das letzte Integral gleich $u(x)$. Die Formel (7) ergibt somit

$$\frac{1}{a^{m-2}} \int\limits_{S_a} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_a - \int\limits_{D_a} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u \, d\xi = 0 \,.$$

Nach Formel (6.9) des Kap. 10 gilt

$$\int\limits_{S_a} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_a = \int\limits_{D_a} \Delta u \, d\xi \,.$$

Addiert man nun die beiden Volumenintegrale, dann erhält man

$$\int\limits_{D_a} \left(\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{r^{m-2}} \right) \Delta u(\xi) \, d\xi = 0 \,. \tag{8}$$

Wir bemerken, daß in der Kugel D_a die Ungleichung $r = |\xi - x| \leqq a$ und damit die Beziehung

$$\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{r^{m-2}} \leqq 0$$

erfüllt ist. Des weiteren ist die Funktion Δu stetig. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf das Integral (8) ergibt sich dann

$$\Delta u(x') \int_{D_a} \left(\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{r^{m-2}} \right) d\xi = 0 ,$$

dabei ist x' ein gewisser Punkt aus dem Inneren der Kugel D_a.

Da das Integral einer negativen Funktion von Null verschieden ist, so muß folglich $\Delta u(x') = 0$ sein. Wir lassen jetzt a gegen Null streben; dann gilt $x' \to x$, und auf Grund der Stetigkeit der zweiten Ableitungen erhalten wir $\Delta u(x) = 0$.

§ 8. Das Maximumprinzip

Satz 11.8.1. *Wenn eine in einem endlichen Gebiet harmonische Funktion in einem inneren Punkt dieses Gebietes ihr Maximum oder ihr Minimum annimmt, dann ist diese Funktion identisch gleich einer Konstanten.*

Beweis. Die in dem endlichen Gebiet Ω harmonische Funktion $u(x)$ nehme im Punkt $x_0 \in \Omega$ ihr Maximum an. Wir beweisen, daß dann $u(x) \equiv u(x_0)$ gilt. Wir wählen eine Kugel $D_R(x_0)$ vom Radius R und mit x_0 als Mittelpunkt, welche zusammen mit ihrer Berandung in Ω liegt; S_R sei die Oberfläche dieser Kugel. Wir zeigen zunächst, daß $u(\xi) \equiv u(x_0)$ auf der Kugeloberfläche S_R ist. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt sich

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R , \tag{1}$$

dabei bezeichnet $|S_R|$ den Flächeninhalt der Kugeloberfläche S_R:

$$|S_R| = R^{m-1}\, |S_1| .$$

Auf Grund der Bedingung des Satzes ist $u(\xi) \leqq u(x_0)$ für $\xi \in S_R$. Es gelte nun in einem gewissen Punkt $\xi' \in S_R$ die strenge Ungleichung $u(\xi') < u(x_0)$. Da die Funktion u auf der Sphäre S_R stetig ist, so ist die Ungleichung $u(\xi) < u(x_0)$ für eine gewisse Umgebung S' des Punktes ξ' auf der Sphäre S_R erfüllt. Setzen wir $S_R \backslash S' = S''$, dann gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R|} \left\{ \int_{S'} u(\xi)\, dS_R + \int_{S''} u(\xi)\, dS_R \right\} .$$

Nun ist aber

$$\int_{S'} u(\xi)\, dS_R < u(x_0) \int_{S'} dS_R ,$$

$$\int_{S''} u(\xi)\, dS_R \leqq u(x_0) \int_{S''} dS_R ,$$

woraus

$$u(x_0) < \frac{1}{|S_R|}\, u(x_0) \left\{ \int_{S'} dS_R + \int_{S''} dS_R \right\} = \frac{1}{|S_R|}\, u(x_0) \int_{S_R} dS_R = u(x_0)$$

folgt, was aber nicht sein kann.

Somit ergibt sich $u(\xi) \equiv u(x_0)$ für alle $\xi \in S_R$. Indem wir R durch eine beliebig kleinere Größe ersetzen, überzeugen wir uns davon, daß die letzte Beziehung in der ganzen Kugel $D_R(x_0)$ gilt:

$$u(\xi) \equiv u(x_0)\,, \qquad \xi \in D_R(x_0)\,. \tag{2}$$

Jetzt beweisen wir, daß die Beziehung (2) im gesamten Gebiet Ω Gültigkeit besitzt. Wir wählen einen beliebigen Punkt $x \in \Omega$ und verbinden die Punkte x_0 und x durch einen ganz in Ω gelegenen Streckenzug (vgl. Abb. 19). Es sei δ

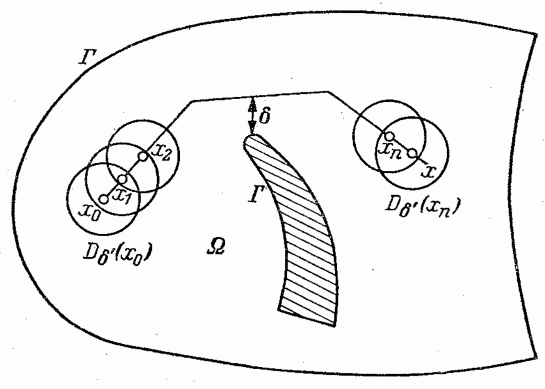


Abb. 19

der kleinste Abstand zwischen den Punkten dieses Streckenzuges und den Punkten des Randes Γ von Ω; des weiteren setzen wir $\delta' = \frac{1}{2}\delta$. Dann ist eine beliebige Kugel vom Radius δ', deren Mittelpunkt auf dem Streckenzug liegt, zusammen mit ihrer Oberfläche im Gebiet Ω gelegen.

Es bedeute $D_{\delta'}(y)$ die Kugel vom Radius δ' mit dem Mittelpunkt y. Wir wählen nun auf dem Streckenzug innerhalb der Kugel $D_{\delta'}(x_0)$ einen Punkt x_1 derart, daß $|x_1 - x_0| > \frac{1}{2}\delta'$ gilt, und betrachten die Kugel $D_{\delta'}(x_1)$. Innerhalb der neuen Kugel wählen wir dann auf dem Streckenzug einen Punkt x_2 derart, daß $|x_2 - x_1| > \frac{1}{2}\delta'$ gilt und der Punkt x_1 zwischen den Punkten x_0 und x_2 liegt. Setzt man nun diesen Prozeß fort, dann überzeugt man sich leicht davon, daß sich der gesamte Streckenzug durch endlich viele solcher Kugeln überdecken läßt. Die Kugeln $D_{\delta'}(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, mögen eine solche Überdeckung bilden. Nach Konstruktion gilt dann $x_j \in D_{\delta'}(x_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Wie die Beziehung (2) zeigt, ist die Funktion u in der Kugel $D_{\delta'}(x_0)$ identisch gleich ihrem Maximalwert. Dann nimmt aber diese Funktion ihren Maximalwert auch im Punkt x_1 an: $u(x_1) = u(x_0)$. Auf Grund derselben Beziehung (2) gilt dann $u(\xi) = u(x_1) = u(x_0)$ für alle $\xi \in D_{\delta'}(x_1)$. Durch Fortsetzung dieser Überlegungen gelangt man schließlich zu der Beziehung

$$u(\xi) = u(x_0)\,, \qquad \forall\, \xi \in D_{\delta'}(x_n)\,.$$

Da aber $x \in D_{\delta'}(x_n)$ ist, so gilt $u(x) = u(x_0)$, was zu beweisen war.

Der Fall des Minimums läßt sich mittels der Substitution von u durch $-u$ auf den Fall des Maximums zurückführen.

Folgerung 11. 8. 1. *Eine von der identischen Konstanten verschiedene harmonische Funktion kann im Inneren eines endlichen Gebietes weder ihr Maximum noch ihr Minimum annehmen.*

Folgerung 11. 8. 2. *Eine in einem endlichen Gebiet Ω harmonische Funktion, für die $u \in C(\overline{\Omega})$ gilt, nimmt sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum auf dem Rande dieses Gebietes an.*

Die Folgerung 11. 8. 2. heißt das *Maximumprinzip für harmonische Funktionen.*

§ 9. Über die Konvergenz von Folgen hamonischer Funktionen

Satz 11.9.1 (Satz von Harnack). *Es sei $\{u_n(x)\}$ eine Folge von Funktionen, welche in dem endlichen Gebiet Ω mit dem stückweise glatten Rand Γ harmonisch sind. Des weiteren seien die Funktionen $u_n(x)$ im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ stetig. Wenn die Folge $\{u_n(x)\}$ auf Γ gleichmäßig konvergiert, dann gilt:*

1. *Die Folge $\{u_n(x)\}$ konvergiert gleichmäßig im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$;*
2. *die Grenzfunktion ist in Ω harmonisch;*
3. *in einem beliebigen abgeschlossenen Teilgebiet $\overline{\Omega'}$ des Gebietes Ω konvergieren die Ableitungen beliebiger Ordnung der Funktionen $u_n(x)$ gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen der Grenzfunktion.*

Beweis. Die Folge $\{u_n(x)\}$ konvergiert gleichmäßig auf Γ. Das bedeutet, daß sich für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zahl N angeben läßt derart, daß für alle $n \geqq N$ und für beliebiges natürliches p die Ungleichung

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in \Gamma \tag{1}$$

gilt. In den Betragszeichen steht die Differenz zweier harmonischer Funktionen; diese ist selbst eine harmonische Funktion. Des weiteren ist diese Differenz in $\overline{\Omega}$ stetig. Eine solche Funktion nimmt aber sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum auf dem Rande des Gebietes an.

Aus der Ungleichung (1) ergibt sich nun

$$-\varepsilon < \min_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] \leqq \max_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] < \varepsilon,$$

und aus dem Maximumprinzip folgt für beliebiges $x \in \Omega$ die Ungleichung

$$\min_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] \leqq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leqq \max_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)].$$

Dann gilt aber

$$-\varepsilon < u_{n+p}(x) - u_n(x) < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

oder

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Die letzte Ungleichung bedeutet, daß die Folge $\{u_n(x)\}$ im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ gleichmäßig konvergiert. Folglich existiert die Grenzfunktion

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \tag{2}$$

und ist in $\overline{\Omega}$ definiert und stetig.

Es sei $x \in \Omega$. Wir konstruieren eine Kugel $D_R(x)$ mit dem Mittelpunkt x und einem derart kleinen Radius R, daß diese Kugel zusammen mit ihrer Oberfläche S_R ganz im Inneren von Ω liegt. Auf Grund des direkten Mittelwertsatzes gilt dann

$$u_n(x) = \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} u_n(\xi)\, dS_R\,. \tag{3}$$

Da die Folge $\{u_n(x)\}$ für $n \to \infty$ in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig konvergiert, so kann man unter dem Integralzeichen zum Grenzwert übergehen und erhält dann

$$u(x) = \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R\,. \tag{4}$$

Auf Grund des umgekehrten Mittelwertsatzes ist nun die Funktion $u(x)$ in Ω harmonisch.

Es genügt also, die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen zu beweisen. Wir betrachten ein beliebiges inneres Teilgebiet Ω' des Gebietes Ω und bezeichnen mit $2\,a$ den kleinsten Abstand zwischen den Rändern der Gebiete Ω und Ω'. Auf die Funktion $u_n(x)$ und den Punkt $x \in \overline{\Omega'}$ wenden wir die Formel (7.6) an:

$$u_n(x) = \int_{\Omega} u_n(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi\,. \tag{5}$$

Differenziert man beide Seiten der letzten Formel nach den Koordinaten des Punktes x, dann erhält man

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} = \int_{\Omega} u_n(\xi) \frac{\partial^k \omega_a(r)}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}\, d\xi\,. \tag{6}$$

Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl und $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$. Analog ergibt sich

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} = \int_{\Omega} u(\xi) \frac{\partial^k \omega_a(r)}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}\, d\xi\,. \tag{7}$$

Da die Folge $\{u_n(x)\}$ in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen die Funktion $u(x)$ konvergiert und da die Funktion

$$\frac{\partial^k \omega_a(r)}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}$$

für beliebige ξ und x stetig ist, so konvergiert das Integral in (6) gleichmäßig

gegen das Integral (7). Folglich gilt

$$\frac{\partial^k u_n(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}$$

gleichmäßig in $\overline{\Omega'}$. Der Satz ist damit bewiesen.

Satz 11.9.2 (Satz über die Konvergenz im Mittel). *Es sei Ω ein endliches Gebiet mit dem stückweise glatten Rand Γ und $\{u_n(x)\}$ eine Folge harmonischer Funktionen in Ω, welche in der Metrik des Raumes $L_p(\Omega)$* $(1 < p < \infty)$ *konvergiert. Dann gilt: 1. Die Grenzfunktion ist im Gebiet Ω harmonisch; 2. sowohl die Folge der Funktionen $u_n(x)$ als auch die Folge ihrer Ableitungen konvergiert in einem beliebigen inneren Teilgebiet von Ω gleichmäßig.*

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung des Satzes existiert die Grenzfunktion

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

im Sinne der Konvergenz im Mittel zur p-ten Potenz. Letzteres bedeutet: $u \in L_p(\Omega)$ und

$$\int_\Omega |u(\xi) - u_n(\xi)|^p \, d\xi \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Unter Benutzung der Formel (5) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} u_n(x) &= \int_\Omega u_n(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi , \\ u_k(x) &= \int_\Omega u_k(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi , \end{aligned}\right\} \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega'} .$$

Indem wir die beiden letzten Gleichungen voneinander subtrahieren und danach die HÖLDERsche Ungleichung anwenden, finden wir

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leqq \left\{\int_\Omega |u_n(\xi) - u_k(\xi)|^p \, d\xi\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_\Omega \omega_a^{p'}(r)\, d\xi\right\}^{\frac{1}{p'}}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 .$$

Bei festem Mittelungsradius a ist die Funktion $\omega_a(r)$ beschränkt. Des weiteren strebt auf Grund der Voraussetzung des Satzes das erste Integral der rechten Seite von (8) gegen Null. Dann folgt aber aus der Ungleichung (8), daß die Folge $\{u_n(x)\}$ in $\overline{\Omega'}$ gleichmäßig konvergiert. Folglich ist die Funktion $u(x)$ in $\overline{\Omega'}$ stetig; da nun aber Ω' ein beliebiges inneres Teilgebiet von Ω ist, so ist $u(x)$ im offenen Gebiet Ω stetig.

Lassen wir jetzt in Formel (3) $n \to \infty$ streben, dann gelangen wir zu der Formel (4); daraus läßt sich, genauso wie oben, schließen, daß die Funktion $u(x)$ in Ω harmonisch ist. Die Behauptung über die Konvergenz der Folge der Ableitungen von $u_n(x)$ beweist man genauso wie im Satz 11.9.1.

Aus den Sätzen des vorliegenden Paragraphen ergeben sich einige Folgerungen:

Folgerung 11.9.1. *Es sei Ω ein endliches Gebiet mit einem stückweise glatten Rand. Die harmonischen Funktionen bilden im Raum $C(\overline{\Omega})$ einen Unterraum. Aus der Konvergenz in diesem Unterraum folgt die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen beliebiger Ordnung in einem beliebigen inneren abgeschlossenen Teilgebiet.*

Folgerung 11.9.2. *Es sei Ω ein endliches Gebiet mit einem stückweise glatten Rand, und für die Konstante p gelte $1 < p < \infty$. Die harmonischen Funktionen bilden im Raum $L_p(\Omega)$ einen Unterraum. Aus der Konvergenz einer Folge in diesem Unterraum folgt die gleichmäßige Konvergenz sowohl dieser Folge als auch der Folge der Ableitungen beliebiger Ordnung in einem beliebigen inneren abgeschlossenen Teilgebiet.*

§ 10. Übertragung auf Gleichungen mit variablen Koeffizienten

Die Ergebnisse des vorliegenden Kapitels lassen sich zu einem großen Teil auf elliptische Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten übertragen. Wir werden uns aber in diesem Paragraphen nicht mit dem allgemeinen Fall beschäftigen. Vielmehr wollen wir hier — an vielen Stellen ohne Beweis — die grundlegenden Fakten anführen, die sich auf die selbstadjungierte elliptische Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(x)\,u = 0 \tag{1}$$

beziehen. Eine vollständigere Darstellung diesbezüglicher Fragen findet man in den Büchern von K. MIRANDA [10] sowie des Verfassers [11], die im Literaturverzeichnis zum Teil V am Ende dieses Buches aufgeführt sind.

Es sei Ω ein endliches Gebiet des m-dimensionalen euklidischen Raumes, das durch die stückweise glatte Fläche Γ berandet wird. Wir machen folgende Voraussetzungen: $A_{jk} \in C^{(3)}(\overline{\Omega})$, $C \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ (in einigen Fällen lassen sich diese Bedingungen abschwächen). Gleichung (1) setzen wir als elliptisch in $\overline{\Omega}$ voraus. Letzteres bedeutet, daß sämtliche Eigenwerte der Matrix

$$A(x) = \|A_{jk}(x)\|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$$

von Null verschieden sind und ein und dasselbe Vorzeichen besitzen; wir nehmen an, sie seien sämtlich positiv. Es sei $\lambda_1(x)$ der kleinste Eigenwert der Matrix $A(x)$; dieser ist dann eine Wurzel der Gleichung Det $(A(x) - \lambda I) = 0$, deren sämtliche Koeffizienten stetige Funktionen von x in $\overline{\Omega}$ sind, wobei der höchste Koeffizient gleich $-(1)^m$ ist. Dann sind aber die Wurzeln dieser Gleichung stetige Funktionen in $\overline{\Omega}$. Als stetige und positive Funktion in $\overline{\Omega}$ besitzt nun $\lambda_1(x)$ ein positives Infimum:

$$\lambda_1(x) \geqq \mu_0 = \text{const} > 0\,, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{2}$$

Wie aus der Theorie der quadratischen Formen bekannt ist, gilt für beliebige reelle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ die Ungleichung

$$A_{jk}(x)\, t_j\, t_k \geqq \lambda_1(x) \sum_{k=1}^{m} t_k^2\,.$$

Aus der Ungleichung (2) ergibt sich dann die wichtige Beziehung

$$A_{jk}(x)\, t_j\, t_k \geqq \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2\,, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{3}$$

Im weiteren betrachten wir nur solche Lösungen der Gleichung (1), die zur Klasse $C^{(2)}(\Omega)$ gehören.

1. Das Maximumprinzip gilt für die Gleichung (1) in der folgenden abgeschwächten Form:

Satz 11.10.1. *Wenn $C(x) > 0$ ($\forall\, x \in \Omega$) gilt, dann besitzt eine Lösung der Gleichung* (1) *im Inneren des Gebietes Ω weder ein negatives Minimum noch ein positives Maximum. Gilt $C(x) < 0$ ($\forall\, x \in \Omega$), dann besitzt eine solche Lösung im Inneren des Gebietes Ω weder ein positives Minimum noch ein negatives Maximum.*

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall eines Minimums unter der Voraussetzung $C(x) > 0$; alle übrigen Fälle lassen sich analog betrachten. Es sei also $C(x) > 0$, $x \in \Omega$, und in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ nehme die Lösung $u(x)$ der Gleichung (1) ein negatives Minimum an. Im Punkt x_0 gilt dann

$$u < 0\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \geqq 0\,; \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{4}$$

Die Beziehungen (4) gelten in einem beliebigen Koordinatensystem. Wir drehen jetzt die Koordinatenachsen derart, daß Gleichung (1) im Punkt x_0 die kanonische Form annimmt. Dann gilt also

$$A_{kk}(x_0) > 0\,; \qquad A_{jk}(x_0) = 0\,, \qquad j \neq k\,. \tag{5}$$

Setzt man in der Gleichung (1) $x = x_0$, dann erhält man

$$-\sum_{k=1}^{m} A_{kk}(x_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)_{x=x_0} + C(x_0)\, u(x_0) = 0\,,$$

was aber nicht sein kann; auf Grund der Beziehungen (4) und (5) ist nämlich das erste Glied der linken Seite nicht positiv, der zweite Summand dagegen streng negativ und mithin die linke Seite negativ.

Bemerkung. Das Maximumprinzip gilt auch für die allgemeinere — nicht selbstadjungierte — Gleichung vom elliptischen Typ

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + C\,u = 0\,.$$

In der Tat, da in einem Minimum- oder Maximumpunkt $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ ist, so beeinträchtigen die Glieder mit den Koeffizienten B_k nicht die oben durchgeführten Überlegungen.

2. Die singuläre Lösung. Es sei

$$a(x) = A^{-1}(x) = ||a_{jk}(x)||_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}\,.$$

Wir betrachten die Funktion

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|\,\sqrt{D(\xi)}}\,[a_{jk}(\xi)\,(x_j - \xi_j)\,(x_k - \xi_k)]^{-\frac{m-2}{2}}\,, \qquad m > 2\,, \tag{6}$$

mit $D(\xi) = \operatorname{Det} A(\xi)$. Bei festem ξ genügt die Funktion $\psi(x, \xi)$ der Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(\xi)\,\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right) = 0\,.$$

Die Funktion (6) heißt *Parametrix* der Gleichung (1). Für $m = 2$ wird die Parametrix durch folgende Formel definiert:

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{D(\xi)}} \ln\,[a_{jk}(\xi)\,(x_j - \xi_j)\,(x_k - \xi_k)]^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{6_1}$$

Singuläre Lösung der Gleichung (1) heißt eine Funktion $v(x, \xi)$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) Die Funktion $v(x, \xi)$ ist in der Form

$$v(x, \xi) = \psi(x, \xi) + \psi_1(x, \xi) \tag{7}$$

darstellbar, wobei für $x \to \xi$ gilt:

$$\psi_1(x, \xi) = O(r^{\varkappa+2-m}) \,, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} = O(r^{\varkappa+1-m}) \,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_i \, \partial x_k} = O(r^{\varkappa-m}) \,; \qquad \chi = \text{const} > 0 \,;$$

b) bei festem ξ, $\xi \neq x$, genügt die Funktion $v(x, \xi)$ der Gleichung (1).

Den Beweis für die Existenz einer singulären Lösung findet man in dem bereits erwähnten Buch von K. MIRANDA [10].

Es existieren singuläre Lösungen der Gleichung (1), welche in bezug auf x und ξ symmetrisch sind (vgl. K. MIRANDA [10]). Wenn im weiteren von einer singulären Lösung die Rede ist, dann setzen wir dabei stets voraus, daß diese symmetrisch ist.

3. Die Integraldarstellung. Es sei Ω' ein inneres Teilgebiet des Gebietes Ω und Γ' der stückweise glatte Rand dieses Teilgebietes. Des weiteren sei $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega'})$. Unter Benutzung der singulären Lösung der Gleichung (1) läßt sich eine zu (3.4) analoge Integraldarstellung gewinnen.

Es sei $x \in \Omega'$. Wir beschreiben um den Punkt x ein Gebiet σ_ε, welches durch die Ungleichung

$$a_{jk}(x)\,(x_j - \xi_j)\,(x_k - \xi_k) < \varepsilon^2$$

definiert wird; das dieses Gebiet begrenzende Ellipsoid

$$a_{jk}(x)\,(x_j - \xi_j)\,(x_k - \xi_k) = \varepsilon^2$$

bezeichnen wir mit Γ_ε. Schließlich sei $v(x, \xi)$ eine symmetrische singuläre Lösung der Gleichung (1). Unter Berücksichtigung von $L\,v = 0$ erhalten wir nach der GREENschen Formel (6.6) aus Kap. 10

$$\int\limits_{\Omega' \setminus \sigma_\varepsilon} v\,L\,u\,d\xi = \int\limits_{\Gamma'} A_{jk}(\xi) \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \xi_k} - u\,\frac{\partial v}{\partial \xi_k} \right) \cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma' + \\ + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} A_{jk}(\xi) \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \xi_k} - u\,\frac{\partial v}{\partial \xi_k} \right) \cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon \,; \tag{9}$$

dabei bedeutet L den durch die linke Seite der Gleichung (1) definierten Differentialausdruck.

Jetzt strebe $\varepsilon \to 0$. Dann gilt

$$\int\limits_{\Omega' \setminus \sigma_\varepsilon} v\,L\,u\,d\xi \to \int\limits_{\Omega'} v\,L\,u\,d\xi \,,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} v\,A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon \to 0 \,,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u\,A_{jk}\,\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon \to 0 \,.$$

Es bleibt also noch der Grenzwert des Integrals

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(\xi)\,A_{jk}(\xi)\,\frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon \tag{10}$$

zu bestimmen. Da die singuläre Lösung in bezug auf x und ξ symmetrisch ist, so kann man

diese in der Form $v(x, \xi) = \psi(\xi, x) + \psi_1(\xi, x)$ darstellen und in dem Integral (10) die Funktion ψ wie folgt ansetzen[1]):

$$\psi = \psi(\xi, x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|\,\sqrt{D(x)}}\,[a_{jk}(x)\,(\xi_j - x_j)\,(\xi_k - x_k)]^{-\frac{m-2}{2}}.$$

Jetzt ergibt sich

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} = -\frac{1}{|S_1|\sqrt{D(x)}}\,\frac{a_{pk}(x)\,(\xi_p - x_p)}{[a_{jl}(x)\,(\xi_j - x_j)\,(\xi_l - x_l)]^{\frac{m}{2}}},$$

oder, unter Benutzung der Gleichung des Ellipsoids Γ_ε,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} = \frac{1}{|S_1|\,\varepsilon^m\sqrt{D(x)}}\,a_{pk}(x)\,(x_p - \xi_p).$$

Das Integral (10) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{|S_1|\,\varepsilon^m\sqrt{D(x)}}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(\xi)\,a_{pk}(x)\,A_{jk}(x)\,(x_p - \xi_p)\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon. \tag{11}$$

Das Integral (11) läßt sich weiter vereinfachen. Zunächst sind die Matrizen A und a symmetrisch und zu einander invers; es gilt somit

$$a_{pk}(x)\,A_{jk}(x) = a_{pk}(x)\,A_{kj}(x) = \delta_{pj},$$

und für das Integral (11) ergibt sich

$$\frac{1}{|S_1|\,\varepsilon^m\sqrt{D(x)}}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(\xi)\,(x_j - \xi_j)\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon.$$

Ersetzt man hierbei $u(\xi)$ durch $u(x)$, dann erhält man ein Integral, welches sich von dem letzteren nur um eine Größe unterscheidet, die zusammen mit ε gegen Null strebt. Folglich stimmt der Grenzwert des Integrals (10) mit dem Grenzwert des Terms

$$\frac{1}{|S_1|\,\varepsilon^m}\,\frac{u(x)}{\sqrt{D(x)}}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(x_j - \xi_j)\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon \tag{12}$$

überein.

Das letztere Integral formen wir mit Hilfe der Gauss-Ostrogradskischen Formel in ein Volumenintegral um:

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(x_j - \xi_j)\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon = \int\limits_{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,(x_j - \xi_j)}{\partial \xi_j}\,d\xi = -m\int\limits_{\sigma_\varepsilon}d\xi = -m\,|\sigma_\varepsilon|.$$

Wir berechnen jetzt die Größe $|\sigma_\varepsilon|$.

Das Volumen eines Ellipsoids ist gleich dem Produkt aus dem Volumen der Einheitssphäre und allen Halbachsen des Ellipsoids. Wenn $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ die Eigenwerte der Matrix $A(x)$ sind, dann sind $\varepsilon\sqrt{\lambda_k(x)}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, die Halbachsen des Ellipsoids Γ_ε. Somit gilt

$$|\sigma_\varepsilon| = \frac{|S_1|\,\varepsilon^m}{m}\sqrt{\prod_{k=1}^{m}\lambda_k(x)} = \frac{|S_1|\,\varepsilon^m}{m}\sqrt{D(x)};$$

---

[1]) In der eckigen Klammer wird wie gewöhnlich über j und k von 1 bis m summiert.

der Term (12) hängt also nicht von ε ab und ist gleich $-u(x)$. Als Ergebnis des Grenzüberganges in Formel (9) erhalten wir nun folgende Integraldarstellung:

$$u(x) = \int_{\Gamma'} A_{jk}(\xi) \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi_k} - u \frac{\partial v}{\partial \xi_k} \right) \cos(\nu, x_j)\, d_\xi \Gamma' - \int_{\Omega'} v\, L\, u\, d\xi \,. \tag{13}$$

Wenn $u(x)$ der Gleichung (1) genügt, dann ist $L\,u = 0$, und es ergibt sich die Integraldarstellung für die Lösungen der Gleichung (1):

$$u(x) = \int_{\Gamma'} A_{jk}(\xi) \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi_k} - u \frac{\partial v}{\partial \xi_k} \right) \cos(\nu, x_j)\, d_\xi \Gamma' \,. \tag{14}$$

4. **Der Mittelwertsatz.** Es sei $u(x) \in C^{(2)}(\Omega)$ eine Lösung der Gleichung (1). In der Formel (14) nehmen wir als Fläche Γ' eine Niveaufläche der Funktion $v(x, \xi)$, d. h. die Fläche

$$v(x, \xi) = v_0 = \text{const}\,.$$

Wir setzen die Konstante v_0 als hinreichend groß voraus und nehmen den Punkt x als fest an. Dann gilt

$$u(x) = v_0 \int_{v=v_0} A_{jk}(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j)\, d_\xi \Gamma' - \int_{v=v_0} u(\xi)\, A_{jk}(\xi) \frac{\partial v}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j)\, d_\xi \Gamma' \,.$$

Nach der GAUSS-OSTROGRADSKIschen Formel ergibt sich nun[1])

$$\int_{v=v_0} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j)\, d_\xi \Gamma' = \int_{v>v_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right) d\xi = \int_{v>v_0} C(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \,.$$

Setzen wir schließlich der Einfachheit halber

$$-A_{jk} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} \cos(\nu, x_j) = N(v)\,,$$

dann erhalten wir folgende zum Mittelwertsatz analoge Formel:

$$u(x) = \int_{v=v_0} u(\xi)\, N(v)\, d_\xi \Gamma' + v_0 \int_{v>v_0} C(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \,. \tag{15}$$

Die Formel (15) gilt für die Lösungen der Gleichung (1). Es läßt sich auch die umgekehrte Behauptung beweisen: Wenn eine Funktion $u \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, der Beziehung (15) genügt, dann ist $u \in C^{(2)}(\Omega)$, und diese Funktion erfüllt die Gleichung (1). Wir erhalten diese Behauptung beiläufig beim Beweis für den Satz des folgenden Abschnitts.

Die rechte Seite der Formel (15) enthält ein Oberflächenintegral. Es läßt sich aber leicht eine Formel desselben Typs angeben, welche nur ein Volumenintegral enthält. Es sei $\Phi(\varrho)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen ϱ, die nur im Intervall $0 < \varrho < \varrho_1$ von Null verschieden ist; dabei sei ϱ_1 eine hinreichend kleine positive Konstante. Wir nehmen an, daß der Abstand $r = |x - \xi|$ hinreichend klein sei; dann ist $v(x, \xi) > 0$. Wir setzen

$$\varrho(x, \xi) = [v(x, \xi)]^{-\frac{1}{m-2}}\,, \qquad \varrho_0 = v_0^{-\frac{1}{m-2}}\,.$$

Offenbar gilt $\varrho(x, \xi) = O(r)$ und $d\xi = \dfrac{d\varrho\, d_\xi \Gamma'}{\partial \varrho / \partial \nu}$; dabei bedeutet Γ' die Fläche $v = \text{const}$ und ν deren äußere Normale. Wir multiplizieren jetzt beide Seiten der Gleichung (15) mit $\Phi(\varrho_0) \dfrac{1}{(\partial \varrho / \partial \nu)_{\varrho=\varrho_0}}\, d\varrho_0$ und integrieren dann nach ϱ_0 in den Grenzen von 0 bis $+\infty$. Dann

---

[1]) Offenbar liegt das Gebiet $v > v_0$ innerhalb der Fläche $v = v_0$.

gelangen wir zu einer Formel der Gestalt

$$u(x) = \int_{\varrho < \varrho_0} K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi\,, \tag{16}$$

dabei ist $K(x, \xi)$ eine gewisse stetige Funktion des Punktes (x, ξ), welche stetige erste und zweite Ableitungen nach den Koordinaten des Punktes x besitzt.

5. Unterräume von Lösungen.

Satz 11.10.2. *Die Menge der zum Durchschnitt $C^{(2)}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ gehörigen Lösungen der Gleichung* (1) *bildet einen Unterraum des Raumes $L_p(\Omega)$. Die Konvergenz in diesem Unterraum zieht die gleichmäßige Konvergenz sowohl der Funktionen selbst als auch ihrer Ableitungen erster und zweiter Ordnung in einem beliebigen abgeschlossenen inneren Teilgebiet des Gebietes Ω nach sich.*

Beweis. Es sei $\{u_n(x)\}$ eine Folge von Lösungen der Gleichung (1), welche zum Durchschnitt $C^{(2)}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ gehören, und diese Folge konvergiere in der Metrik des Raumes $L_p(\Omega)$ gegen eine gewisse Grenzfunktion $u(x)$. Wir nehmen ein inneres Teilgebiet Ω' und wählen eine Zahl $\varrho_2 > 0$ derart, daß das Gebiet $\varrho(x, \xi) < \varrho_2$ für beliebiges $x \in \overline{\Omega'}$ innerhalb von Ω liegt. Wenn $\varrho_1 \leqq \varrho_2$ ist, dann gilt für einen beliebigen Punkt $x \in \overline{\Omega'}$ und für eine beliebige Funktion $u_n(x)$ die Formel (16):

$$u_n(x) = \int_{\varrho < \varrho_1} K(x, \xi)\, u_n(\xi)\, d\xi\,.$$

Indem wir $n \to \infty$ streben lassen, finden wir, daß die Grenzfunktion $u(x)$ ebenfalls der Beziehung (16) genügt. Da nun der Kern $K(x, \xi)$ stetige zweite Ableitungen besitzt, so gilt $u \in C^{(2)}(\Omega')$. Aus Beziehung (16) ergibt sich außerdem, daß die Funktionen $u_n(x)$ sowie deren Ableitungen erster und zweiter Ordnung in $\overline{\Omega'}$ gleichmäßig gegen die Funktion $u(x)$ bzw. deren entsprechenden Ableitungen konvergieren.

Als Lösungen der Gleichung (1) genügen die Funktionen $u_n(x)$ der Beziehung (15). Indem wir $n \to \infty$ streben lassen, finden wir, daß derselben Beziehung auch die Grenzfunktion $u(x)$ genügt. Es sei jetzt in der Darstellung (13) Γ' die Fläche $v = v_0$. Dann ergibt sich aus den Beziehungen (13) und (15) folgende Identität für die Grenzfunktion:

$$\int_{v > v_0} (v - v_0)\, L\, u\, d\xi = 0\,.$$

Wegen $v - v_0 > 0$ läßt sich auf das letzte Integral der Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden, und wir erhalten dann

$$(L\, u)_{x = x'} \int_{v > v_0} (v - v_0)\, dx = 0\,,$$

dabei ist x' ein gewisser Punkt des Gebietes $v(x, \xi) > v_0$. Daraus ergibt sich nun $(L\, u)_{x=x'} = 0$. Für $v_0 \to \infty$ erhalten wir $(L\, u)\, (x) = 0$, was zu beweisen war.

Völlig analog beweist man den zum Satz 11.10.2 analogen Satz, in dem an Stelle des Raumes $L_p(\Omega)$ der Raum $C(\overline{\Omega})$ tritt.

KAPITEL 12

DAS DIRICHLETSCHE UND DAS NEUMANNSCHE PROBLEM

§ 1. Aufgabenstellung

Wir betrachten hier zweierlei Gebiete: *endliche* und *unendliche*. In beiden Fällen setzen wir den Rand des Gebietes als endlich voraus; dabei nehmen wir wie auch früher an, daß der Rand aus endlich vielen stückweise glatten Flächen besteht (vgl. Abb. 12 und 13). In den folgenden Kapiteln — dies wird in jedem einzelnen Fall besonders hervorgehoben — werden gelegentlich auch sogenannte *halbunendliche* Gebiete betrachtet, deren Ränder unendlich sind. Das einfachste Beispiel eines halbunendlichen Gebietes ist der Halbraum.

Eine Randwertaufgabe für eine elliptische Differentialgleichung heißt *inneres Randwertproblem*, wenn die Lösung im endlichen Gebiet gesucht wird, und *äußeres Randwertproblem*, wenn die Lösung im unendlichen Gebiet gesucht wird.

Die wichtigsten Randwertaufgaben für eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung sind das DIRICHLET*sche Problem* (auch erste Randwertaufgabe genannt) und das NEUMANN*sche Problem* (zweite Randwertaufgabe).

Wir betrachten eine elliptische Gleichung der allgemeinen Gestalt

$$- A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 \, u = F(x) \, . \tag{1}$$

Das *innere* DIRICHLET*sche Problem* wird für diese Gleichung folgendermaßen formuliert:

Es sei Ω ein endliches Gebiet mit dem stückweise glatten Rand Γ und $\varphi(x)$ eine auf dem Rand Γ definierte und stetige Funktion. Es soll eine Lösung der Gleichung (1) gefunden werden, die zur Klasse $C^{(2)}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gehört und auf dem Rand mit der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ übereinstimmt:

$$u(x) = \varphi(x) \, , \qquad x \in \Gamma \, . \tag{2}$$

Das *innere* NEUMANN*sche Problem* für dieselbe Gleichung (1) formulieren wir wie folgt:

Es soll eine Lösung der Gleichung (1) gefunden werden, die die folgenden Eigenschaften besitzt: $u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und auf der Menge derjenigen Punkte $x \in \Gamma$, in denen eine Normale ν zur Fläche Γ existiert, gilt die Gleichung

$$\lim_{x' \to x} A_{jk}(x') \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} \cos(\nu, x_k) = \psi(x) \, . \tag{3}$$

Dabei ist x' ein Punkt, der im Inneren von Ω auf der Normalen ν liegt, x'_k sind die cartesischen Koordinaten dieses Punktes und $\psi(x)$ ist eine auf der genannten Punktmenge der Fläche Γ definierte Funktion.

Die Randbedingung des NEUMANNschen Problems werden wir im weiteren einfach in der Form

$$A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_k)|_\Gamma = \psi(x) \tag{3_1}$$

schreiben. Diese Schreibweise kann wörtlich verstanden werden, wenn $u \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ ist.

Wenn $A_{jk} = \delta_{jk}$ gilt, dann ergibt der Hauptteil der Gleichung (1) den LAPLACE-Operator, und Gleichung (1) nimmt folgende Gestalt an:

$$-\Delta u + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = F(x) . \tag{4}$$

Die Randbedingung (3_1) hat in diesem Fall die besonders einfache Form

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \psi(x) . \tag{5}$$

Bemerkung. Die oben gegebenen Formulierungen der DIRICHLETschen und NEUMANNschen Randwertprobleme sind keinesfalls ganz allgemein. Man kann z. B. den Fall betrachten, wo in der Randbedingung (2) des DIRICHLETschen Problems die Funktion $\varphi(x)$ auf Γ unstetig ist. In diesem Fall kann nicht mehr $u \in C(\Omega)$ gefordert werden. Diese Bedingung ist durch eine gewisse andere Bedingung zu ersetzen; die Randbedingung (2) braucht nur in den Stetigkeitspunkten der Funktion $\varphi(x)$ erfüllt zu sein. Man kann auch von der Bedingung der stückweisen Glattheit des Randes Abstand nehmen.

Die *äußeren Randwertprobleme* unterscheiden sich von den entsprechenden inneren Randwertproblemen dadurch, daß an die gesuchte Funktion die folgende Zusatzbedingung gestellt wird:

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{m-2}}\right), \qquad x \to \infty . \tag{6}$$

§ 2. Unitätssätze für die LAPLACE-Gleichung

Satz 12.2.1. *Sowohl das innere als auch das äußere* DIRICHLET*sche Problem für die* LAPLACE-*Gleichung besitzt höchstens eine Lösung.*

Beweis. Wir nehmen an, das DIRICHLETsche Problem besitze zwei Lösungen: $u_1(x)$ und $u_2(x)$. Dann gilt:

$$-\Delta u_1 = F(x) , \quad u_1|_\Gamma = \varphi(x) ; \tag{1}$$

$$-\Delta u_2 = F(x) , \quad u_2|_\Gamma = \varphi(x) . \tag{2}$$

Wir führen die Bezeichnung $u_1(x) - u_2(x) = v(x)$ ein. Indem man (1) von (2) subtrahiert, erhält man

$$\Delta v = 0 , \quad v|_\Gamma = 0 . \tag{3}$$

Wir betrachten zunächst das innere DIRICHLETsche Problem. Letzteres besteht in der Bestimmung einer in Ω harmonischen Funktion $v(x)$, die in $\overline{\Omega}$ stetig ist. Nach dem Maximumprinzip werden das Maximum und das Minimum dieser Funktion auf dem Rande des Gebietes angenommen; folglich sind beide gleich Null. Daraus ergibt sich nun $v \equiv 0$ oder $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Wir gehen jetzt zum äußeren DIRICHLETschen Problem über und betrachten dabei nur den Fall $m > 2$. Auf Grund der Bedingung (1.6) ist die Differenz der Lösungen $v = u_1 - u_2$ eine in Ω harmonische Funktion. Wir betten den Rand Γ in eine Kugel vom Radius R mit der Kugeloberfläche S_R ein und betrachten die Funktion $v(x)$ in dem zwischen Γ und S_R eingeschlossenen Ringgebiet Ω_R (vgl. Abb. 20). Dabei gilt $v|_\Gamma = 0$; legen wir den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt der genannten Kugel, dann gilt außerdem

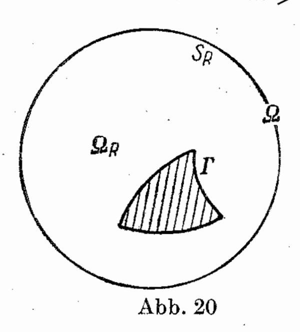


Abb. 20

$$|v(x)| \leq \frac{C}{|x|^{m-2}}, \qquad C = \text{const}$$

für hinreichend große $|x|$. Folglich gilt auf der Kugeloberfläche S_R mit hinreichend großem Radius R:

$$|v(x)| \leq \frac{C}{R^{m-2}}.$$

Wir geben jetzt eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ vor und wählen R derart, daß $C\,R^{2-m} < \varepsilon$ ist. In dem Ringgebiet Ω_R nimmt die Funktion $v(x)$ ihren größten und ihren kleinsten Wert entweder auf Γ oder auf S_R an, folglich sind diese Werte dem Betrage nach kleiner als ε.

Es sei nun x ein beliebiger Punkt des Gebietes Ω. Für hinreichend großes R liegt dieser Punkt im Gebiet Ω_R, und es gilt somit $|v(x)| < \varepsilon$. Da die Zahl ε beliebig sein kann, so ist $v(x) = 0$ und damit $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Bemerkung 1. Der Eindeutigkeitssatz für das äußere DIRICHLETsche Problem gilt auch im Falle $m = 2$. Den Beweis erhält man unter Verwendung der Invarianz einer harmonischen Funktion in einem zweidimensionalen Gebiet bei konformen Abbildungen (vgl. Kap. 13). Durch eine gebrochen lineare Funktion läßt sich ein unendliches Gebiet auf ein endliches Gebiet abbilden. Dabei geht eine im unendlichen Gebiet harmonische Funktion in eine Funktion über, die im endlichen Gebiet harmonisch ist, und die entstehende Funktion ist wieder auf dem Rande ihres Gebietes gleich Null. Somit folgt die Eindeutigkeit der Lösung des äußeren DIRICHLETschen Problems aus der bereits bewiesenen Eindeutigkeit der Lösung des inneren DIRICHLETschen Problems.

Bemerkung 2. Wegen der Eindeutigkeitsbedingungen für das DIRICHLETsche Problem der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.1) vergleiche man das Buch von K. MIRANDA [10]. Wenn die Matrix des Hauptteiles im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ positiv-definit ist und wenn außerdem $A_0(x) > 0$ gilt, dann ergibt sich die Eindeutigkeit der Lösung des DIRICHLETschen Problems aus dem Maximumprinzip (vgl. § 10 des Kap. 11).

Wir beschäftigen uns nun mit dem NEUMANNschen Problem. Zunächst geben wir folgende Definition: Wir sagen, die im Gebiet Ω definierte Funktion $u(x)$

besitze auf dem Rand Γ dieses Gebietes eine *regelmäßige Normalableitung*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x' \to x} \frac{\partial u(x')}{\partial \nu}, \qquad \forall\, x \in \Gamma$$

existiert und auf Γ stetig ist, wobei die Konvergenz in bezug auf x gleichmäßig zu erfolgen hat; mit x' bezeichnen wir, wie bereits weiter oben, einen Punkt des Gebietes Ω, der auf der durch den Punkt x gehenden Normalen ν liegt.

Wenn $u \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ gilt und Γ ein glatter Rand ist, dann besitzt offenbar $u(x)$ auf Γ eine regelmäßige Normalableitung.

Wir betrachten jetzt ein endliches Gebiet Ω mit dem Rand Γ und formulieren für dieses Gebiet das innere NEUMANNsche Problem:

$$-\Delta u = F(x)\,, \qquad x \in \Omega\,, \qquad u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\,,$$

$$\lim_{x' \to x} \frac{\partial u(x')}{\partial \nu} = \psi(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,; \tag{4}$$

dabei verlangen wir, daß *die gesuchte Funktion eine regelmäßige Normalableitung besitzt*. Des weiteren setzen wir voraus, daß der Rand Γ eine *reguläre Fläche* ist. Dies bedeutet: 1. In jedem Punkt x der Fläche existiert eine bestimmte Normale; 2. wählt man in einem beliebigen Punkt $x \in \Gamma$ ein lokales Koordinatensystem derart, daß die x_m-Achse die Richtung der Normalen besitzt und die Achsen $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ in der Tangentialebene liegen, dann läßt sich die Fläche in der Umgebung des Punktes x durch eine explizite Gleichung der Gestalt $x_m = f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ darstellen; 3. für hinreichend kleine $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ gilt $f \in C^{(2)}$.

Wir zeigen jetzt, daß das NEUMANNsche Problem (4) im allgemeinen nicht lösbar ist und leiten eine notwendige Bedingung für dessen Lösbarkeit her.

In jedem Punkt x der Fläche Γ betrachten wir die in das Innere des Gebietes gerichtete Normale und tragen auf dieser Normalen einen Abschnitt der festen Länge h ab, dessen einer Endpunkt der Punkt x ist. Der geometrische Ort der zweiten Endpunkte dieser Abschnitte bildet eine Fläche Γ_h, die man eine zu Γ *parallele Fläche* nennt. Wie aus der Differentialgeometrie bekannt ist, ist Γ_h für hinreichend kleines h eine glatte Fläche und parallele Flächen besitzen ein und dieselbe Normale. Mit $\Omega^{(h)}$ bezeichnen wir das im Inneren von Γ_h eingeschlossene Gebiet; offenbar gilt $\Omega^{(h)} = \Omega \setminus \Omega_h$, wobei Ω_h den Randstreifen des Gebietes Ω von der Breite h bedeutet.

Wenn u eine Lösung des Problems (4) ist, dann gilt offenbar $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega^{(h)}})$, und auf die Funktionen u und $v \equiv 1$ ist die GREENsche Formel (6.9) des Kap. 10 anwendbar. Im vorliegenden Fall ergibt diese Formel

$$-\int\limits_{\Omega^{(h)}} F(x)\,dx = \int\limits_{\Gamma_h} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma_h\,.$$

Da die Funktion u eine regelmäßige Normalableitung besitzt, so konvergiert für $h \to 0$ die Ableitung $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_h}$ gleichmäßig gegen $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = \psi(x)$. Indem wir in

der letzten Formel für $h \to 0$ zum Grenzwert übergehen, erhalten wir

$$\int_\Omega F(x)\,dx + \int_\Gamma \psi(x)\,d\Gamma = 0\,. \tag{5}$$

Dieser Beziehung müssen notwendigerweise die Vorgaben des Problems (4) genügen. Wir sehen also, daß das innere NEUMANNsche Problem für die LAPLACE-Gleichung im allgemeinen keine Lösung besitzt; eine Lösung kann nur dann existieren, wenn die Bedingung (5) erfüllt ist.

In den Spezialfällen einer homogenen Randbedingung oder einer homogenen Differentialgleichung muß entsprechend eine der folgenden zwei Gleichungen erfüllt sein:

$$\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_\Omega F(x)\,dx = 0\,, \tag{6}$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma = \int_\Gamma \psi(x)\,d\Gamma = 0\,. \tag{7}$$

Andererseits ist offensichtlich, daß die Lösung des inneren NEUMANNschen Problems für die LAPLACE-Gleichung (falls eine solche existiert) nicht eindeutig ist. Wenn nämlich $u(x)$ eine Lösung des Problems (4) darstellt, dann ist, wie man leicht sieht, $u(x) + C$ ebenfalls eine Lösung dieses Problems; dabei ist C eine beliebige Konstante. Der Unitätssatz behauptet nun in diesem Fall, daß durch die Darstellung $u(x) + C$ sämtliche Lösungen des Problems erfaßt werden.

Satz 12.2.2. *Zwei Lösungen des inneren* NEUMANN*schen Problems für die* LAPLACE-*Gleichung können sich nur durch einen konstanten Summanden unterscheiden.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz unter der Annahme, daß die Fläche Γ regulär ist.

Das Problem (4) besitze zwei Lösungen. Ihre Differenz $v(x)$ genügt dann den Beziehungen

$$\Delta v = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0\,. \tag{8}$$

Auf die Funktion v und das Gebiet $\Omega^{(h)}$ (siehe oben) wenden wir jetzt die GREENsche Formel (6.8) des Kap. 10 an:

$$\int_{\Omega^{(h)}} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx = \int_{\Gamma_h} v \frac{\partial v}{\partial \nu}\,\Gamma_h\,. \tag{9}$$

Die Funktion v ist stetig und somit beschränkt in $\bar{\Omega}$. Des weiteren strebt die Ableitung $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_h}$ gleichmäßig gegen Null. Indem wir nun in der Beziehung (9) für $h \to 0$ zum Grenzwert übergehen, erhalten wir

$$\int_\Omega \sum_{k=m}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx = 0\,.$$

Daraus ergibt sich $\frac{\partial v}{\partial x_k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, und folglich $v = \text{const}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Wenn man voraussetzt, daß die gesuchte Lösung in $\overline{\Omega}$ stetige erste Ableitungen besitzt, dann läßt sich der Satz 12.2.2 leicht für den Fall beweisen, wo die Fläche Γ nur stückweise glatt ist.

Bemerkung 2. Für den Fall $m = 3$ ist der Satz 12.2.2 unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesen worden (siehe W. I. SMIRNOW [17], Bd. IV, Abschn. 205).

Der Eindeutigkeitssatz für das äußere NEUMANNsche Problem wird später im § 7 bewiesen werden.

§ 3. Die Lösung des DIRICHLETschen Problems für die Kugel

Hier und auch in den folgenden Paragraphen dieses Kapitels (mit Ausnahme des § 7) werden wir nur die homogene LAPLACE-Gleichung betrachten. Die inhomogene Gleichung läßt sich nach der im § 6 des Kap. 11 angegebenen Methode auf die homogene Gleichung zurückführen; wir erinnern daran, daß diese Methode auf der Konstruktion einer partikulären Lösung der inhomogenen LAPLACE-Gleichung in Gestalt des Volumenpotentials begründet ist.

Es sei also eine Kugel D_R vom Radius R mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung gegeben. Wir betrachten das DIRICHLETsche Problem zur Bestimmung einer Funktion $u \in C(\overline{D}_R)$, die in der Kugel harmonisch ist und die der Randbedingung

$$u|_{S_R} = \varphi(x) \tag{1}$$

genügt; dabei ist S_R die Kugeloberfläche und $\varphi(x)$ eine auf S_R definierte und stetige Funktion.

Wir lösen dieses Problem folgendermaßen. Indem wir zunächst voraussetzen, daß eine Lösung existiert und gewissen einschränkenden Bedingungen genügt, leiten wir eine Formel her, welche die Lösung durch die Vorgaben des Problems definiert. Danach zeigen wir, daß die gewonnene Formel in Wirklichkeit immer eine Lösung des Problems liefert.

Das betrachtete Problem besitze eine Lösung $u(x)$, welche zur Klasse $C^{(2)}(\overline{D}_R)$ gehört.

Wir verwenden die Integraldarstellung dieser Lösung (siehe Formel (4.1) des Kap. 11):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{S_R} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi S_R\,. \tag{2}$$

Wir nehmen einen Punkt x im Inneren der Kugel, und es sei x' der zu x in bezug auf die Shpäre S_R symmetrische Punkt (vgl. Abb. 21). Letzteres bedeutet, daß die Punkte x und x' auf einem durch den Kugelmittelpunkt gehenden Strahl liegen und die Beziehung

$$|x| \cdot |x'| = R^2 \tag{3}$$

gilt. Wir setzen

$$r = |x - \xi|\,, \qquad r' = |x' - \xi|\,.$$

Dabei bemerken wir, daß $r' = 0$ ist, wenn der Punkt ξ innerhalb der Kugel oder auf deren Oberfläche liegt. Nun führen wir die Funktion

$$v(\xi) = \frac{1}{r'^{m-2}} \tag{4}$$

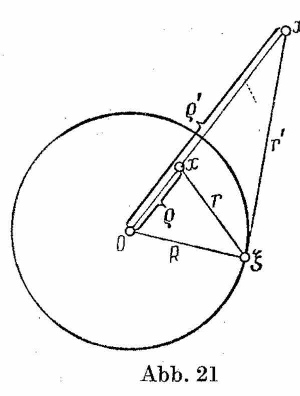


Abb. 21

ein. Diese ist in einem beliebigen Gebiet, das den Punkt x' nicht enthält, harmonisch; insbesondere ist die Funktion (4) in der Kugel D_R harmonisch.

Auf die Funktionen u und v wenden wir jetzt die GREENsche Formel (6.10) des Kap. 10 an. Da beide Funktionen harmonisch sind, so verschwindet das Volumenintegral, und wir erhalten

$$\int_{S_R} \left(\frac{1}{r'^{m-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} \right) d_\xi S_R = 0 . \tag{5}$$

Für das Weitere ist von Bedeutung, daß sich die ersten Summanden der Integranden von (2) und (5) nur durch einen von ξ unabhängigen Faktor unterscheiden. Dies kann man leicht auf Grund der einfachen Überlegung beweisen, daß die Dreiecke $O\,x\,\xi$ und $O\,x'\,\xi$ (vgl. Abb. 21) ähnlich sind. In der Tat, diese Dreiecke besitzen einen gemeinsamen Winkel im Punkt O, und auf Grund der Beziehung (3) sind die diesen Winkel einschließenden Seiten proportional. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$\frac{r}{r'} = \frac{|x|}{R} .$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{|x|\, r'} ,$$

und folglich gilt

$$\frac{1}{r^{m-2}} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} \frac{1}{r'^{m-2}} ,$$

so daß sich die Größen $\frac{1}{r^{m-2}}$ und $\frac{1}{r'^{m-2}}$ durch den von ξ unabhängigen Faktor $\left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2}$ unterscheiden.

Wir setzen weiterhin $|x| = \varrho$, $|x'| = \varrho'$.

Jetzt subtrahieren wir die Formel (5) nach Multiplikation mit

$$\frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{m-2}$$

von der Formel (2):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_{S_R} u(\xi) \left[\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} - \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right] d_\xi S_R .$$

Wenn wir noch berücksichtigen, daß auf Grund der Randbedingung des DIRICHLETschen Problems

$$u(\xi)\,|_{S_R} = \varphi(\xi)$$

gilt, dann erhalten wir für die Lösung (unter der Voraussetzung, daß diese existiert und zur Klasse $C^{(2)}(\overline{D}_R)$ gehört) die folgende Formel:

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{S_R} \varphi(\xi) \left[\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} - \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right] d_\xi S_R \,. \tag{6}$$

Die Formel (6) läßt sich weiter vereinfachen. Da für die Kugel die Richtungen der äußeren Normalen und des Radiusvektors zusammenfallen, gilt

$$\cos(\nu, x_k) = \frac{\xi_k}{R}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\xi_k}{R} \frac{\partial}{\partial \xi_k}\,.$$

Schließlich erwähnen wir noch die Formeln

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k - x_k}{r}\,, \qquad \frac{\partial r'}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k - x'_k}{r'}\,,$$

dabei bedeuten x_k und x'_k entsprechend die Koordinaten der Punkte x und x'.

Jetzt läßt sich das zweite Glied unter dem Integral (6) leicht berechnen. Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -(m-2) \frac{\xi_k}{R} \frac{1}{r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial \xi_k} = -\frac{m-2}{r^m R} \xi_k (\xi_k - x_k) = -\frac{m-2}{r^m R} (R^2 - \xi_k x_k)\,. \tag{7}$$

Analog ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r'^m R} (R^2 - \xi_k x'_k)\,.$$

Wir multiplizieren den letzten Ausdruck mit $\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{m-2}$; unter Berücksichtigung der früher aufgestellten Beziehung $\frac{R}{\varrho\, r'} = \frac{1}{r}$ erhalten wir dann

$$\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^m R} \left(\varrho^2 - \xi_k x'_k \frac{\varrho^2}{R^2}\right).$$

Da die Punkte x und x' auf einem durch den Koordinatenursprung gehenden Strahl liegen, so gilt

$$x_k = x'_k \frac{|x|}{|x'|} = x'_k \frac{\varrho^2}{\varrho\, \varrho'} = x'_k \frac{\varrho^2}{R^2}$$

und folglich

$$\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{m-2} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r'^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^m R} (\varrho^2 - \xi_k x_k)\,. \tag{8}$$

Setzen wir nun die Größen (7) und (8) in das Integral (6) ein, so erhalten wir schließlich

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \varphi(\xi) \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m} d_\xi S_R \,. \tag{9}$$

Die Formel (9) heißt Poisson*sche Formel,* der Ausdruck

$$\frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m}, \qquad \varrho \leqq R$$

Poisson*scher Kern.*

Aus den oben angestellten Überlegungen folgt, daß die Poissonsche Formel auf jeden Fall für eine beliebige harmonische Funktion der Klasse $C^{(2)}(\overline{D}_R)$ gilt.

Wir erwähnen einige Eigenschaften des Poissonschen Kerns.

1. Der Poissonsche Kern ist nicht negativ. Für $\varrho = R$ ist er überall gleich Null, mit Ausnahme des Punktes $x = \xi$; in der Umgebung dieses Punktes ist der Poissonsche Kern nicht beschränkt.

2. Wenn der Punkt x im Inneren der Kugel variiert, dann ist der Poissonsche Kern eine harmonische Funktion von x.

Beweis. Wenn der Punkt x im Inneren der Kugel liegt, dann ist $r \neq 0$, und der Poissonsche Kern besitzt stetige Ableitungen sämtlicher Ordnungen. Es bleibt noch zu beweisen, daß dieser Kern der homogenen Laplace-Gleichung genügt. Nach der Leibnizschen Formel gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \frac{R^2 - \varrho^2}{r^m} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial^2 (R^2 - \varrho^2)}{\partial x_k^2} + 2 \frac{\partial (R^2 - \varrho^2)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r^m}\right) + (R^2 - \varrho^2) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\frac{1}{r^m}\right).$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\varrho}, \qquad \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k - \xi_k}{r},$$

erhalten wir nach Summation über k:

$$\Delta \frac{R^2 - \varrho^2}{r^m} = \frac{2\, m}{r^m}\left[-1 + \frac{1}{r^2}(R^2 + \varrho^2 - 2\, x_k\, \xi_k)\right];$$

die rechte Seite der letzten Formel ist aber wegen

$$r^2 = (\xi - x, \xi - x) = R^2 + \varrho^2 - 2(\xi, x) = R^2 + \varrho^2 - 2\, x_k\, \xi_k$$

gleich Null.

3. Es gilt die Formel

$$\frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m}\, d_\xi S_R = 1\,, \quad \varrho < R\,. \tag{10}$$

Beweis. Gesucht sei eine Funktion, die in der Kugel harmonisch ist und auf der Kugeloberfläche den Wert 1 annimmt. Auf Grund des Unitätssatzes ist die Lösung dieses Dirichletschen Problems überall gleich 1. Da offenbar $1 \in C^{(2)}(\overline{D}_R)$ ist, so gilt für diese Funktion die Poissonsche Formel, welche im vorliegenden Fall mit Formel (10) übereinstimmt.

Wir beweisen jetzt folgende Behauptung: *Wenn die Funktion $\varphi(x)$ auf der Sphäre S_R stetig ist, dann liefert die* Poisson*sche Formel eine in der Kugel D_R harmonische Funktion, welche in einem beliebigen Punkt x_0 der Sphäre S_R den Grenzwert $\varphi(x_0)$ besitzt.*

Es sei $u(x)$ die durch die POISSONsche Formel (9) im Inneren der Kugel D_R definierte Funktion des Punktes x. Diese Funktion ist offenbar im Inneren der Kugel stetig und besitzt die Ableitungen sämtlicher Ordnungen. Wie man leicht sieht, ist diese Funktion auch harmonisch:

$$\Delta u = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} \varphi(\xi)\, \Delta_x \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m}\, d_\xi S_R = 0 .$$

Der Punkt x strebe jetzt aus dem Inneren der Sphäre S_R gegen den auf dieser Sphäre liegenden Punkt x_0. Subtrahiert man von der Formel (9) die auf beiden Seiten mit $\varphi(x_0)$ multiplizierte Formel (10), dann ergibt sich

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m}\, d_\xi S_R . \tag{11}$$

Die Funktion $\varphi(x)$ ist auf der Sphäre S_R stetig; wir wählen auf S_R eine Kugelumgebung σ des Punktes x_0 derart, daß gilt

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon , \qquad \forall \xi \in \sigma;$$

dabei ist ε eine beliebig vorgegebene positive Zahl. Wir bemerken, daß in $S_R \setminus \sigma$ die Ungleichung

$$|\xi - x_0| \geqq \delta$$

erfüllt ist, wobei δ den Radius der Umgebung σ bezeichnet.

Um die Differenz $u(x) - \varphi(x_0)$ abzuschätzen, spalten wir das Integral (11) in zwei Integrale über σ und über $S_R \setminus \sigma$ auf:

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{|S_R|} \int_{\sigma} \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, d_\xi S_R + $$
$$+ \frac{1}{|S_1|} \int_{S_R \setminus \sigma} \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, d_\xi S_R .$$

Für das erste Integral ergibt sich

$$\frac{1}{|S_1|} \left| \int_{\sigma} \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, d_\xi S_R \right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2\,|S_1|} \int_{\sigma} \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m}\, d_\xi S_R < \frac{\varepsilon}{2\,|S_1|} \int_{S_R} \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m}\, d_\xi S_R = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Damit haben wir für das erste Integral eine Abschätzung erhalten, die von x unabhängig ist. Das zweite Integral läßt sich durch die Wahl des Abstandes zwischen den Punkten x und x_0 beliebig klein machen. Wir wählen diesen Abstand derart, daß die Ungleichung $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ erfüllt ist. Dann gilt

$$r = |\xi - x| = |(\xi - x_0) + (x_0 - x)| \geqq |\xi - x_0| - |x_0 - x| \geqq \frac{\delta}{2} ,$$

woraus sich

$$\frac{1}{r} < \frac{2}{\delta}$$

ergibt. Somit ist

$$\frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m} = \frac{(R + \varrho)\,(R - \varrho)}{R\, r^m} < \frac{2^{m+1}\,(R - \varrho)}{\delta^m}\,.$$

Die Funktion φ ist auf der abgeschlossenen, beschränkten Menge S_R stetig und somit beschränkt. Es sei $|\varphi(\xi)| \leqq M = \text{const}$, dann gilt $|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| \leqq \leqq 2\,M$. Jetzt erhalten wir

$$|u(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2^{m+2}\,M\,(R - \varrho)}{\delta^m}\,\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R \setminus \sigma} dS_R < $$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2^{m+2}\,M\,R^{m-1}\,(R - \varrho)}{\delta^m}\,.$$

Wir wählen die Zahl $h > 0$ derart, daß

$$\frac{2^{m+2}\,M\,R^{m-1}\,h}{\delta^m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Wenn dann $|x_0 - x| < h$ gilt, so ergibt sich $R - \varrho = |x_0| - |x| \leqq |x_0 - x| < < h$ und $|u(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Daraus folgt

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0)\,, \qquad \forall x_0 \in S_R\,. \tag{12}$$

Die durch die POISSONsche Formel (9) in der offenen Kugel definierte Funktion $u(x)$ setzen wir jetzt mit Hilfe der Gleichung $u(x) = \varphi(x)$, $x \in S_R$, auf die Kugeloberfläche S_R fort. Die so fortgesetzte Funktion ist harmonisch in der offenen Kugel, stetig in der abgeschlossenen Kugel, auf Grund der Beziehung (12), und erfüllt die Randbedingung (4). Damit ist das DIRICHLETsche Problem für die Kugel gelöst.

Die Formel (2), wie auch der gesamte obige Beweis, verlangt, daß $m > 2$ ist. Die POISSONsche Formel gilt allerdings auch für den Fall $m = 2$. In diesem Fall läßt sich die Formel gewinnen, indem man von der Integraldarstellung (4.2) ausgeht. Ein anderer Beweis der POISSONschen Formel im Fall $m = 2$ wird im § 1 des Kap. 13 gegeben.

§ 4. Der Satz von LIOUVILLE

Satz 12.4.1 (Satz von LIOUVILLE). *Eine Funktion, die in einem beliebigen endlichen Gebiet harmonisch und die von oben oder von unten beschränkt ist, ist eine Konstante.*

Beweis. Wenn die Funktion $u(x)$ harmonisch ist und $u(x) \leqq M$, $M = \text{const}$ gilt, dann ist die Funktion $-u(x)$ ebenfalls harmonisch, und es gilt $-u(x) \geqq -M$. Folglich genügt es, den Fall einer harmonischen und von unten beschränkten Funktion $u(x)$ zu betrachten; es sei also $u(x) \geqq \mu = \text{const}$. Dabei kann $\mu > 0$

angenommen werden — anderenfalls könnte dies durch Addition einer hinreichend großen positiven Konstanten zur Funktion $u(x)$ erreicht werden.

Wir halten einen beliebigen Punkt x fest und beschreiben um den Koordinatenursprung eine Kugel D_R von hinreichend großem Radius R derart, daß der Punkt x innerhalb der Kugel liegt. Die gegebene Funktion $u(x)$ ist in einem beliebigen endlichen Gebiet, also auch in der Kugel D_R, harmonisch, und für sie gilt die POISSONsche Formel

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - \varrho^2}{R\, r^m} u(\xi)\, d_\xi S_R ,$$

wobei S_R die Kugeloberfläche bezeichnet.

Wie man leicht sieht, gilt $R - \varrho \leqq r \leqq R + \varrho$, und da die Funktion $u(x)$ positiv ist, so ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\frac{R - \varrho}{R(R + \varrho)^{m-1}} \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, dS_R \leqq u(x) \leqq \frac{R + \varrho}{R(R - \varrho)^{m-1}} \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, dS_R . \qquad (1)$$

Nach dem Mittelwertsatz ist

$$u(0) = \frac{1}{|S_1|\, R^{m-1}} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, dS_R ,$$

so daß die Ungleichung (1) die Gestalt

$$\frac{(R - \varrho)\, R^{m-2}}{(R + \varrho)^{m-1}} u(0) \leqq u(x) \leqq \frac{(R + \varrho)\, R^{m-2}}{(R - \varrho)^{m-1}} u(0)$$

annimmt. Indem wir hierbei R gegen Unendlich streben lassen, gelangen wir zu der Ungleichung

$$u(0) \leqq u(x) \leqq u(0) .$$

Daraus folgt nun $u(x) = u(0)$. Der Satz ist damit bewiesen.

§ 5. Das DIRICHLETsche Problem für das Außengebiet der Kugel

Es sei Ω das Außengebiet einer Kugel vom Radius R mit dem Rand S_R. Gesucht werde eine Funktion $u(x)$, die in Ω harmonisch ist und der Randbedingung

$$u|_{S_R} = \varphi(x) \qquad (1)$$

genügt. Wir beweisen, daß sich die Lösung dieses Problems durch die POISSONsche *Formel*

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{\varrho^2 - R^2}{R\, r^m} \varphi(\xi)\, d_\xi S_R , \qquad \varrho > R \qquad (2)$$

darstellen läßt; wie im § 3 ist dabei $r = |\xi - x|$ und $\varrho = |x|$.

Genauso wie im § 3 beweist man, daß die durch die Formel (2) definierte Funktion $u(x)$ außerhalb der Sphäre S_R stetige Ableitungen sämtlicher Ordnungen besitzt und der Laplace-Gleichung genügt. Wir untersuchen jetzt das Verhalten dieser Funktion im Unendlichen. Da offenbar $r \geqq \varrho - R$ ist, so gilt

$$|u(x)| \leqq c\,\frac{\varrho + R}{(\varrho - R)^{m-1}}\,; \qquad c = \frac{1}{|S_1|\,R}\int_{S_R} |\varphi(\xi)|\,dS_R\,.$$

Da nur hinreichend große Werte ϱ interessieren, so kann man $\varrho > 2\,R$ annehmen. Dann gilt $R < \frac{1}{2}\varrho$, $\varrho - R > \frac{1}{2}\varrho$, und es ergibt sich jetzt

$$|u(x)| < \frac{2^m\,c}{\varrho^{m-2}}\,.$$

Somit ist die Funktion $u(x)$ außerhalb der Kugel harmonisch.

Es bleibt noch die Grenzbeziehung

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0)\,, \qquad \forall x_0 \in S_R \tag{3}$$

zu beweisen. Zu diesem Zweck berechnen wir das Integral (2) für $\varphi(\xi) = 1$.

Wir führen den zum Punkt x in bezug auf die Sphäre S_R symmetrischen Punkt x' ein und setzen $\varrho = |x|$, $\varrho' = |x'|$, $r' = |\varrho - x'|$. Dann gilt

$$\varrho^2 = \frac{R^4}{\varrho'^2}\,, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r'}\cdot\frac{R}{\varrho}\,,$$

und der Poissonsche Kern läßt sich auf die Gestalt

$$\frac{\varrho^2 - R^2}{R\,r^m} = \frac{R^{m-2}}{\varrho^{m-2}}\cdot\frac{R^2 - \varrho'^2}{R\,r'^m}$$

bringen. Da der Punkt x' innerhalb der Sphäre S_R liegt, so gilt nach Formel (3.10)

$$\frac{1}{|S_1|}\int_{S_R} \frac{\varrho^2 - R^2}{R\,r^m}\,dS_R = \frac{R^{m-2}}{\varrho^{m-2}}\,\frac{1}{|S_1|}\int_{S_R} \frac{R^2 - \varrho'^2}{R\,r'^m}\,dS_R = \frac{R^{m-2}}{\varrho^{m-2}}\,. \tag{4}$$

Wir subtrahieren jetzt die mit $\varphi(x_0)$ multiplizierte Gleichung (4) von der Poissonschen Formel (2); dies ergibt

$$u(x) - \frac{R^{m-2}}{\varrho^{m-2}}\,\varphi(x_0) = \frac{1}{|S_1|}\int_{S_R} \frac{\varrho^2 - R^2}{R\,r^m}\,[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\,dS_R\,.$$

Indem man die Überlegungen aus dem § 3 wortwörtlich wiederholt, erhält man

$$\lim_{x \to x_0}\left[u(x) - \frac{R^{m-2}}{\varrho^{m-2}}\,\varphi(x_0)\right] = 0\,.$$

Daraus ergibt sich nun

$$|u(x) - \varphi(x_0)| \leqq \left|u(x) - \frac{R^{m-2}}{\varrho^{m-2}}\,\varphi(x_0)\right| + |\varphi(x_0)|\left(1 - \frac{R^{m-2}}{\varrho^{m-2}}\right) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0\,,$$

womit die Beziehung (3) bewiesen ist.

§ 6. Das Verhalten der Ableitungen einer harmonischen Funktion im Unendlichen

Satz 12.6.1. *Es sei $u(x)$ eine Funktion, die im unendlichen Gebiet Ω mit dem endlichen Rand Γ harmonisch ist, und $D^k u$ sei eine beliebige Ableitung k-ter Ordnung der Funktion u. Dann gilt für hinreichend große $|x|$ die Ungleichung*

$$|D^k u| \leqq \frac{C_k}{|x|^{m-2+k}}, \tag{1}$$

wobei C_k nicht von x abhängt.

Beweis. Wir beweisen den Satz für den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall läßt sich analog betrachten.

Da der Rand Γ endlich ist, so läßt sich eine Sphäre S_R von hinreichend großem Radius R finden derart, daß Γ ganz im Inneren dieser Sphäre liegt. Dann gilt für die Funktion $u(x)$ außerhalb der Sphäre S_R die POISSONsche Formel:

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{\varrho^2 - R^2}{R\, r^m}\, u(\xi)\, d_\xi S_R\,, \qquad \varrho = |x|\,.$$

Wir betrachten irgendeine Ableitung erster Ordnung, z. B. die Ableitung nach x_1:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\varrho^2 - R^2}{R\, r^m}\, d_\xi S_R\,. \tag{2}$$

Für die Ableitung unter dem Integral ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\varrho^2 - R^2}{R\, r^m} = 2\,\varrho\, \frac{\partial \varrho}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{R\, r^m} - \frac{m\,(\varrho^2 - R^2)}{R\, r^{m+1}}\, \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{2\,x_1}{R\, r^m} - \frac{m\,(\varrho^2 - R^2)}{R\, r^{m+1}} \cdot \frac{x_1 - \xi_1}{r}\,.$$

Es sei jetzt ϱ hinreichend groß, z. B. gelte $\varrho > 2\,R$. Dann ist $r > \varrho - R > \frac{1}{2}\,\varrho$, und wir erhalten für den Kern des Integrals (2) folgende Abschätzung:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\varrho^2 - R^2}{R\, r^m} \right| \leqq \frac{2^{m+1}}{R\, \varrho^{m-1}} + \frac{2^{m+1}\, m}{R\, \varrho^{m-1}} = \frac{C_1}{\varrho^{m-1}}\,.$$

Der Satz ist damit bewiesen.

Wir bemerken noch, daß sich im Falle $m = 2$ für die Ableitungen eine Abschätzung gewinnen läßt, in der die Ordnung von $1/|x|$ um Eins größer ist als in der Formel (1).

§ 7. Der Unitätssatz für das äußere NEUMANNsche Problem

Satz 12.7.1. *Im Falle $m > 2$ besitzt das äußere* NEUMANN*sche Problem für die* LAPLACE-*Gleichung höchstens eine Lösung.*

Beweis. Wir beweisen den Satz unter der Annahme, daß der Rand des betrachteten Gebietes regulär ist.

Es sei also Ω ein unendliches Gebiet mit einem regulären Rand Γ, in diesem Gebiet besitze das NEUMANNsche Problem zwei Lösungen; ihre Differenz $v(x)$ genügt dann den Beziehungen

$$\Delta v = 0\,, \quad x \in \Omega\,; \quad v(x) = O\left(|x|^{-m+2}\right), \quad x \to \infty\,; \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0\,. \tag{2}$$

Wir betrachten die Fläche Γ_h, die zur Fläche Γ parallel ist und im Inneren von Ω liegt (Abb. 22). Des weiteren konstruieren wir eine Sphäre S_R mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und von hinreichend großem Radius R derart, daß die gesamte Fläche Γ_h innerhalb von S_R liegt. Mit $\Omega_R^{(h)}$ bezeichnen wir das durch die Flächen Γ_h und S_R begrenzte Gebiet und mit Ω_R das Gebiet, welches durch die Flächen Γ und S_R berandet wird.

Abb. 22

Das Gebiet $\Omega_R^{(h)}$ ist endlich, und es gilt $v \in C^{(2)}(\overline{\Omega_R^{(h)}})$. Folglich ist die GREENsche Formel (6.8) aus Kap. 10 anwendbar:

$$\int_{\Omega_R^{(h)}} v\,\Delta v\,dx = -\int_{\Omega_R^{(h)}} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx + \int_{\Gamma_h} v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Gamma_h + \int_{S_R} v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS_R\,.$$

Indem man hier für $h \to 0$ zum Grenzwert übergeht, gelangt man unter Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2) zu der Beziehung

$$\int_{\Omega_R} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx = \int_{S_R} v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS_R\,. \tag{3}$$

Jetzt gehen wir mit R gegen Unendlich. Die Beziehungen (1) zeigen, daß die Funktion $v(x)$ in Ω harmonisch ist und für hinreichend große R die Ungleichung

$$|v(x)|_{|x|=R} \leqq \frac{C}{R^{m-2}}\,, \qquad C = \text{const}$$

erfüllt ist. Des weiteren gilt auf Grund der Ungleichung (6.1)

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{|x|=R} \leqq \frac{C_1}{R^{m-1}}\,, \qquad C_1 = \text{const}\,,$$

und für die rechte Seite der Formel (3) ergibt sich somit die Abschätzung

$$\left|\int_{S_R} v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS_R\right| \leqq \frac{C\,C_1\,|S_R|}{R^{2m-3}} = \frac{C\,C_1\,|S_1|}{R^{m-2}}\,.$$

Da nach Voraussetzung $m > 2$ ist, so ergibt sich

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS_R \leqq \lim_{R\to\infty} \frac{C\,C_1\,|S_1|}{R^{m-2}} = 0\,,$$

daraus folgt nun trivialerweise

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} \equiv 0\,, \qquad v \equiv \text{const}\,.$$

Berücksichtigten wir schließlich, daß $v(x)$ im Unendlichen verschwindet, so erhalten wir $v(x) \equiv 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Es sei jetzt $m = 2$. Im § 6 bemerkten wir, daß in diesem Spezialfall die ersten Ableitungen im Unendlichen schneller gegen Null konvergieren als im allgemeinen Fall. Unter Verwendung dieser Tatsache erhält man leicht die Gleichung

$$v \equiv \text{const} .$$

Gleichzeitig ergibt auch die Forderung $|v(x)| \leqq \frac{C}{|x|^{m-2}}$ im vorliegenden Fall nur die Beschränktheit der Funktion v im Unendlichen. Daraus folgt, daß im Falle $m = 2$ die Eindeutigkeit der Lösung des äußeren NEUMANNschen Problems für die LAPLACE-Gleichung nur bis auf einen konstanten Summanden garantiert ist.

KAPITEL 13

ELEMENTARLÖSUNGEN DER DIRICHLETSCHEN UND NEUMANNSCHEN PROBLEME

§ 1. Die DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme für den Kreis

In diesem und den nächstfolgenden Paragraphen wird die homogene LAPLACE-Gleichung in der zweidimensionalen Ebene betrachtet. Im Unterschied zu den in den übrigen Kapiteln dieses Buches benutzten Bezeichnungen werden wir hier die cartesischen Koordinaten des variablen Punktes mit x und y bzw. mit ξ und η bezeichnen; die Punkte selbst werden entsprechend mit (x, y) bzw. (ξ, η) bezeichnet. Gelegentlich werden wir auch von den Bezeichnungen $z = x + i\,y$, $\zeta = \xi + i\,\eta$ mit $i = \sqrt{-1}$ Gebrauch machen.

Wie hinreichend bekannt ist, besteht zwischen den harmonischen und den analytischen Funktionen die folgende Beziehung: Wenn die Funktion $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ in einem gewissen Gebiet holomorph ist, dann sind ihr Realteil $u(x, y)$ und ihr Imaginärteil $v(x, y)$ in demselben Gebiet harmonische Funktionen. Wenn umgekehrt die reelle Funktion $u(x, y)$ in einem *einfach zusammenhängenden* Gebiet harmonisch ist, dann läßt sich eine in demselben Gebiet harmonische Funktion $v(x, y)$ finden (sie wird die zu $u(x, y)$ *konjugiert-harmonische* Funktion genannt) derart, daß die Summe $u(x, y) + i\,v(x, y)$ in dem genannten Gebiet eine holomorphe Funktion von z darstellt. Wenn das Gebiet mehrfach zusammenhängend ist, dann ist die oben angegebene Summe im allgemeinen eine mehrdeutige Funktion.

Für jede natürliche Zahl n ist z^n eine in einem beliebigen endlichen Gebiet harmonische Funktion; ist dagegen n eine negative ganze Zahl, dann ist die Funktion z^n harmonisch in einem beliebigen Gebiet, welches nicht den Koordinatenursprung enthält. Daraus folgt, daß die Polynome

$$\operatorname{Re}(z^n)\,, \quad \operatorname{Im}(z^n)\,, \quad n \geqq 0 \tag{1}$$

in einem beliebigen endlichen Gebiet und die rationalen Ausdrücke

$$\operatorname{Re}(z^{-n})\,, \quad \operatorname{Im}(z^{-n})\,, \quad n \geqq 1 \tag{2}$$

in jedem Gebiet, welches den Koordinatenursprung nicht enthält, harmonisch sind.

Wir führen die Polarkoordinaten ϱ und θ mit dem Pol im Koordinatenursprung ein. Dann gilt $z = \varrho\, e^{i\theta}$, und die Funktionen (1) und (2) nehmen entsprechend die Gestalt

$$\varrho^n \cos n\,\theta\,, \quad \varrho^n \sin n\,\theta\,, \quad n \geqq 0 \tag{1'}$$

bzw.

$$\frac{\cos n\,\theta}{\varrho^n}, \qquad -\frac{\sin n\,\theta}{\varrho^n}, \qquad n \geqq 1 \tag{2'}$$

an.

1. Wir formulieren das DIRICHLETsche Problem für den Kreis. Gesucht sei eine Funktion $u(x, y)$, welche im Kreis $|z| < R$ harmonisch ist und auf dem Rande dieses Kreises mit einer vorgegebenen stetigen Funktion $\varphi(\theta)$ übereinstimmt:

$$u|_{\varrho=R} = \varphi(\theta)\,. \tag{3}$$

Wir nehmen an, die Funktion $\varphi(\theta)$ lasse sich in eine FOURIER-Reihe entwickeln, welche für alle θ konvergiert. Es sei

$$\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,\theta + b_n \sin n\,\theta)\,. \tag{4}$$

Dann läßt sich leicht eine formale Lösung des betrachteten Problems angeben:

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{R^n} (a_n \cos n\,\theta + b_n \sin n\,\theta)\,. \tag{5}$$

Die Reihe (5) konvergiert im Kreis $|z| < R$, und ihre Summe stellt eine in diesem Kreis harmonische Funktion dar (man beweise dies!). Wenn nun in dieser Reihe der gliedweise Grenzübergang für $\varrho \to R$ möglich ist, dann ergibt sich

$$u(x, y)|_{\varrho=R} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,\theta + b_n \sin n\,\theta) = \varphi(\theta)\,,$$

und die durch die Formel (5) definierte Funktion $u(x, y)$ ist tatsächlich eine Lösung des Problems.

Nach einem bekannten Satz von ABEL ist ein derartiger Grenzübergang für diejenigen Werte θ möglich, für die die Reihe (4) konvergiert. Diese Reihe konvergiert gegen $\varphi(\theta)$ für alle θ, wenn z. B. die Funktion $\varphi(\theta)$ eine $2\,\pi$-periodische und absolut stetige Funktion ist und eine Ableitung $\varphi'(\theta) \in L_2(0, 2\,\pi)$ besitzt. Für derartige Randfunktionen liefert die Reihe (5) tatsächlich eine Lösung des DIRICHLETschen Problems.

Wir bestimmen jetzt die Summe der Reihe (5). Auf Grund bekannter Formeln gilt für die FOURIER-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\, d\omega\,, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \cos n\,\omega\, d\omega\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \sin n\,\omega\, d\omega\,.$$

Durch Einsetzen in die Reihe (5) erhalten wir

$$u(x, y) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{R^n} \cos n\,(\omega - \theta)\right] d\omega\,.$$

Die hierbei vorgenommene Änderung der Reihenfolge von Summation und Integration ist, wie man leicht beweist, für $\varrho < R$ möglich.

Es gilt $\varrho e^{i\theta} = z$. Setzen wir schließlich $Re^{i\omega} = \zeta$, dann ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{R^n} \cos n\,(\omega - \theta) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^n} = \operatorname{Re} \frac{z}{\zeta - z}$$

und somit

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\omega = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R} \varphi(\omega) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Die letzte Formel ist allgemein unter der Bezeichnung Schwarz*sche Formel* bekannt.

Des weiteren gilt

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \operatorname{Re} \frac{(\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - \varrho^2}{r^2}, \qquad r = |\zeta - z|,$$

und mithin

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \varrho^2}{r^2} \varphi(\omega)\, d\omega\,. \tag{6}$$

Dies ist die Poissonsche Formel für den Kreis. Wie man leicht sieht, gilt $r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2\,R\,\varrho \cos(\omega - \theta)$, und wir gelangen schließlich zu der üblichen Gestalt der Poissonschen Formel:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 + \varrho^2 - 2\,R\,\varrho \cos(\omega - \theta)} \varphi(\omega)\, d\omega\,.$$

2. Die Lösung des Dirichletschen Problems für das Außengebiet des Kreises $|z| > R$ wird durch die Reihe

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{\varrho^n} (a_n \cos n\,\theta + b_n \sin n\,\theta) \tag{5_1}$$

dargestellt.

Man kann nun die Summe der Reihe (5_1) bestimmen und erhält somit die Poissonsche Formel für das Außengebiet des Kreises:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 - R^2}{r^2} \varphi(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 - R^2}{R^2 + \varrho^2 - 2\,R\,\varrho \cos(\omega - \theta)} \varphi(\omega)\, d\omega\,. \tag{6_1}$$

3. Das Neumannsche Problem für den Kreis $|z| < R$ mit der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\varrho = R} = \psi(\theta) \tag{7}$$

läßt sich wie folgt lösen. Wir entwickeln die Funktion $\psi(\theta)$ in eine FOURIER-Reihe:

$$\psi(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\,\theta + \beta_n \sin n\,\theta)\,.$$

Wenn aber eine Lösung $u(x, y)$ existiert, dann gilt auf Grund der Formel (2.7) des Kapitels 12:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \psi\,(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\,\pi\,R} \int_{\varrho=R} \psi(\theta)\,d\Gamma = \frac{1}{2\,\pi\,R} \int_{\varrho=R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma = 0\,; \tag{8}$$

dabei bedeutet $d\Gamma$ das Bogenelement des Kreises $|z| = R$, d.h. $d\Gamma = R\,d\theta$. Somit ergibt sich

$$\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\,\theta + \beta_n \sin n\,\theta)\,. \tag{9}$$

Unter Berücksichtigung der für den Kreis $\varrho = |z| = R$ gültigen Formel

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \varrho}\bigg|_{\varrho=R}$$

läßt sich jetzt eine formale Lösung des NEUMANNschen Problems in der folgenden Gestalt angeben:

$$u(x, y) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n\,R^{n-1}} (\alpha_n \cos n\,\theta + \beta_n \sin n\,\theta)\,; \tag{10}$$

dabei ist C eine willkürliche Konstante. Wenn die Funktion $\psi(\theta)$ z. B. den oben an die Funktion $\varphi(\theta)$ gestellten Bedingungen genügt, dann konvergiert die Reihe (10) in dem abgeschlossenen Kreis $|z| \leqq R$ und ist hier gliedweise differenzierbar; außerdem muß natürlich die Funktion $\psi(\theta)$ die Gleichung (8) erfüllen. Unter diesen Bedingungen liefert die Reihe (10) die Lösung des NEUMANNschen Problems für den Kreis $|z| < R$.

4. Wenn die Funktion $\psi(\theta)$ den soeben formulierten Bedingungen genügt, dann läßt sich die Lösung des NEUMANNschen Problems für das Außengebiet des Kreises $|z| > R$ mit derselben Randbedingung (7) in der Form

$$u(x, y) = C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{n\,\varrho^n} (\alpha_n \cos n\,\theta + \beta_n \sin n\,\theta) \tag{11}$$

darstellen, wobei wiederum C eine beliebige Konstante ist.

5. Die Summe der Reihe (10) läßt sich leicht bestimmen. Auf Grund der Formeln für die FOURIER-Koeffizienten gilt

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \cos n\,\omega\,d\omega\,, \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \sin n\,\omega\,d\omega\,.$$

Durch Einsetzen in (10) und Änderung der Reihenfolge von Summation und Integration (die Vertauschbarkeit läßt sich leicht beweisen) ergibt sich

$$u(x, y) = C + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n R^{n-1}} \cos n(\omega - \theta)\, d\omega =$$

$$= C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Re}\left\{\frac{\varrho^n}{R^n} e^{in(\theta-\omega)}\right\} d\omega =$$

$$= C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \zeta^n} d\omega\,; \qquad \zeta = R e^{i\omega}.$$

Unter Berücksichtigung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}, \qquad |t| < 1,$$

und $\operatorname{Re} \ln \tau = \ln |\tau|$ erhalten wir schließlich

$$u(x, y) = C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{R}{r} \psi(\omega)\, d\omega = C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\varrho} \psi(\omega)\, d\omega\,. \tag{12}$$

Die Formel (12) heißt DINI*sche Formel.*

Analog läßt sich die Summe der Reihe (11) berechnen.

§ 2. Das Dirichletsche Problem für das Kreisringgebiet

Das Ringgebiet werde durch die Ungleichungen $R_0 < \varrho < R_1$ mit $\varrho = |z|$ definiert. Die Werte der Randfunktion auf den Kreisperipherien $\varrho = R_0$ und $\varrho = R_1$ bezeichnen wir entsprechend mit $\varphi_0(\theta)$ und $\varphi_1(\theta)$. Dann lassen sich die Randbedingungen für die gesuchte harmonische Funktion $u(x, y)$ in folgender Form schreiben:

$$u|_{\varrho=R_0} = \varphi_0(\theta)\,, \qquad u|_{\varrho=R_1} = \varphi_1(\theta)\,. \tag{1}$$

Die harmonische Funktion $u(x, y)$ stellt den Realteil einer gewissen analytischen Funktion $f(z)$ dar:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)\,.$$

Da das Kreisringgebiet ein zweifach zusammenhängendes Gebiet ist, so ist die Funktion $f(z)$ im allgemeinen nicht holomorph. Es läßt sich beweisen, daß

$$f(z) = C \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$$

mit einer gewissen reellen Konstanten C gilt. Indem man

$$C_n = A_n - i B_n$$

setzt, wird ersichtlich, daß sich die Funktion $u(x, y)$ in folgender Form darstellen läßt:

$$u(x, y) = C \ln \varrho + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \varrho^n + A_{-n} \varrho^{-n}) \cos n\theta + \\ + (B_n \varrho^n - B_{-n} \varrho^{-n}) \sin n\theta\} . \tag{2}$$

Die Funktionen $\varphi_0(\theta)$ und $\varphi_1(\theta)$ entwickeln wir in FOURIER-Reihen; es sei

$$\begin{aligned} \varphi_0(\theta) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) , \\ \varphi_1(\theta) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) . \end{aligned} \tag{3}$$

Indem wir die Entwicklungen (2) und (3) in die Randbedingung (1) einsetzen und die Koeffizienten bei $\cos n\theta$ und $\sin n\theta$ vergleichen, gelangen wir zu einer Folge algebraischer Systeme zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} C \ln R_0 + A_0 &= a_0 , & C \ln R_1 + A_0 &= \alpha_0 ; \\ A_n R_0^n + A_{-n} R_0^{-n} &= a_n , & A_n R_1^n + A_{-n} R_1^{-n} &= \alpha_n ; \\ B_n R_0^n - B_{-n} R_0^{-n} &= b_n , & B_n R_1^n - B_{-n} R_1^{-n} &= \beta_n . \end{aligned}$$

Da die Determinanten dieser Systeme von Null verschieden sind, so lassen sich alle Koeffizienten der Entwicklung (2) bestimmen. Damit ist die formale Lösung des Problems konstruiert. Die genaue Begründung dieser Lösung überlassen wir dem Leser.

Mit derselben Methode läßt sich auch das NEUMANNsche Problem für das Kreisringgebiet lösen.

§ 3. Anwendung der konformen Abbildungen

Die holomorphe Funktion $z = z(\zeta) = x(\xi, \eta) + i\, y(\xi, \eta)$ bilde das Gebiet D der ζ-Ebene konform auf das Gebiet Ω der z-Ebene ab. Des weiteren sei $u(x, y)$ eine in Ω harmonische Funktion. Dann ist die durch sie definierte Funktion $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ harmonisch in D.

Um diese Behauptung zu beweisen, berechnen wir die Größe

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} .$$

Es ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

und

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} .$$

Analog erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} .$$

Jetzt addieren wir die letzten Gleichungen. Dabei werden wir berücksichtigen, daß $x(\xi, \eta)$ und $y(\xi, \eta)$ entsprechend den Realteil bzw. den Imaginärteil der holomorphen Funktion $z(\zeta)$ darstellen; folglich sind x und y harmonische Funktionen von ξ und η, welche den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen genügen. Somit gelten die Beziehungen

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \Delta_\zeta x = \Delta_\zeta y = 0 .$$

Jetzt ergibt sich

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right] \Delta_z u = |z'(\zeta)|^2 \, \Delta_z u ;$$

dabei bedeutet

$$\Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Wenn $\Delta_z u = 0$ ist, dann gilt offenbar $\Delta_\zeta \tilde{u} = 0$, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Dieses Ergebnis läßt sich einfacher so formulieren: Eine konforme Abbildung überführt eine harmonische Funktion wieder in eine harmonische Funktion. Es erweist sich nun, daß die konforme Abbildung auch jedes DIRICHLETsche Problem in ein DIRICHLETsches Problem und jedes NEUMANNsche Problem wieder in ein NEUMANNsches Problem überführt.

In der Tat, es sei im Gebiet Ω folgendes DIRICHLETsche Problem gestellt:

$$\Delta u = 0 , \qquad u|_\Gamma = \varphi(s) . \tag{1}$$

Dabei sei Γ die Randkurve des Gebietes Ω und s der Parameter, der die Lage des Punktes auf Γ festlegt.

Die Funktion $z(\zeta)$, welche die konforme Abbildung des Gebietes D auf das Gebiet Ω herstellt, sei im abgeschlossenen Gebiet[1]) $\bar{D} = D \cup \Gamma_1$ stetig; dabei bedeutet Γ_1 die Randkurve des Gebietes D. Da, wie wir bereits gesehen haben, die konforme Abbildung die LAPLACE-Gleichung invariant läßt, so genügt die transformierte Funktion $\tilde{u}$ der Gleichung

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = 0. \tag{2}$$

Da bekanntlich bei einer konformen Abbildung zwischen den Randkurven eine eineindeutige Beziehung besteht, so kann derselbe Parameter s auch als Kurvenparameter für Γ_1 dienen. Dann ändert sich aber die Randbedingung (1) bei einer konformen Abbildung nicht, und wir erhalten

$$u|_{\Gamma_1} = \varphi(s) . \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) zeigen, daß die transformierte Funktion $\tilde{u}$ eine Lösung des DIRICHLETschen Problems für das Gebiet D ist.

Wir wenden uns jetzt dem NEUMANNschen Problem zu. Bekanntlich bleibt die Ableitung $z'(\zeta)$ auch auf regulären[2]) Kurvenstücken stetig. Des weiteren

---

[1]) Dafür ist notwendig und hinreichend, daß das Gebiet D durch eine JORDAN-Kurve begrenzt wird.

[2]) Wegen der Definition des regulären Randes siehe S. 213.

genügt die transformierte Funktion wiederum der Gleichung (2); es bleibt noch zu klären, welcher Randbedingung diese Funktion genügt.

Die Funktion $u(x, y)$ genüge der Randbedingung des NEUMANNschen Problems

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = \psi(s) . \tag{4}$$

Wir bezeichnen mit ν_1 die Normale zur Kurve Γ_1 in dem Punkt, der dem Parameterwert s entspricht. Bei einer konformen Abbildung geht die Randkurve wieder in die Randkurve und folglich auch die Tangentenrichtung wieder in die Tangentenrichtung über; da dabei die Winkel erhalten bleiben, geht die Normalenrichtung ν in die Normalenrichtung ν_1 über. Wir erläutern die letzte Behauptung. Es seien z und ζ die bei der konformen Abbildung einander entsprechenden Punkte der Randkurven Γ und Γ_1. Wenn man im Gebiet Ω die Normale ν errichtet, welche die Randkurve Γ im Punkt z schneidet, dann geht diese Normale bei der konformen Abbildung in eine Kurve über, welche die Normale ν_1 im Punkt ζ berührt (s. Abb. 23). Auf der Normalen ν wählen wir einen Punkt $z_1 = x_1 + i\,y_1$. Diesem entspreche im Gebiet D der Punkt $\zeta_1 = \xi_1 + i\,\eta_1$. Wir setzen $h = |z - z_1|$, $k = |\zeta - \zeta_1|$. Dann gilt

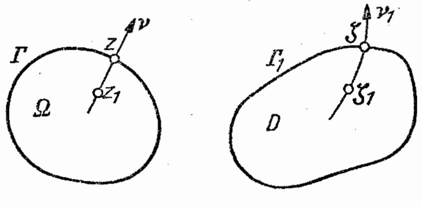


Abb. 23

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lim_{z_1 \to z} \frac{u(x, y) - u(x_1, y_1)}{h} = \lim_{\zeta_1 \to \zeta} \frac{\tilde{u}(\xi, \eta) - \tilde{u}(\xi_1, \eta_1)}{k}\,\frac{k}{h} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_1} \lim_{\zeta_1 \to \zeta} \frac{k}{h} .$$

Da die Abbildung konform ist, so ergibt sich

$$\lim_{\zeta_1 \to \zeta} \frac{k}{h} = \frac{1}{|z'(\zeta)|}$$

und schließlich

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\,|z'(\zeta)| . \tag{5}$$

Wenn also die Funktion u der Randbedingung (4) genügt, dann genügt die transformierte Funktion $\tilde{u}$ der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_1}\right|_{\Gamma_1} = \psi(s)\,|z'(\zeta)| , \tag{6}$$

d.h. wiederum der Randbedingung eines NEUMANNschen Problems.

Die Lösungen der DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme für den Kreis und das Kreisringgebiet sind uns bekannt, sie wurden in den vorangegangenen Paragraphen konstruiert. Aus dem soeben Bewiesenen ergibt sich nun: Wenn die konforme Abbildung eines vorgegebenen Gebietes auf einen Kreis oder auf ein Kreisringgebiet bekannt ist, dann lassen sich für dieses Gebiet

die Lösungen der DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme angeben. Wir wollen jetzt einige solcher Gebiete aufzählen.

1. Die Halbebene läßt sich mittels einer gebrochen-linearen Abbildung auf einen Kreis abbilden.

2. Das Außengebiet der Ellipse läßt sich mittels einer Abbildung der Gestalt

$$z = a\zeta + \frac{b}{\zeta} \tag{7}$$

(a und b sind Konstanten) auf einen Kreis abbilden.

3. Ein Vieleck läßt sich mit Hilfe des SCHWARZ-CHRISTOFFELschen Integrals auf einen Kreis abbilden.

4. Ein von zwei Kreisperipherien berandetes Gebiet läßt sich mittels einer gebrochen-linearen Abbildung auf ein Kreisringgebiet abbilden.

5. Mit Hilfe der Funktion (7) läßt sich ein zwischen zwei konfokalen Ellipsen gelegenes Ringgebiet auf ein Kreisringgebiet abbilden.

Die Aufzählung solcher Beispiele könnte man noch weiter fortsetzen.

§ 4. Die Kugelfunktionen und ihre Eigenschaften

Eine vollständige Darstellung der Theorie sowie der Anwendungen der Kugelfunktionen ist in den Büchern von W. I. SMIRNOW [17], Bd. III, E. W. HOBSON [3] und N. J. WILENKIN [1] zu finden. Wir geben hier die Definition und (ohne Beweis) die einfachsten Eigenschaften der Kugelfunktionen an.

Wir betrachten den m-dimensionalen euklidischen Raum der Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und darin die homogenen Polynome vom Grade n, welche der LAPLACE-Gleichung genügen; dabei ist n eine beliebige nicht negative ganze Zahl. Derartige Polynome sind offenbar in einem beliebigen endlichen Gebiet harmonisch. Die harmonischen, homogenen Polynome lassen sich unschwer konstruieren: Dafür genügt es, ein homogenes Polynom vom vorgegebenen Grade n mit beliebigen Koeffizienten herzunehmen, darauf den LAPLACE-Operator anzuwenden und das Ergebnis gleich Null zu setzen. Dies ergibt einige Beziehungen zwischen den Koeffizienten; die Polynome, deren Koeffizienten diesen Beziehungen genügen, sind dann harmonisch.

Als Beispiel betrachten wir den Fall von drei unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3. Jedes Polynom nullten oder ersten Grades ist offenbar harmonisch. Ein homogenes Polynom zweiten Grades ist im allgemeinen Falle von der Gestalt

$$\sum_{j,k=1}^{3} a_{jk} x_j x_k, \qquad a_{jk} = a_{kj}.$$

Sein LAPLACE-Operator ist gleich $2(a_{11} + a_{22} + a_{33})$. Setzt man ihn gleich Null, dann ergibt sich

$$a_{33} = -(a_{11} + a_{22}).$$

Diese Beziehung liefert uns die allgemeine Form eines harmonischen Polynomes zweiten Grades mit drei unabhängigen Veränderlichen:

$$a_{11}(x_1^2 - x_3^2) + a_{22}(x_2^2 - x_3^2) + 2\,a_{11}\,x_1\,x_2 + 2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3\,.$$

Die letzte Formel zeigt unter anderem, daß es unter den genannten Polynomen fünf linear unabhängige gibt. Dies sind z. B. die Polynome

$$x_1^2 - x_3^2\,, \quad x_1^2 - x_2^2\,, \quad x_1\,x_2\,, \quad x_1\,x_3\,, \quad x_2\,x_3\,.$$

Es existieren genau $2\,n + 1$ linear unabhängige homogene harmonische Polynome n-ten Grades mit drei unabhängigen Veränderlichen. Im allgemeinen Falle von m unabhängigen Veränderlichen ist die Anzahl der linear unabhängigen homogenen harmonischen Polynome n-ten Grades gleich

$$(2\,n + m - 2)\,\frac{(m + n - 3)!}{(m - 2)!\,n!}\,. \tag{1}$$

Die Größe (1) werden wir im weiteren mit $k_{n,m}$ bezeichnen.

Im Falle $m = 2$, $n > 0$ gibt es nur zwei linear unabhängige homogene harmonische Polynome n-ten Grades, und zwar die Polynome $\operatorname{Re}(z^n)$ und $\operatorname{Im}(z^n)$; dabei ist $z = x_1 + i\,x_2$.

Wir gehen jetzt von den cartesischen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ zu den Kugelkoordinaten $\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-2}, \vartheta_{m-1}$ mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos \vartheta_1\,, \\ x_2 &= \varrho \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m-1} &= \varrho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \ldots \sin \vartheta_{m-2} \cos \vartheta_{m-1}\,, \\ x_m &= \varrho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \ldots \sin \vartheta_{m-2} \sin \vartheta_{m-1} \end{aligned} \tag{2}$$

über. Die Kugelkoordinaten variieren in folgenden Grenzen:

$$0 \leqq \varrho < \infty\,; \quad 0 \leqq \vartheta_k \leqq \pi\,, \quad k \leqq m - 2\,; \quad 0 \leqq \vartheta_{m-1} \leqq 2\,\pi\,.$$

Wenn $\varrho = 1$ ist, dann erhalten wir einen Punkt auf der Einheitssphäre, ein solcher Punkt wird durch die Winkelkoordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$ vollständig bestimmt. Umgekehrt definiert die Vorgabe der Winkelkoordinaten eindeutig einen gewissen Punkt auf der Einheitssphäre.

Es sei $P_{n,m}(x)$ ein homogenes harmonisches Polynom n-ten Grades mit den unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Wir substituieren diese mittels der Formeln (2). Da das Polynom homogen und vom Grade n ist, so nimmt es folgende Gestalt an:

$$P_{n,m}(x) = \varrho^n\, Y_{n,m}(\theta)\,. \tag{3}$$

Dabei bedeutet θ den Punkt auf der Einheitssphäre mit den Winkelkoordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$.

Die Funktion $Y_{n,m}(\theta)$ heißt *m-dimensionale Kugelfunktion n-ter Ordnung.* Da im weiteren die Dimension m des Raumes festgehalten wird, so werden wir den Zusatz „*m-dimensional*" in der Bezeichnung der Kugelfunktion weglassen.

Wir zählen jetzt die wichtigsten Eigenschaften der Kugelfunktionen auf. Einige dieser Eigenschaften sind offensichtlich, andere wiederum verlangen einen Beweis, den wir allerdings nicht durchführen.

1. Die Kugelfunktionen sind Polynome der Sinus und Kosinus der Winkelkoordinaten.

2. Es gilt $Y_{0,m}(\theta) = \text{const}$.

3. Kugelfunktionen verschiedener Ordnung sind auf der Einheitssphäre orthogonal:

$$\int_{S_1} Y_{n,m}(\theta)\, Y_{n',m}(\theta)\, dS_1 = 0\,, \qquad n \neq n'\,. \tag{4}$$

4. Für $n \neq 0$ existieren $k_{n,m}$ linear unabhängige Kugelfunktionen n-ter Ordnung. Wir bezeichnen diese Funktionen mit $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$, $k = 1, 2, \ldots, k_{n,m}$. Zum Zwecke der Einheitlichkeit in den Bezeichnungen setzen wir $k_{0,m} = 1$ und schreiben $Y_{0,m}^{(1)}(\theta)$ anstelle $Y_{0,m}(\theta)$.

5. Bei vorgegebenem n lassen sich die Funktionen $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$ orthogonalisieren und normieren. Wir nehmen an, die Orthogonalisierung sei bereits erfolgt. Dann ist

$$Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\;; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots, k_{n,m}$$

ein orthonormales Funktionensystem auf der Einheitssphäre S_1:

$$\int_{S_1} Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\, Y_{n',m}^{(k')}(\theta)\, dS_1 = \begin{cases} 0\,, & n \neq n' \quad \text{oder} \quad k \neq k'\,, \\ 1\,, & n = n' \quad \text{und} \quad k = k'\,. \end{cases} \tag{5}$$

6. Das System der Kugelfunktionen (5) ist im Raum $L_2(S_1)$ vollständig. Daraus folgt, daß sich eine beliebige, auf der Einheitssphäre fast überall definierte und quadratisch summierbare Funktion in eine FOURIER-Reihe nach den Kugelfunktionen entwickeln läßt; diese Reihe konvergiert dann auf der Einheitssphäre S_1 im Mittel gegen die vorgegebene Funktion. Wenn $f(\theta)$ die vorgegebene Funktion ist, dann hat ihre FOURIER-Entwicklung nach dem System der Kugelfunktionen die Gestalt

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)}\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\;; \tag{6}$$

dabei gilt

$$a_n^{(k)} = \int_{S_1} f(\theta)\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\, dS_1\,. \tag{7}$$

7. Im Falle $m = 2$ gibt es zwei orthogonale Kugelfunktionen der Ordnung $n > 0$. Solche Funktionen sind z. B. $\cos n\,\vartheta$ und $\sin n\,\vartheta$, wobei ϑ den Polarwinkel in der zweidimensionalen Ebene bedeutet.

8. Die Funktionen

$$\varrho^n\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\,, \qquad \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta)}{\varrho^{m+n-2}}\,, \qquad n \geqq 0 \tag{8}$$

sind harmonisch, und zwar die erste Funktion in einem beliebigen endlichen Gebiet, die zweite Funktion in einem beliebigen Gebiet, welches den Koordinatenursprung nicht enthält.

§ 5. DIRICHLETsche und NEUMANNsche Probleme, die sich mit Hilfe von Kugelfunktionen lösen lassen

Im vorliegenden Paragraphen konstruieren wir formale Lösungen der betrachteten Probleme in Gestalt von FOURIER-Reihen nach den Kugelfunktionen. Das Wort „formal" bedeutet hierbei, daß wir die Fragen nach der Konvergenz dieser Reihen, der Möglichkeit einer gliedweisen Differentiation oder eines Grenzüberganges und ähnliches nicht untersuchen werden. Wenn die konstruierten Reihen konvergieren und sämtliche mit ihnen ausgeführten Operationen gesetzmäßig sind, dann ist die formale Lösung auch eine Lösung des Problems.

1. Das DIRICHLETsche Problem für die Kugel. Gesucht sei eine Funktion $u(x)$, die in der Kugel $\varrho = |x| < R$ harmonisch ist und auf der Kugeloberfläche $\varrho = R$ mit der vorgegebenen Funktion $\varphi(x)$ übereinstimmt. Da die Größe ϱ auf der Kugeloberfläche $\varrho = R$ einen konstanten Wert annimmt, so wird die Lage des Punktes x allein durch die Vorgabe seiner Winkelkoordinaten bestimmt, d. h. durch die Vorgabe jenes Punktes θ auf der Einheitssphäre, der auf dem durch den Punkt x gehenden Strahl liegt (s. Abb. 24). Letzteres gestattet, $\varphi(x)$ als Funktion des Punktes θ zu betrachten; wir werden deshalb $\varphi(\theta)$ anstelle $\varphi(x)$ schreiben und somit der Randbedingung des DIRICHLETschen Problems die Gestalt

$$u|_{\varrho=R} = \varphi(\theta) \tag{1}$$

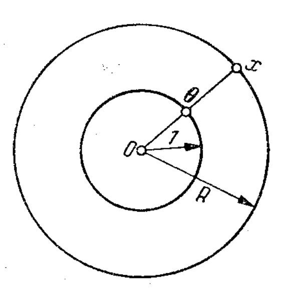


Abb. 24

geben. Die Funktion $\varphi(\theta)$ sei nun in eine FOURIER-Reihe nach den Kugelfunktionen entwickelbar:

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta) . \tag{2}$$

Dann wird die Lösung des DIRICHLETschen Problems für die Kugel $\varrho < R$ durch folgende Reihe dargestellt:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{R^n} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta) . \tag{3}$$

2. Das DIRICHLETsche Problem für das Außengebiet der Kugel. Gesucht sei eine Funktion $u(x)$, die im Gebiet $\varrho = |x| > R$ harmonisch ist und der Randbedingung (1) genügt. Wenn sich die Funktion $\varphi(\theta)$ in die Reihe (2) entwickeln läßt, dann wird die gesuchte Funktion durch die folgende Reihe dargestellt:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+m-2}}{\varrho^{n+m-2}} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta) . \tag{4}$$

3. Das NEUMANNsche Problem für die Kugel. Gesucht sei eine Funktion $u(x)$, die in der Kugel $\varrho < R$ harmonisch ist und der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\varrho=R} = \psi(\theta) \tag{5}$$

genügt. Dabei bedeutet ν die äußere Normale zur Kugeloberfläche $\varrho = R$. Da deren Richtung mit der Richtung des Radiusvektors des Punktes x übereinstimmt, so gilt $\frac{\partial}{\partial \nu} = \left.\frac{\partial}{\partial \varrho}\right|_{\varrho=R}$, und die Bedingung (5) läßt sich somit in der Form

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right|_{\varrho=R} = \psi(\theta) \tag{6}$$

darstellen. Auf Grund der Formel (2.7) des Kap. 12 ist für die Lösbarkeit des NEUMANNschen Problems notwendig, daß gilt

$$\int_{\varrho=R} \psi(\theta)\, dS_R = 0 \, .$$

Nun gilt aber $dS_R = R^{m-1}\, dS_1$, wobei S_1 die Einheitssphäre bedeutet; die letzte Bedingung ist deshalb der folgenden äquivalent:

$$\int_{S_1} \psi(\theta)\, dS_1 = 0 \, . \tag{7}$$

Die Funktion $\psi(\theta)$ entwickeln wir in eine FOURIER-Reihe nach den Kugelfunktionen:

$$\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_n^{(k)}\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta) \, . \tag{8}$$

Das Glied mit dem Index $n = 0$ tritt hier auf Grund der Formeln (7), (4.7) sowie der Eigenschaft 2 der Kugelfunktionen (§ 4) nicht auf.

Die Lösung des NEUMANNschen Problems wird dann durch die Reihe

$$u(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n R^{n-1}} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_n^{(k)}\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta) \tag{9}$$

dargestellt, dabei ist C eine willkürliche Konstante.

4. Das NEUMANNsche Problem für das Außengebiet der Kugel. Gesucht sei eine Funktion $u(x)$, die im Gebiet $\varrho > R$ harmonisch ist und der Randbedingung (5) genügt. Da die Bedingung (2.7) aus Kap. 12 im Falle eines unendlichen Gebietes nicht notwendig ist, so kann jetzt die FOURIER-Entwicklung der Funktion $\psi(\theta)$ nach den Kugelkoordinaten auch ein nulltes Glied enthalten. Es gelte

$$\psi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_n^{(k)}\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta) \, . \tag{10}$$

Dann wird die Lösung des NEUMANNschen Problems durch die folgende Formel geliefert:

$$u(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+m-1}}{(n+m-2)\,\varrho^{n+m-2}} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_n^{(k)}\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\,. \tag{11}$$

5. **Die DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme für die Kugelschicht.** Wir suchen jetzt eine Funktion, die in der Kugelschicht $R_0 < \varrho < R_1$ harmonisch ist und den Randbedingungen des DIRICHLETschen Problems

$$u|_{\varrho=R_0} = \varphi_0(\theta)\,, \qquad u|_{\varrho=R_1} = \varphi_1(\theta) \tag{12}$$

genügt.

Die Funktionen $\varphi_0(\theta)$ und $\varphi_1(\theta)$ entwickeln wir in FOURIER-Reihen nach den Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_{0n}^{(k)}\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\,, \\ \varphi_1(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_{1n}^{(k)}\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Lösung des Problems suchen wir in Gestalt der Reihe

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} \left(A_n^{(k)} \varrho^n + \frac{B_n^{(k)}}{\varrho^{n+m-2}} \right) Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\,. \tag{14}$$

Wir setzen jetzt in der Formel (14) $\varrho = R_0$ und $\varrho = R_1$ und vergleichen die sich daraus ergebenden Reihen mit den Reihen (13). Dann erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten $A_n^{(k)}$ und $B_n^{(k)}$:

$$\begin{aligned} A_n^{(k)} R_0^n + B_n^{(k)} R_0^{2-m-n} &= a_{0n}^{(k)}\,, \\ A_n^{(k)} R_1^n + B_n^{(k)} R_1^{2-m-n} &= a_{1n}^{(k)}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Die Determinante des Systems (15) ist gleich

$$R_0^n R_1^n \left(R_0^{2-m-2n} - R_1^{2-m-2n}\right)$$

und somit verschieden von Null. Folglich lassen sich die Koeffizienten $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$ bestimmen, und wir gelangen damit zur Lösung des DIRICHLETschen Problems.

Im Falle des NEUMANNschen Problems haben die Randbedingungen die Gestalt

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\varrho=R_0} = \psi_0(\theta)\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\varrho=R_1} = \psi_1(\theta)\,. \tag{16}$$

Die Beziehung (2.7) aus Kap. 12 bedeutet in diesem Falle, daß die Funktionen $\psi_0(\theta)$ und $\psi_1(\theta)$ folgender Gleichung genügen müssen:

$$R_0^{m-1} \int_{S_1} \psi_0(\theta)\, dS_1 + R_1^{m-1} \int_{S_1} \psi_1(\theta)\, dS_1 = 0\,; \tag{17}$$

dies ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des NEUMANNschen Problems.

Die Funktionen $\psi_0(\theta)$ und $\psi_1(\theta)$ entwickeln wir in FOURIER-Reihen nach den Kugelfunktionen:

$$\psi_0(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_{0n}^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta), \qquad \psi_1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_{1n}^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta) . \tag{18}$$

Gleichung (17) führt unter Berücksichtigung der Formel (4.7) zu folgender Beziehung zwischen den Anfangsgliedern der Reihen (18):

$$R_0^{m-1} b_{00}^{(1)} + R_1^{m-1} b_{10}^{(1)} = 0. \tag{19}$$

Die Lösung des Problems suchen wir wiederum in Gestalt der Reihe (14). Wir berücksichtigen jetzt, daß $\frac{\partial}{\partial \nu} = - \frac{\partial}{\partial \varrho}\Big|_{\varrho=R_0}$ auf der inneren Kugeloberfläche und $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \varrho}\Big|_{\varrho=R_1}$ auf der äußeren Kugeloberfläche gilt. Durch Differentiation der Reihe (14) nach der Normalen und anschließenden Koeffizientenvergleich in den sich ergebenden Reihen und den Reihen (18) erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -n R_0^{n-1} A_n^{(k)} + \frac{n+m-2}{R_0^{n+m-1}} B_n^{(k)} &= b_{0n}^{(k)} , \\ n R_1^{n-1} A_n^{(k)} - \frac{n+m-2}{R_1^{n+m-1}} B_n^{(k)} &= b_{1n}^{(k)} . \end{aligned} \tag{20}$$

Die Determinante des Systems (20) ist gleich

$$\frac{n(n+m-2)}{(R_0 R_1)^{n+m-1}} (R_0^{2n+m-2} - R_1^{2n+m-2})$$

und somit für $n \neq 0$ verschieden von Null. Daraus folgt, daß sich die Koeffizienten $A_n^{(k)}$ und $B_n^{(k)}$ für $n > 0$ eindeutig bestimmen lassen. Für $n = 0$ liefert das System (20) zwei Werte für ein und dieselbe Größe $B_0^{(1)}$:

$$B_0^{(1)} = R_0^{m-1} \frac{b_{00}^{(1)}}{m-2} , \qquad B_0^{(1)} = - R_1^{m-1} \frac{b_{10}^{(1)}}{m-2} .$$

Diese Werte stimmen auf Grund der Beziehung (19) überein. Der Koeffizient $A_0^{(1)}$ bleibt, wie auch zu erwarten war, willkürlich wählbar.

Übungsaufgaben

1. Man löse das NEUMANNsche Problem für das Kreisringgebiet.
2. Für das Kreisringgebiet $R_0 < |z| < R_1$ löse man das folgende gemischte Problem:

$$u|_{\varrho=R_0} = \varphi(\theta) , \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\varrho=R_1} = \psi(\theta) .$$

KAPITEL 14

DIE VARIATIONSMETHODE BEIM DIRICHLETSCHEN PROBLEM. WEITERE POSITIV-DEFINITE PROBLEME

Im vorliegenden Kapitel wird eine Methode zur Lösung des DIRICHLETschen Problems behandelt, die sich von den elementaren Methoden der vorangegangenen Kapitel unterscheidet. Die neue Methode stützt sich auf die Lösung des Minimumproblems für das quadratische Funktional, welche im Kap. 5 dargelegt wurde. Diese Methode ermöglicht die Lösung des DIRICHLETschen Problems für eine formal selbstadjungierte nicht entartete elliptische Gleichung sowie einer Reihe anderer Probleme der Theorie der partiellen Differentialgleichungen unter recht allgemeinen Bedingungen.

Wie soeben bemerkt wurde, liefert die Variationsmethode sehr allgemeine Ergebnisse; gleichzeitig auferlegt sie aber dem Problem wesentliche Einschränkungen. Hinreichend vollständig läßt sich das DIRICHLETsche Problem nur für ein endliches Gebiet lösen. Im Falle einer inhomogenen Randbedingung muß an die Randfunktion eine einschneidende Forderung gestellt werden (siehe unten, § 5).

Die Variationsmethode wird auch in den nachfolgenden Kapiteln benutzt: Im Kap. 15 untersuchen wir mit Hilfe dieser Methode das Spektrum des DIRICHLETschen Problems, im Kap. 16 — das NEUMANNsche Problem. Kap. 17 ist dem etwas schwierigeren Problem bei formal nichtselbstadjungierten elliptischen Gleichungen gewidmet.

§ 1. Die FRIEDRICHSsche Ungleichung

Im m-dimensionalen euklidischen Raum E_m sei ein endliches Gebiet Ω gegeben; der Einfachheit halber werden wir voraussetzen, daß der Rand Γ dieses Gebietes stückweise glatt ist. Die Funktion $u \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ genüge der Randbedingung

$$u\big|_\Gamma = 0\,. \tag{1}$$

Wir beweisen, daß dann die sogenannte FRIEDRICHS*sche Ungleichung*

$$\int\limits_\Omega u^2\,dx \leqq \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \tag{2}$$

gilt. Dabei ist $\varkappa$ eine von der Funktion u unabhängige Konstante, die durch das Gebiet Ω vollständig definiert wird.

Wir wählen das Koordinatensystem derart, daß das Gebiet Ω in dem Teil des Raumes liegt, wo sämtliche Koordinaten positiv sind. Dann bringen wir dieses Gebiet im Inneren eines gewissen Parallelepipeds Π unter, welches durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x_k \leqq a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

definiert wird (Abb. 25).

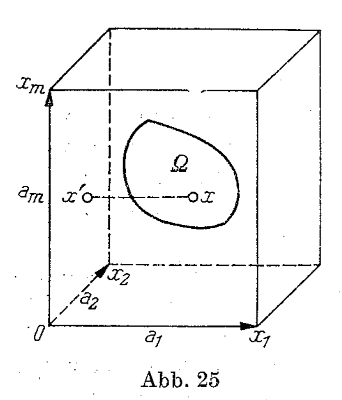


Abb. 25

Wir setzen die Funktion $u(x)$ fort, indem wir sie im Gebiet $\Pi\setminus\Omega$ identisch gleich Null setzen. Die Funktion $u(x)$ bleibt nach dieser Fortsetzung stetig, da $u|_\Gamma = 0$ gilt; die Ableitungen dieser Funktion können auf dem Rande Γ Unstetigkeiten aufweisen. Für solche Funktionen gilt die NEWTON-LEIBNIZsche Formel.

Im Parallelepiped Π wählen wir einen Punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und projizieren diesen auf die zur Koordinatenachse $O\,x_1$ orthogonale Koordinatenebene. Die Projektion bezeichnen wir mit x'. Der Punkt x' läßt sich als Punkt des $(m-1)$-dimensionalen euklidischen Raumes mit den Koordinaten $x_2, \ldots, x_m$ auffassen. Im weiteren benutzen wir die Bezeichnung $x = (x_1, x')$ sowie analoge Bezeichnungen.

Nach der NEWTON-LEIBNIZschen Formel gilt

$$u(x) - u(0, x') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\, d\xi .$$

Da der Punkt $(0, x')$ außerhalb des Gebietes Ω liegt, so gilt $u(0, x') = 0$ und somit

$$u(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\, d\xi .$$

Nach der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung ergibt sich

$$u^2(x) \leqq \int_0^{x_1} d\xi \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 d\xi \leqq a_1 \int_0^{a_1} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 d\xi .$$

Die letzte Ungleichung integrieren wir nun über das Parallelepiped Π:

$$\int_\Pi u^2(x)\, dx \leqq a_1^2 \int_0^{a_1} d\xi \int_0^{a_2} dx_2 \ldots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 dx_m =$$

$$= a_1^2 \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2} dx_2 \ldots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial u(x_1, x')}{\partial x_1}\right)^2 dx_m = a_1^2 \int_\Pi \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right)^2 dx .$$

Da die Integrale über $\Pi \setminus \Omega$ auf der rechten und linken Seite gleich Null sind, so können wir diese unberücksichtigt lassen; gleichzeitig fügen wir zum Integranden auf der rechten Seite die nichtnegative Summe

$$\sum_{k=2}^{m} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)^2$$

hinzu. Dies führt dann auf die Ungleichung

$$\int_\Omega u^2(x)\, dx \leqq a_1^2 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\,, \tag{3}$$

aus der sich die Ungleichung (2) für $\varkappa = a_1^2$ ergibt. Natürlich kann als $\varkappa$ jede der Zahlen a_k^2 (insbesondere auch die kleinste dieser Zahlen) genommen werden. Die Frage nach dem kleinstmöglichen Wert $\varkappa$ wird im folgenden Kapitel gelöst.

§ 2. Der Operator des DIRICHLETschen Problems

Es sei

$$L\,u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(x)\,u \tag{1}$$

ein Differentialausdruck, dessen Koeffizienten in einem gewissen endlichen Gebiet Ω des m-dimensionalen euklidischen Raumes E_m definiert sind. Den Rand Γ des Gebietes Ω setzen wir als stückweise glatt voraus. Des weiteren nehmen wir $A_{jk} \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ und $C \in C(\overline{\Omega})$ an.

Wir setzen voraus, daß der Differentialausdruck (1) im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ elliptisch ist. In diesem Falle besitzen sämtliche Eigenwerte $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ der Koeffizienten-Matrix des Hauptteiles $\|A_{jk}(x)\|$ in $\overline{\Omega}$ ein und dasselbe Vorzeichen. Indem man gegebenenfalls das Vorzeichen des Ausdrucks L ändert, läßt sich stets erreichen, daß $\lambda_k(x) > 0$, $x \in \overline{\Omega}$, gilt.

Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

besitzt als höchsten Koeffizienten $(-1)^m$, der konstant und verschieden von Null ist; die übrigen Koeffizienten dieser Gleichung sind stetige Funktionen in $\overline{\Omega}$. Daraus folgt, daß auch die Wurzeln $\lambda_k(x)$ dieser Gleichung in $\overline{\Omega}$ stetige Funktionen von x sind. Als positive Funktionen in dem kompakten abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ sind sie durch eine gewisse positive Konstante, welche wir mit μ_0 bezeichnen, nach unten beschränkt:

$$\lambda_k(x) \geqq \mu_0\,, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}; \qquad \mu_0 = \text{const} > 0\,. \tag{2}$$

Eine elliptische Differentialgleichung, welche die Ungleichung (2) erfüllt, heißt *nicht entartet* in Ω.

Es seien $t_1, t_2, \ldots, t_m$ beliebige reelle Zahlen, Wenn $\lambda_1(x)$ den kleinsten Eigenwert der Matrix $||A_{jk}||_{j,k=1}^m$ bedeutet, dann gilt bekanntlich

$$A_{jk}(x)\, t_j\, t_k \geqq \lambda_1(x) \sum_{k=1}^{m} t_k^2 .$$

Unter Benutzung der Ungleichung (2) erhalten wir dann

$$A_{jk}(x)\, t_j\, t_k \geqq \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2 . \tag{3}$$

Die Ungleichung (3) ist nun charakteristisch für einen nichtentarteten elliptischen Differentialausdruck. Diese Ungleichung wird im weiteren eine wichtige Rolle spielen.

Von dem Differentialausdruck (1) fordern wir außerdem, daß gilt

$$C(x) \geqq 0\,, \qquad \forall x \in \bar{\Omega}\,. \tag{4}$$

Wir betrachten jetzt das DIRICHLETsche Problem mit einer homogenen Randbedingung:

$$L\,u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C\,u = f(x)\,, \tag{5}$$

$$u|_\Gamma = 0\,. \tag{6}$$

Wir nehmen an, daß $f \in L_2(\Omega)$ gilt und suchen eine Lösung des Problems (5), (6), welche ebenfalls dem Raum $L_2(\Omega)$ angehört. Wie jede Randwertaufgabe erzeugt auch das Problem (5), (6) einen gewissen Operator, den wir mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen. Dieser wird durch die Formel

$$\mathfrak{A}\,u = L\,u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C\,u$$

definiert; als sein Definitionsgebiet $D(\mathfrak{A})$ kann man die Menge derjenigen Funktionen aus $C^{(2)}(\bar{\Omega})$ annehmen, die der Randbedingung (6) genügen. Es ist einsichtig, daß man $\mathfrak{A}$ als Operator im Raum $L_2(\Omega)$ betrachten kann.

Wir beweisen, daß *der Operator* $\mathfrak{A}$ *in* $L_2(\Omega)$ *positiv-definit* ist. Entsprechend der Definition (vgl. Kap. 5, § 2) genügt es, die folgenden drei Tatsachen nachzuweisen: 1. Die Menge $D(\mathfrak{A})$ ist dicht in $L_2(\Omega)$; 2. der Operator $\mathfrak{A}$ ist symmetrisch:

$$(\mathfrak{A}\,u, v) = (u, \mathfrak{A}\,v)\,, \qquad u, v \in D(\mathfrak{A})\,, \tag{7}$$

3. der Operator $\mathfrak{A}$ erfüllt die Ungleichung der positiven Definitheit

$$(\mathfrak{A}\,u, u) \geqq \gamma^2\, ||u||^2\,, \qquad \gamma^2 = \text{const} > 0\,. \tag{8}$$

Die Dichtheit der Menge $D(\mathfrak{A})$ im Raum $L_2(\Omega)$ ergibt sich unmittelbar aus der Folgerung 1.3.1, da $D(\mathfrak{A})$ offenbar die Menge aller in Ω finiten Funktionen enthält.

Wir beweisen jetzt die Symmetrie des Operators $\mathfrak{A}$. Es seien $u, v \in D(\mathfrak{A})$. Letzteres bedeutet: $u, v \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ und

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0\,. \tag{9}$$

Wir bilden die Differenz

$$(\mathfrak{A}\, u, v) - (u, \mathfrak{A}\, v) = (L\, u, v) - (u, L\, v) = \int_\Omega (v\, L\, u - u\, L\, v)\, dx\,.$$

Durch Anwendung der zweiten GREENschen Formel [Formel (6.6) aus Kap. 10] auf das letzte Integral erhalten wir

$$(\mathfrak{A}\, u, v) - (u, \mathfrak{A}\, v) = -\int_\Gamma A_{jk}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\,\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu, x_j)\, d\Gamma\,.$$

Auf Grund der Gleichungen (9) ist das Integral auf der rechten Seite gleich Null. Damit ist die Beziehung (7), d. h. die Symmetrie des Operators $\mathfrak{A}$ bewiesen.

Es bleibt noch die Ungleichung (8) zu beweisen. Es gilt

$$(\mathfrak{A}\, u, u) = (L\, u, u) = -\int_\Omega u\,\frac{\partial}{\partial x_j}\, A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx + \int_\Omega C\, u^2\, dx\,.$$

Auf das erste Integral wenden wir jetzt die erste GREENsche Formel [Formel (6.5) aus Kap. 10] an. Da das Oberflächenintegral auf Grund der Randbedingung (6) verschwindet, so erhalten wir

$$(\mathfrak{A}\, u, u) = \int_\Omega \left[A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + C\, u^2\right] dx\,. \tag{10}$$

Das Integral (10) schätzen wir nach unten ab. Zunächst lassen wir den nichtnegativen Summanden $C\, u^2$ weg. Danach benutzen wir die Ungleichung (3), in der wir jetzt $t_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ setzen:

$$A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k} \geqq \mu_0 \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2.$$

Dann ergibt sich

$$(\mathfrak{A}\, u, u) \geqq \mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\,. \tag{11}$$

Da nun für die Funktion $u \in D(\mathfrak{A})$ offensichtlich die FRIEDRICHSsche Ungleichung (1.2) gilt, so finden wir schließlich

$$(\mathfrak{A}\, u, u) \geqq \frac{\mu_0}{\chi}\int_\Omega u^2\, dx = \frac{\mu_0}{\varkappa}\, ||u||^2\,. \tag{12}$$

Mithin ist die Ungleichung (8) $\left(\text{mit dem Konstantenwert } \gamma^2 = \frac{\mu_0}{\varkappa}\right)$ aufgestellt; damit ist auch gleichzeitig bewiesen, daß der Operator $\mathfrak{A}$ positiv-definit ist.

Bemerkung. Der Operator $\mathfrak{A}$ ist auch dann noch positiv-definit, wenn $C(x) \equiv 0$ ist. Dies ermöglicht eine gewisse Abschwächung der Bedingung (4).

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}_0$ den Spezialfall des Operators $\mathfrak{A}$ für $C(x) \equiv 0$; $\gamma_0^2 > 0$ sei die untere Grenze des Operators $\mathfrak{A}_0$. Dann gilt

$$(\mathfrak{A}_0 u, u) \geqq \gamma_0^2 \, ||u||^2 . \tag{13}$$

Offensichtlich ist $\mathfrak{A} u = \mathfrak{A}_0 u + C(x) u$. Daraus ergibt sich

$$(\mathfrak{A} u, u) = (\mathfrak{A}_0 u, u) + (C u, u) \geqq \gamma_0^2 \, ||u||^2 + (C u, u) . \tag{14}$$

Wir nehmen an, daß $C(x)$ die Ungleichung

$$C(x) \geqq \varepsilon - \gamma_0^2 , \qquad \forall x \in \bar{\Omega} , \tag{15}$$

für eine gewisse positive Konstante ε erfüllt. Dann gilt

$$(C u, u) = \int_\Omega C(x) \, u^2(x) \, dx \geqq (\varepsilon - \gamma_0^2) \int_\Omega u^2(x) \, dx = (\varepsilon - \gamma_0^2) \, ||u||^2 .$$

Durch Einsetzen in (14) finden wir

$$(\mathfrak{A} u, u) \geqq \varepsilon \, ||u||^2 , \tag{16}$$

d. h., der Operator $\mathfrak{A}$ ist positiv-definit. Damit ist gezeigt: Die Bedingung (4) kann durch die etwas schwächere Bedingung (15) ersetzt werden.

§ 3. Der energetische Raum des DIRICHLETschen Problems

Wie mit jedem positiv-definiten Operator, so ist auch mit dem Operator $\mathfrak{A}$ des DIRICHLETschen Problems der energetische Raum $H_\mathfrak{A}$ verknüpft. Wir wollen jetzt diesen Raum näher untersuchen.

Satz 14.3.1. *Der energetische Raum $H_\mathfrak{A}$ besteht aus den und nur den Funktionen, die 1. in Ω quadratisch summierbar sind und quadratisch summierbare verallgemeinerte erste Ableitungen besitzen, 2. der Randbedingung* (2.6) *in dem folgenden Sinne genügen: Wenn $u \in H_\mathfrak{A}$ ist, dann existiert eine Folge von Funktionen $u_n \in D(\mathfrak{A})$, für die gilt*

$$\int_\Omega (u_n - u)^2 \, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 , \qquad \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 . \tag{1}$$

Das energetische Produkt und die energetische Norm im Raum $H_\mathfrak{A}$ werden durch die folgenden Formeln definiert:

$$[u, v]_\mathfrak{A} = \int_\Omega \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + C u v\right) dx , \tag{2}$$

$$|u|_\mathfrak{A}^2 = \int_\Omega \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C u^2\right) dx . \tag{3}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst, daß eine Funktion $u \in H_\mathfrak{A}$ die im Satz formulierten Eigenschaften besitzt.

Die Behauptung $u \in L_2(\Omega)$ ergibt sich sofort aus dem Satz 5.3.1, auf Grund dessen sämtliche Elemente des energetischen Raumes $H_\mathfrak{A}$ dem Ausgangsraum $L_2(\Omega)$ angehören.

So wie jeder vervollständigte Raum besteht auch der energetische Raum $H_{\mathfrak{A}}$ aus den ursprünglichen Elementen — im vorliegenden Fall sind dies die Elemente des Definitionsgebietes $D(\mathfrak{A})$ — und den idealen Elementen. Wenn nun u ein ideales Element ist, dann existiert eine Folge $\{u_n\}$ von ursprünglichen Elementen derart, daß gilt

$$\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,, \qquad |u_n - u|_{\mathfrak{A}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \tag{4}$$

Vorläufig seien u und v ursprüngliche Elemente. Durch Anwendung der ersten GREENschen Formel [Formel (6.5) aus Kap. 10] erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.9)

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}\, u, v) = \int\limits_{\Omega} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + C\, u\, v\right) dx\,.$$

Da nun $A_{jk} = A_{kj}$ gilt, so stimmt das letzte Integral mit dem Integral der Formel (2) überein; folglich ist die Formel (2) für die ursprünglichen Elemente gültig.

Indem wir in der Formel (2) $v = u$ setzen, überzeugen wir uns davon, daß auch die Formel (3) für die ursprünglichen Elemente gilt.

Es sei jetzt u ein ideales Element des Raumes $H_{\mathfrak{A}}$. Wir wählen eine Folge von Elementen $u_n \in D(\mathfrak{A})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ derart, daß die Beziehungen (4) gelten. Aus der zweiten dieser Beziehungen folgt dann

$$|u_n - u_s|^2 = (\mathfrak{A}\,(u_n - u_s)\,,\ \ u_n - u_s) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \left[A_{jk} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right) + C(u_n - u_s)^2\right] dx \xrightarrow[n,\, s\to\infty]{} 0\,.$$

Jetzt ergibt sich aus der Ungleichung (2.11)

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)^2 dx = \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right\|^2 \xrightarrow[n,\, s\to\infty]{} 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

d. h., die Folgen der Ableitungen $\frac{\partial u_n}{\partial x_k}$, $n = 1, 2, \ldots$, konvergieren in sich in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$.

Daraus folgt nun die Existenz der Grenzfunktionen

$$v_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x_k}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \qquad v_k \in L_2(\Omega)\,.$$

Nach dem Satz 2.3.1 erhalten wir auf Grund der ersten Beziehung (4):

$$v_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}\,. \tag{5}$$

Es bleibt noch zu beweisen, daß die Formeln (2) und (3) auch für die idealen Elemente gelten. Sei u ein ideales Element, und die Folge $u_n \in D(\mathfrak{A})$ erfülle die Beziehungen (4). Dann gilt

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2 = \lim_{n\to\infty} |u_n|_{\mathfrak{A}}^2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + C\, u_n^2\right] dx\,. \tag{6}$$

Wir beweisen, daß der letzte Grenzwert gleich

$$\int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C\, u^2\right] dx$$

ist. Zu diesem Zweck schätzen wir den Ausdruck

$$J_n = \left| \int_\Omega \left[A_{jk} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C\,(u_n^2 - u^2)\right] dx \right|$$

ab. Als stetige Funktionen im abgeschlossenen Gebiet sind $A_{jk}(x)$ und $C(x)$ beschränkt. Sei $|A_{jk}(x)| \leqq M$, $|C(x)| \leqq M$; $M = \text{const}$. Dann gilt

$$J_n \leqq M \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| dx + M \int_\Omega |u_n^2 - u^2|\, dx\,. \tag{7}$$

Das zweite Integral schätzen wir wie folgt ab:

$$\int_\Omega |u_n^2 - u^2|\, dx = \int_\Omega |u_n + u| \cdot |u_n - u|\, dx \leqq$$

$$\leqq \left\{\int_\Omega (u_n + u)^2\, dx\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int_\Omega (u_n - u)^2\, dx\right\}^{1/2} = ||u_n + u|| \cdot ||u_n - u||\,.$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite strebt gegen Null und der erste gegen den Grenzwert $2\,||u||$; folglich strebt auch der zweite Summand in (7) gegen Null.

Auf analoge Weise läßt sich auch der erste Summand abschätzen:

$$\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{m} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \right| dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{j,k=1}^{m} \left\{ \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\| \right\}.$$

Auf der rechten Seite der letzten Ungleichung sind die ersten Faktoren jeweils beschränkt, während die zweiten Faktoren gegen Null konvergieren; folglich strebt der gesamte Ausdruck gegen Null. Somit ergibt sich

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2 = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C\, u^2\right] dx\,,$$

womit die Formel (3) für die idealen Elemente des energetischen Raumes bewiesen ist.

Sind jetzt u und v zwei ideale Elemente, dann gilt

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = \frac{1}{4} \left\{|u + v|_{\mathfrak{A}}^2 - |u - v|_{\mathfrak{A}}^2\right\}.$$

Ersetzt man rechts die Normen nach der Formel (3), dann gelangt man nach einigen elementaren Umformungen zu der Formel (2), welche damit auch für die idealen Elemente nachgewiesen ist.

Wir beweisen jetzt die umgekehrte Behauptung: Wenn die Funktion $u \in L_2(\Omega)$ verallgemeinerte Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$ besitzt und wenn außerdem eine Folge $\{u_n\}$, $u_n \in D(\mathfrak{A})$, existiert, welche die Beziehungen (1) erfüllt, dann gilt $u \in H_{\mathfrak{A}}$.

Die Folge $\{u_n\}$ konvergiert in sich in der energetischen Metrik. Es gilt nämlich

$$|u_n - u_s|_{\mathfrak{A}}^2 = \int_\Omega \left[A_{jk}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right) + C\,(u_n - u_s)^2\right] dx\,.$$

Die Koeffizienten A_{jk} und C sind beschränkt durch die Konstante M. Als stetige Funktionen der Koeffizienten A_{jk} sind die Eigenwerte der Koeffizienten-Matrix des Hauptteiles ebenfalls beschränkt; es sei $N = \text{const}$ eine obere Schranke für diese Eigenwerte. Dann ergibt sich

$$A_{jk}\, t_j\, t_k \leqq N \sum_{k=1}^{m} t_k^2$$

und somit

$$|u_n - u_s|_{\mathfrak{A}}^2 \leqq N \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)^2 dx + M \int_\Omega (u_n - u_s)^2\, dx\;;$$

die rechte Seite strebt auf Grund der Beziehungen (1) für $n, s \to \infty$ gegen Null.

Da der energetische Raum vollständig ist, so gibt es darin ein Element w derart, daß $|w - u_n|_{\mathfrak{A}} \to 0$ gilt. Aus der ersten Beziehung (1) folgt nun $w = u$. Damit erhalten wir schließlich $u \in H_{\mathfrak{A}}$, und der Satz ist bewiesen.

§ 4. Die verallgemeinerte Lösung des DIRICHLETschen Problems

1. Das Problem (2.5), (2.6) läßt sich in Form einer einzigen Operatorengleichung

$$\mathfrak{A}\, u = f \tag{*}$$

schreiben. Da wir $\mathfrak{A}$ als Operator im Raum $L_2(\Omega)$ betrachten, so erscheint es natürlich, $f \in L_2(\Omega)$ anzunehmen. Wie man leicht einsieht, ist dann die Gleichung (*) im allgemeinen nicht lösbar: Im Falle der Lösbarkeit folgt nämlich aus $u \in D(\mathfrak{A})$ die Stetigkeit der Funktion f in $\overline{\Omega}$. Andererseits ist aber der Operator $\mathfrak{A}$ im Raum $L_2(\Omega)$ positiv-definit. Auf Grund der Ergebnisse des § 5 aus Kap. 5 besitzt deshalb das genannte Problem für beliebiges $f \in L_2(\Omega)$ eine und nur eine verallgemeinerte Lösung $u_0 \in H_{\mathfrak{A}}$. Nach dem Satz 14.3.1 ist die Funktion u_0 quadratisch summierbar, besitzt quadratisch summierbare verallgemeinerte erste Ableitungen und verschwindet auf dem Rande des Gebietes im Sinne der Beziehungen (3.1).

Da Gleichung (2.5) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so entsteht sofort die Frage nach der Existenz der zweiten Ableitungen für die verallgemeinerte Lösung des DIRICHLETschen Problems. Für den LAPLACE-Operator wird diese Frage später im § 6 teilweise beantwortet. Eine vollständigere Aussage ist in [8] und [11] gemacht.

Die verallgemeinerte Lösung $u_0(x)$ ist Lösung des Minimumproblems für das Funktional

$$F(u) = |u|_{\mathfrak{A}}^2 - 2\,(u, f) = \int_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C\,u^2 - 2\,f\,u \right] dx \tag{1}$$

bei der Randbedingung (2.6). Diese Lösung läßt sich in Gestalt der Reihe

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\,\omega_n(x) \tag{2}$$

darstellen (s. § 5 aus Kap. 5); dabei ist $\{\omega_n(x)\}$ eine im Raum $H_{\mathfrak{A}}$ orthonormierte und vollständige Folge.

2. **Beispiel.** Wir betrachten das DIRICHLETsche Problem für die LAPLACE-Gleichung

$$-\Delta u = f(x)\,, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma} = 0\,, \tag{4}$$

im Parallelepiped Ω, welches durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x_k \leqq a_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{5}$$

definiert wird; mit Γ ist die Oberfläche des Parallelepipeds (5) bezeichnet. Im vorliegenden Falle gilt $A_{jk} = \delta_{jk}$, $C = 0$. Die Formeln (3.2) und (3.3) nehmen dann folgende einfache Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} [u, v]_{\mathfrak{A}} &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx\,, \\ |u|_{\mathfrak{A}}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Das Funktionensystem

$$\frac{2^{m/2}}{\pi \sqrt{|\Omega|}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}\,, \qquad n_k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

ist im Raum $H_{\mathfrak{A}}$ orthonormiert und vollständig (man beweise diese Behauptung!); dabei ist $|\Omega| = \prod_{k=1}^{m} a_k$ das Volumen des Parallelepipeds (5).

Nach der Formel (2) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{2^m}{\pi^2\,|\Omega|} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = 1}^{\infty}{}' \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right)^{-1} a_{n_1 n_2 \ldots n_m} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}\,; \\ a_{n_1 n_2 \ldots n_m} &= \int_{\Omega} f(x) \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}\,dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

§ 5. Das DIRICHLETsche Problem für die homogene Gleichung

Das Gebiet Ω sowie die Koeffizienten $A_{jk}(x)$ und $C(x)$ mögen den Bedingungen des § 2 genügen, und es sei $\varphi(x)$ eine auf dem Rande Γ des Gebietes Ω definierte Funktion.

Wir betrachten im Gebiet Ω das DIRICHLETsche Problem für die homogene elliptische Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - C\,v = 0 \tag{1}$$

mit der inhomogenen Randbedingung

$$v|_\Gamma = \varphi(x)\,. \tag{2}$$

Bei der klassischen Formulierung des DIRICHLETschen Problems wird vorausgesetzt, daß die gegebene Funktion $\varphi \in C(\Gamma)$ ist; von der gesuchten Funktion v wird verlangt, daß sie in $\overline{\Omega}$ stetig ist und in Ω stetige zweite Ableitungen besitzt. Wir werden das DIRICHLETsche Problem in einer veränderten Problemstellung lösen, welche wir wie folgt formulieren:

Der Einfachheit setzen wir auch hier voraus, daß $\varphi \in C(\Gamma)$ gilt. Wir treffen nun die folgende Annahme: Es existiert eine Funktion $\psi(x)$, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllt: 1. $\psi \in C(\overline{\Omega})$; 2 die Funktion ψ besitzt die verallgemeinerten Ableitungen $\frac{\partial\psi}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$; 3. es gilt $\psi|_\Gamma = \varphi(x)$ [1])

Wir betrachten das Minimumproblem für das homogene quadratische Funktional

$$\Phi(v) = \int\limits_\Omega \left[A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k} + C\,v^2\right] dx \tag{3}$$

auf der Menge $D(\Phi)$ derjenigen Funktionen, die in Ω zusammen mit ihren verallgemeinerten Ableitungen erster Ordnung quadratisch summierbar sind und der Randbedingung (2) in dem folgenden Sinne genügen:

$$(v - \psi) \in H_{\mathfrak{A}}; \tag{4}$$

dabei bedeutet $H_{\mathfrak{A}}$ den energetischen Raum des DIRICHLETschen Problems (2.5), (2.6). Wir setzen nun $v(x) - \psi(x) = u(x)$. Dann gilt $u \in H_{\mathfrak{A}}$ und

$$\Phi(v) = \Phi(u) + 2\,\Phi(u, \psi) + \Phi(\psi);$$

---

[1]) In Wirklichkeit genügt es, an die Funktion $\psi(x)$ die folgenden Forderungen zu stellen: $\psi \in L_2(\Omega)$, es existieren die verallgemeinerten Ableitungen $\partial\psi/\partial x \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, und die Gleichung $\psi|_\Gamma = \varphi(x)$ ist in einem gewissen verallgemeinerten Sinn erfüllt. Dabei kann man sich von der Bedingung $\varphi \in C(\Gamma)$ befreien. Wenn keine einzige Funktion $\psi(x)$ mit den genannten Eigenschaften existiert, dann ist $D(\Phi)$ die leere Menge und das Variationsproblem (2), (3) verliert seinen Sinn. Notwendige und hinreichende Bedingungen, die man an die Funktion $\varphi(x)$ stellen muß, damit $D(\Phi)$ nicht die leere Menge ergibt, sind in [16] angegeben.

hierbei bezeichnet $\Phi(u, \psi)$ das bilineare Funktional

$$\Phi(u, \psi) = \int\limits_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + C\, u\, \psi \right] dx\,, \tag{5}$$

welches in u offensichtlich linear ist.

Da $\Phi(\psi)$ eine gewisse Konstante darstellt, so ist das Variationsproblem (2), (3) dem folgenden Problem äquivalent: Im Raum $H_{\mathfrak{A}}$ ist diejenige Funktion u gesucht, die dem Funktional

$$\Phi(u) + 2\, \Phi(u, \psi) \tag{6}$$

den kleinsten Wert erteilt.

Wir beweisen jetzt, daß die zuletzt formulierte Aufgabe eine eindeutige Lösung besitzt. Aus den Bedingungen (2.3) und (2.4) folgt, daß das homogene quadratische Funktional Φ nicht negativ ist und somit die CAUCHYsche Ungleichung

$$|\Phi(u, \psi)| \leqq \sqrt{\Phi(u)}\, \sqrt{\Phi(\psi)} \tag{7}$$

gilt. Für $u \in H_{\mathfrak{A}}$ ergibt sich nun $\sqrt{\Phi(u)} = |u|_{\mathfrak{A}}$ [vgl. Formel (3.3)] und folglich

$$|\Phi(u, \psi)| \leqq \sqrt{\Phi(\psi)}\, |u|_{\mathfrak{A}}\,. \tag{8}$$

Da ψ eine fest vorgegebene Funktion ist, so ist $\sqrt{\Phi(\psi)}$ eine Konstante; Ungleichung (8) zeigt also, daß das Funktional $\Phi(u, \psi)$ im Raum $H_{\mathfrak{A}}$ beschränkt ist. Jetzt ergibt sich aus den Ergebnissen des § 9 von Kap. 5, daß das Minimumproblem für das Funktional (6) im Raum $H_{\mathfrak{A}}$ eine und nur eine Lösung besitzt.

Wir bezeichnen diese Lösung mit $u_0(x)$ und setzen $v_0(x) = u_0(x) + \psi(x)$. Offenbar ist die Funktion $v_0(x)$ Lösung des Variationsproblems (2), (3).

Satz 14.5.1. *Wenn v_0 eine Lösung des Variationsproblems* (2), (3) *ist und $v_0 \in C^{(2)}(\Omega)$ gilt, dann genügt diese Funktion der Differentialgleichung* (1).

Beweis. Wie die Beziehung (4) zeigt, stellt das Definitionsgebiet $D(\Phi)$ des Funktionals Φ eine lineare Mannigfaltigkeit (vgl. § 2, Kap. 3) von Funktionen der Gestalt $v = \psi + u$ mit $u \in H_{\mathfrak{A}}$ dar. Wenn man $v - v_0 = \eta$ setzt, dann ergibt sich $v = v_0 + \eta$ mit $\eta \in H_{\mathfrak{A}}$. Da v_0 das Funktional Φ zum Minimum macht, so ist die Variation dieses Funktionals im Punkte v_0 gleich Null (vgl. § 4, Kap. 3):

$$\delta \Phi(v_0, \eta) = 0\,. \tag{9}$$

Da Φ ein homogenes quadratisches Funktional ist, so läßt sich leicht die Beziehung

$$\delta \Phi(v, \eta) = 2\, \Phi(v, \eta) = 2 \int\limits_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + C\, v\, \eta \right] dx$$

gewinnen. Gleichung (9) ist somit der folgenden äquivalent:

$$\int\limits_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + C\, v_0\, \eta \right] dx = 0\,, \qquad \forall \eta \in H_{\mathfrak{A}}\,. \tag{10}$$

Wir geben jetzt eine Zahl $\delta > 0$ vor, betrachten den Randstreifen Ω_δ der Breite δ und nehmen als η eine in $\Omega \setminus \Omega_\delta$ finite Funktion, welche in Ω_δ gleich Null ist; eine solche Funktion ist natürlich auch in Ω finit.

In Gleichung (10) lassen wir das Integral über Ω_δ, welches gleich Null ist, unberücksichtigt; dann ergibt sich

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\delta} \left[A_{jk} \frac{\partial v_0}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + C\, v_0\, \eta \right] dx = 0\,.$$

Den ersten Summanden im Integranden integrieren wir partiell, indem wir η von der Differentiation befreien. Da auf dem Rande des Gebietes $\Omega \setminus \Omega_\delta$ die Gleichung $\eta = 0$ gilt, so verschwindet das Oberflächenintegral, und wir erhalten

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\delta} \left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial v_0}{\partial x_k} \right) + C\, v_0 \right] \eta\, dx = 0\,. \tag{11}$$

Die Menge der finiten Funktionen ist im Raum $L_2(\Omega \setminus \Omega_\delta)$ dicht. Zum anderen ist wegen $v_0 \in C^{(2)}(\Omega)$ der in den quadratischen Klammern stehende Ausdruck unter dem Integral (11) ein Element des Raumes $L_2(\Omega \setminus \Omega_\delta)$. Da nun dieses Element zur dichten Menge der finiten Funktionen orthogonal ist, so handelt es sich bei dem genannten Ausdruck um das Nullelement; letzteres bedeutet, daß die Funktion v_0 im Gebiet $\Omega \setminus \Omega_\delta$ der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial v_0}{\partial x_k} \right) - C\, v_0 = 0 \tag{12}$$

genügt. Da aber die Zahl δ beliebig klein gewählt werden kann, so ergibt sich, daß Gleichung (12) im gesamten Gebiet Ω erfüllt ist. Der Satz ist damit bewiesen.

Der Satz 14.5.1 läßt die folgende Definition als zweckmäßig erscheinen:

Die Funktion $v_0(x)$, welche die Lösung des Variationsproblems (2), (3) darstellt, heißt *verallgemeinerte Lösung des* DIRICHLET*schen Problems* (1), (2).

Das Wort „verallgemeinerte" werden wir des öfteren auch weglassen.

§ 6. Über die Existenz der zweiten Ableitungen der Lösung des DIRICHLETschen Problems

Satz 14.6.1. *Die verallgemeinerte Lösung des* DIRICHLET*schen Problems für die homogene* LAPLACE-*Gleichung mit einer inhomogenen Randbedingung in einem endlichen Gebiet Ω stellt eine in Ω harmonische Funktion dar.*

Beweis. Für die LAPLACE-Gleichung gilt $A_{jk} = \delta_{jk}$, $C = 0$, so daß die Beziehung (5.10) folgende Gestalt annimmt:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k}\, d\xi = 0\,. \tag{1}$$

Dabei wurde in der früheren Bezeichnung x durch ξ ersetzt.

Wir nehmen einen beliebigen Punkt $x \in \Omega$ und setzen in Gleichung (1) $\eta = \omega_h(r)$; dabei bedeutet $r = |\xi - x|$, und ω_h ist der Mittelungskern (vgl. § 1, Kap. 1). Den Mittelungsradius h wählen wir kleiner als den Abstand zwischen dem Punkt x und dem Rand Γ des Gebietes Ω; dann gilt $\omega_h(r)|_\Gamma = 0$. Da die Funktion $\omega_h(r)$ nur von der Differenz $\xi - x$ abhängt, so gilt

$$\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial x_k},$$

und der Beziehung (1) kann man die folgende Gestalt geben:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \omega_h(r)\, d\xi = 0 .$$

Aus dem Satz 2.2.1 ergibt sich nun

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \omega_h(r)\, d\xi = \frac{\partial v_{0h}(x)}{\partial x_k}$$

und somit

$$\Delta v_{0h} = 0 . \tag{2}$$

Für $h \to 0$ konvergiert $v_{0h} \to v_0$ in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$ (vgl. Satz 1.3.3). Auf Grund des Satzes 11.9.2 ist dann die Funktion $v_0(x)$ im Gebiet Ω harmonisch. Der Satz ist damit bewiesen.

Satz 14.6.2. *Wenn* $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ *gilt und* $u_0(x)$ *eine verallgemeinerte Lösung des* DIRICHLET*schen Problems für die* LAPLACE-*Gleichung*

$$-\Delta u = f(x), \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{3}$$

ist, dann gilt $u_0(x) \in C^{(2)}(\Omega)$.

Beweis. Wir betrachten das Volumenpotential

$$\psi(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega f(\xi) \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi .$$

Aus den Ergebnissen des § 6 von Kap. 11 ergibt sich, daß

$$\psi \in C^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap C^{(2)}(\Omega)$$

und $-\Delta\psi = f(x)$ gilt.

Da die Funktion $u_0(x)$ Lösung des Minimumproblems für das Funktional

$$F(u) = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right)^2 - 2 f u\right] d\xi , \qquad u \in H_\mathfrak{A}$$

ist, so ist die Variation des Funktionals F im Punkte u_0 gleich Null:

$$\delta F(u_0, \eta) = 2 \int_\Omega \left[\frac{\partial u_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} - f \eta\right] d\xi = 0 , \qquad \forall\, \eta \in H_\mathfrak{A} .$$

Substituieren wir hier $u_0 = v_0 + \psi$, dann ergibt sich

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial v_0}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} - f \eta\right] d\xi = 0 . \tag{4}$$

In der Beziehung (4) setzen wir jetzt $\eta = \omega_h(r)$, wobei ω_h den Mittelungskern, $r = |\xi - x|$ und x einen Punkt des Gebietes Ω bedeuten; den Mittelungsradius h wählen wir kleiner als den Abstand zwischen dem Punkt x und dem Rand Γ des Gebietes Ω.

Das zweite Integral in (4) integrieren wir partiell:

$$\int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_k}\,d\xi = -\int_\Omega \eta\,\Delta\psi\,d\xi + \int_\Gamma \eta\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,d\Gamma = \int_\Omega f\,\eta\,d\xi\,,$$

das Integral über Γ verschwindet offenbar. Die Beziehung (4) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\omega_h(r)}{\partial\xi_k}\,d\xi = 0\,.$$

Dieselben Umformungen wie beim Beweis des vorangegangenen Satzes ergeben $\Delta v_{0h} = 0$. Die Funktion v_0 ist somit in Ω harmonisch, und mithin gilt $v_0 \in C^{(2)}(\Omega)$. Dann ist aber auch $u_0 = (v_0 + \psi) \in C^{(2)}(\Omega)$. Der Satz ist bewiesen.

Bemerkung. Es sind auch schärfere Aussagen über die Differenzierbarkeitseigenschaften der verallgemeinerten Lösung des Dirichletschen Problems als der Satz 14.6.2 bekannt. Wir formulieren hier einige davon.

1. Wenn in Gleichung (3) die Funktion $f(x)$ in $\bar{\Omega}$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten α, $0 < \alpha < 1$, genügt, dann erfüllen die zweiten Ableitungen der verallgemeinerten Lösung $u_0(x)$ dieselbe Bedingung in einem beliebigen inneren abgeschlossenen Teilgebiet.

2. Wenn $f \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, gilt, dann besitzt u_0 sämtliche verallgemeinerten zweiten Ableitungen $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_j\,\partial x_k} \in L_p(\Omega')$; dabei bedeutet Ω' ein beliebiges inneres Teilgebiet von Ω.

Beide Sätze ergeben sich aus den Eigenschaften des Volumenpotentials, wie sie in der Bemerkung zum § 6 des Kap. 11 formuliert wurden. Ausführlicher kann darüber in [12] nachgelesen werden.

§ 7. Elliptische Differentialgleichungen höherer Ordnung und Gleichungssysteme

Die Variationsmethode läßt die Lösung weit allgemeinerer und komplizierterer Probleme zu als das Dirichletsche Problem für eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung. Als Beispiel betrachten wir die erste Randwertaufgabe (mit einer homogenen Randbedingung) für eine elliptische Differentialgleichung von höherer als zweiter Ordnung.

Im allgemeinsten Fall kann man einer formal selbstadjungierten Gleichung der Ordnung $2s$ im Raum E_m die folgende Gestalt geben:

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\left(A^{i_1 i_2\ldots i_k}_{j_1 j_2\ldots j_k}(x)\,\frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1}\,\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_k}}\right) = f(x)\,. \qquad (1)$$

In der inneren Summe erfolgt die Summation über sämtliche Indextupel $i_1, i_2, \ldots, i_k$ und $j_1, j_2, \ldots, j_k$, wobei diese Indizes unabhängig voneinander die Werte $1, 2, \ldots, m$ durchlaufen. Die Koeffizienten $A^{i_1 i_2\ldots i_k}_{j_1 j_2\ldots j_k}$ sind invariant in

bezug auf beliebige Permutationen der oberen oder der unteren Indizes; sie bleiben auch dann unverändert, wenn sämtliche oberen Indizes mit den entsprechenden unteren Indizes vertauscht werden.

Genauso wie im Falle einer Gleichung zweiter Ordnung wird die Zugehörigkeit der Gleichung (1) zum elliptischen Typ durch das Verhalten ihrer höchsten Koeffizienten, welche dem Indexwert $k = s$ entsprechen, bestimmt. Gleichung (1) heißt *nichtentartete elliptische Gleichung* im Gebiet $\Omega \subset E_m$, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Es seien $t_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ reelle Veränderliche, die in bezug auf Permutationen der Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_s$ invariant sind; dann gibt es eine Konstante $\mu_0 > 0$ derart, daß für beliebiges $x \in \Omega$ und für beliebige Werte der Veränderlichen $t_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ die Ungleichung

$$\sum A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_s}(x)\, t_{i_1 i_2 \ldots i_s}\, t_{j_1 j_2 \ldots j_s} \geqq \mu_0 \sum t^2_{i_1 i_2 \ldots i_s} \tag{2}$$

gilt. Im weiteren setzen wir voraus, daß diese Bedingung erfüllt ist.

Erste Randwertaufgabe (mit homogenen Randbedingungen) für die Gleichung (1) heißt das Problem der Integration der Gleichung (1) in einem vorgegebenen Gebiet Ω bei folgenden Randbedingungen:

$$u|_\Gamma = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}\right|_\Gamma = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}}\right|_\Gamma = 0, \ldots,$$
$$\left.\frac{\partial^{s-1} u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{s-1}}}\right|_\Gamma = 0; \tag{3}$$

dabei ist Γ der Rand des Gebietes Ω, und die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}$ nehmen unabhängig von einander die Werte $1, 2, \ldots, m$ an. Das Gebiet Ω setzen wir als endlich und den Rand Γ als stückweise glatt voraus. Des weiteren nehmen wir an, daß $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \in C^{(k)}(\bar{\Omega})$, $k = 0, 1, \ldots, s$, gilt.

Mit dem Problem (1), (3) verknüpft man auf natürliche Weise einen Operator, welchen wir $\mathfrak{A}_s$ bezeichnen wollen. Als sein Definitionsgebiet $D(\mathfrak{A}_s)$ wählen wir die Menge aller Funktionen, welche zur Klasse $C^{(2s)}(\bar{\Omega})$ gehören und den Bedingungen (3) genügen; der Operator selbst wird durch die Formel

$$\mathfrak{A}_s u = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \left(A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1}\,\partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \right)$$

definiert. Wir beweisen jetzt, daß der Operator $\mathfrak{A}_s$ im Raum $L_2(\Omega)$ positiv-definit ist, wenn die die niedrigeren Ableitungen enthaltenden Glieder der Gleichung (1) die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\sum A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}(x)\, t_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, t_{j_1 j_2 \ldots j_k} \geqq 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1\,; \tag{4}$$

dabei sind $t_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ beliebige reelle Zahlen, die in bezug auf Permutationen der Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_k$ invariant sind. Wir bilden das Skalarprodukt

$$(\mathfrak{A}_s u, u) = \int_\Omega u \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \left(A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1}\,\partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \right) dx\,.$$

Indem man partiell integriert und berücksichtigt, daß die Oberflächenintegrale infolge der Randbedingungen (3) verschwinden, erhält man

$$(\mathfrak{A}_s u, u) = \int_\Omega \sum_{k=0}^{s} \sum A_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} dx . \tag{5}$$

Wenn man auf der rechten Seite die nicht negativen Summen, welche den Indexwerten $k = 0, 1, \ldots, s-1$ entsprechen, unberücksichtigt läßt und die verbleibende Summe nach der Ungleichung (2) abschätzt, dann gelangt man zu der Beziehung

$$(\mathfrak{A}_s u, u) \geqq \mu_0 \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial^s u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_s}} \right)^2 dx . \tag{6}$$

Wie aus den Bedingungen (3) ersichtlich ist, gilt für die Funktion $u(x)$ sowie für jede in diese Bedingungen eingehende Ableitung dieser Funktion die FRIEDRICHSsche Ungleichung. Dies ergibt nun die folgende Kette von Ungleichungen:

$$\|u\|^2 = \int_\Omega u^2 \, dx \leqq \varkappa \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}\right)^2 dx \leqq \varkappa^2 \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}\right)^2 dx \leqq \cdots$$

$$\cdots \leqq \varkappa^s \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial^s u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_s}}\right)^2 dx . \tag{7}$$

Durch Vergleich der Beziehungen (6) und (7) erhalten wir die Ungleichung

$$(\mathfrak{A}_s u, u) \geqq \gamma^2 \|u\|^2 , \qquad \gamma = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varkappa^s}} , \tag{8}$$

welche zeigt, daß der Operator $\mathfrak{A}_s$ positiv-definit ist. Daraus folgt nun, daß das Problem (1), (3) eine und nur eine verallgemeinerte Lösung besitzt; diese kann man als Lösung des Minimumproblems für das Funktional

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=0}^{s} \sum A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} - 2 f u \right] dx \tag{9}$$

in dem entsprechenden energetischen Raum erhalten.

In der Form (1) läßt sich auch jedes System von gewissen N Gleichungen in N unbekannten Funktionen schreiben; dann sind $u(x)$ und $f(x)$ N-dimensionale Vektor-Funktionen und $A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$ quadratische Matrizen der Ordnung N. Wir nehmen an, daß diese Matrizen in bezug auf Permutationen der oberen und der unteren Indizes invariant sind; bei Ersetzen der oberen Indizes durch die unteren und umgekehrt gehe diese Matrix in die adjungierte Matrix über. Die Bedingung (2) hat man für ein solches System wie folgt zu formulieren:

$$\left(\sum A_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} (x) \, t_{i_1 i_2 \ldots i_s}, t_{j_1 j_2 \ldots j_s} \right) \geqq \mu_0 \sum \|t_{i_1 i_2 \ldots i_s}\|^2 . \tag{10}$$

Dabei ist μ_0 eine positive Konstante und $t_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ ein beliebiger N-dimensionaler Vektor, der in bezug auf Permutationen der Indizes $i_1, \ldots, i_s$ invariant ist;

die Symbole $(.,.)$ und $\|.\|$ bedeuten entsprechend das Skalarprodukt und die Norm von Vektoren im N-dimensionalen euklidischen Raum. In entsprechender Weise ändert sich auch die Bedingung (4).

Systeme der Gestalt (1), welche der Bedingung (10) genügen, gehören zur Klasse der sogenannten „stark elliptischen“ Systeme.[1]

Auf Systeme der Gestalt (1), welche der Bedingung (10) sowie der in entsprechender Weise abgewandelten Bedingung (4) genügen, lassen sich sämtliche Ergebnisse des vorliegenden Paragraphen ohne Schwierigkeit übertragen.

§ 8. Das DIRICHLETsche Problem für ein unendliches Gebiet

In der elliptischen Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C\,u = f(x)$$

sei die Matrix der Koeffizienten $A_{jk}(x)$ positiv, und der Koeffizient $C(x)$ genüge der Ungleichung

$$C(x) \geqq C_0 = \text{const} > 0\,.$$

Dann ist der Operator des entsprechenden DIRICHLETschen Problems, wie man leicht nachprüft, auch im Falle eines unendlichen Gebietes positiv-definit, und somit besitzt dieses Problem (bei einer homogenen Randbedingung) eine verallgemeinerte Lösung.

Von Interesse ist der Fall $C(x) \equiv 0$.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die LAPLACE-Gleichung mit einer homogenen Randbedingung. Ausführlicher ist der Fall unendlicher Gebiete in [13] betrachtet.

Es sei Ω ein unendliches Gebiet mit einem *endlichen*, stückweise glatten Rand Γ. In diesem Gebiet betrachten wir das DIRICHLETsche Problem

$$-\Delta u = f(x)\,, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0\,. \tag{2}$$

Den durch diese Aufgabe definierten Operator bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$. Als sein Definitionsgebiet $D(\mathfrak{B})$ nimmt man am zweckmäßigsten die Menge derjenigen Funktionen aus der Klasse $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, die auf dem Rande Γ sowie in einer gewissen (und für jede Funktion eigenen) Umgebung des unendlich fernen Punktes verschwinden; der Operator $\mathfrak{B}$ wird dann durch die Formel $\mathfrak{B}\,u = -\Delta\,u$ definiert. Wir betrachten $\mathfrak{B}$ als Operator im Raum $L_2(\Omega)$. Dann kann man beweisen, daß dieser Operator positiv, aber nicht positiv-definit ist. Zu diesem Zweck bilden wir das Skalarprodukt

$$(\mathfrak{B}\,u, v) = -\int_\Omega v\,\Delta u\,dx\,. \tag{3}$$

[1]) Umfassender kann man sich über stark elliptische Systeme in dem Artikel von M. I. VIŠIK [2] informieren.

Die Funktion $u(x)$ ist nur in einem gewissen endlichen Gebiet, über das in (3) auch faktisch integriert wird, von Null verschieden. Somit läßt sich auf das Integral (3) die GREENsche Formel (Formel (6.7) aus Kap. 10) anwenden. Berücksichtigt man dabei, daß auf dem Rande des genannten Gebietes $u = 0$ ist, dann erhält man

$$(\mathfrak{B}\, u, v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx\,,$$

der Operator $\mathfrak{B}$ ist also symmetrisch. Für $v = u$ ergibt sich

$$(\mathfrak{B}\, u, u) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \geqq 0\,. \tag{4}$$

Wenn $(\mathfrak{B}\, u, u) = 0$ ist, dann gilt offenbar

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

und somit

$$u(x) \equiv \text{const}\,.$$

Wegen $u|_\Gamma = 0$ ergibt sich schließlich $u(x) \equiv 0$. Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{B}$ ein positiver Operator ist.

In einem unendlichen Gebiet Ω mit einem endlichen Rand läßt sich stets ein Kubus mit beliebig großer Kantenlänge a unterbringen. Das Koordinatensystem wählen wir nun so, daß der Kubus durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x_k \leqq a\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

definiert wird.

Wir betrachten das Funktionensystem

$$u_a(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{m} \sin^3 \dfrac{\pi x_k}{a} & \text{innerhalb des Kubus,} \\ 0 & \text{außerhalb des Kubus.} \end{cases} \tag{5}$$

Offenbar ist $u_a(x) \in D(\mathfrak{B})$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$\frac{(\mathfrak{B}\, u_a, u_a)}{||u_a||^2} = \frac{c}{a^2}\,, \qquad c = \text{const}\,,$$

gilt. Daraus ergibt sich nun

$$\lim_{a\to\infty} \frac{(\mathfrak{B}\, u_a, u_a)}{||u_a||^2} = 0$$

und somit

$$\inf_{u \in D(\mathfrak{B})} \frac{(\mathfrak{B}\, u, u)}{||u||^2} = 0\,. \tag{6}$$

Gleichung (6) bedeutet aber, daß der Operator $\mathfrak{B}$ nicht poistiv-definit ist.

Entsprechend den Ausführungen des § 10 von Kap. 5 läßt sich mit dem Operator $\mathfrak{B}$ der energetische Raum $H_{\mathfrak{B}}$ verknüpfen. Da der Operator $\mathfrak{B}$ nur positiv ist, so gehören nicht alle Elemente des Raumes $H_{\mathfrak{B}}$ zum Ausgangsraum $L_2(\Omega)$. Man kann nun beweisen (was wir allerdings dem Leser überlassen), daß der Raum $H_{\mathfrak{B}}$ aus den und nur den Funktionen besteht, die 1. fast überall in Ω definiert sind, 2. in Ω quadratisch summierbare, verallgemeinerte erste Ableitungen besitzen und 3. der Randbedingung (2) in folgendem Sinne genügen: Für $u \in H_{\mathfrak{B}}$ existiert eine Folge von Funktionen $\{u_n(x)\}$, $u_n \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$, derart, daß $u_n(x) = 0$ auf dem Rande Γ sowie für hinreichend große $|x|$ gilt und die Beziehung

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

erfüllt ist.

Wie im § 10 von Kap. 5 bewiesen wurde, besitzt das Problem (1), (2) dann und nur dann eine verallgemeinerte Lösung, wenn das Funktional (u, f) $(u \in H_{\mathfrak{B}})$ im Raum $H_{\mathfrak{B}}$ beschränkt ist. Man kann beweisen, daß dafür wiederum notwendig und hinreichend ist, daß ein Vektor $F(x)$ existiert derart, daß gilt: $f(x) = \operatorname{div} F(x)$ und $||F(x)|| \in L_2(\Omega)$. Dabei wird die Divergenz im verallgemeinerten Sinne verstanden (analog zur verallgemeinerten Ableitung); das Symbol $||F(x)||$ bedeutet die Norm des Vektors $F(x)$ im m-dimensionalen euklidischen Raum.

Es läßt sich auch eine einfachere, aber nur hinreichende Bedingung angeben: Es existiert eine verallgemeinerte Lösung des Problems (1), (2), wenn die Dimension des Raumes $m > 2$ ist und wenn das Integral

$$\int_\Omega |x|^2 f^2(x)\, dx$$

konvergiert.

Übungsaufgaben

1. Man beweise, daß die Reihe (4.8) zweimal gliedweise differenzierbar ist und daß die durch die gliedweise Differentiation entstehenden Reihen in der Metrik des Raumes L_2 konvergieren. Daraus ist abzuleiten, daß für $f \in L_2(\Omega)$ die verallgemeinerte Lösung des Problems (4.3), (4.4) zweite verallgemeinerte Ableitungen besitzt, welche in Ω quadratisch summierbar sind.

2. Man beweise, daß der energetische Raum $H_{\mathfrak{A}_s}$ des Operators $\mathfrak{A}_s$ (vgl. § 7) aus den und nur den Funktionen besteht, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) Die Funktionen und ihre sämtlichen verallgemeinerten Ableitungen der Ordnung $\leq s$ gehören zur Klasse $L_2(\Omega)$;

(b) die Funktionen genügen den Randbedingungen (7.2) in dem folgenden Sinne: Für eine beliebige Funktion $u \in H_{\mathfrak{A}_s}$ existiert eine Folge von Funktionen $u_n(x) \in C^{(s)}(\overline{\Omega})$, welche die Bedingungen (7.2) sowie die Beziehung

$$\left\| \frac{\partial^k (u_n - u)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

erfüllen. Dabei ist die Norm im Sinne der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$ zu verstehen;

$k = 0, 1, \ldots, s$ und die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_k$ durchlaufen unabhängig von einander die Werte $1, 2, \ldots, m$.

3. Die einfachste elliptische Gleichung der Ordnung $2s$ ist die sogenannte *polyharmonische* Gleichung

$$(-1)^s \Delta^s u = f(x) .$$

Singuläre Lösung der homogenen polyharmonischen Gleichung

$$\Delta^s u = 0$$

heißt die Funktion

$$v(x, \xi) = \begin{cases} c\, r^{2s-m} \ln \frac{1}{r}, & m \text{ gerade } 2s > m, \\ c\, r^{2s-m}, \text{ sonst} \end{cases}$$

Dabei ist c eine Konstante, $r = |x - \xi|$.

Man beweise: Wenn $f \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ und

$$\psi(x) = \int_\Omega v(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

ist, dann gilt $\psi \in C^{(2s-1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(2s)}(\Omega)$ und, bei entsprechender Wahl der Konstanten c, $(-1)^s \Delta^s \psi(x) = f(x)$. Man bestimme diesen Wert der Konstanten c.

4. Man beweise: Wenn $u_0(x)$ eine Lösung der Gleichung $(-1)^s \Delta^s u = f(x)$ bei den Randbedingungen (7.3) und wenn $f \in C^{(1)}(\Omega)$ ist, dann gilt $u_0 \in C^{(2s)}(\Omega)$.

KAPITEL 15

DAS SPEKTRUM DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS

§ 1. Integraldarstellung einer Funktion, die auf dem Rande eines endlichen Gebietes verschwindet

Es sei Ω ein endliches Gebiet des m-dimensionalen euklidischen Raumes, das durch eine stückweise glatte Fläche Γ berandet wird. Des weiteren gelte $u \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ und

$$u|_\Gamma = 0 . \tag{1}$$

Mit ξ bezeichnen wir einen variablen Punkt des Gebietes Ω. Wir wählen in diesem Gebiet einen gewissen Punkt x und beschreiben um diesen eine Kugel D_ε, die ganz in Ω liegt (vgl. Abb. 14). Da die Funktionen $u(\xi)$ und $v(\xi) = \frac{1}{r^{m-2}}$, $r = |x - \xi|$, im Gebiet $\Omega \backslash D_\varepsilon$ einschließlich des Randes stetig differenzierbar sind, so können wir auf sie die erste GREENsche Formel für den LAPLACE-Operator [vgl. Formel (6.7) aus Kap. 10] anwenden. Dann gilt

$$\int_{\Omega\backslash D_\varepsilon} u\, \Delta v\, d\xi = -\int_{\Omega\backslash D_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi + \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_\varepsilon ; \tag{2}$$

dabei bedeutet S_ε die Oberfläche der Kugel D_ε.

Da nun die Funktion $v(\xi)$ in $\Omega \backslash D_\varepsilon$ harmonisch ist, so ist das Integral auf der linken Seite gleich Null. Infolge der Bedingung (1) verschwindet auch das Integral über die Fläche Γ. Die Formel (2) nimmt somit folgende einfache Gestalt an:

$$\int_{\Omega\backslash D_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi = \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_\varepsilon . \tag{3}$$

Die linke Seite der Gleichung (3) konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen das uneigentlich Integral

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi .$$

Der Grenzwert der rechten Seite wurde bereits im § 3 von Kap. 11 beim Beweis der Integraldarstellung für die Funktionen der Klasse $C^{(2)}$ bestimmt; dieser ist gleich $(m - 2)\, |S_1|\, u(x)$. Durch Gleichsetzen der beiden Grenzwerte

gelangen wir zu der gesuchten Integraldarstellung:

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi\,. \tag{4}$$

Die Formel (4) gilt aber nur für $m > 2$. Im Falle $m = 2$ hat sie folgende Gestalt:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \ln \frac{1}{r}\, d\xi\,. \tag{5}$$

Die Integraldarstellung (4) [entsprechend (5)] wurde unter der Voraussetzung gewonnen, daß $u \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ gilt und die Funktion u auf Γ verschwindet. Für das Weitere ist wichtig, daß sich diese Darstellung auf die Funktionen aus dem energetischen Raum $H_\mathfrak{A}$ des DIRICHLETschen Problems (vgl. Kap. 14, § 3) erweitern läßt.

Es gilt zunächst

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial \xi_k} = -\frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\xi_k - x_k}{r}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} \right| \leqq \frac{m-2}{r^{m-1}}\,.$$

Die letzte Abschätzung zeigt, daß das Integral auf der rechten Seite der Formel (4) ein Operator mit schwacher Singularität auf den Funktionen $\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$ ist (vgl. Kap. 7, § 3). Ein solcher Operator ist im Raum $L_2(\Omega)$ beschränkt (vgl. Satz 7.3.1).

Nach dem Satz 14.3.1 existiert für jedes $u \in H_\mathfrak{A}$ eine Folge $\{u_n\}$ derart daß gilt: $u_n \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$, $u_n|_\Gamma = 0$ und

$$\|u_n - u\|_{L_2} \underset{n\to\infty}{\to} 0\,; \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial \xi_k} - \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right\|_{L_2} \underset{n\to\infty}{\to} 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Für die Funktionen u_n ist die Darstellung (4) bereits bewiesen:

$$u_n(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi\,.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert die linke Seite der letzten Gleichung in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$ gegen $u(x)$. Gleichzeitig konvergiert in derselben Metrik $\frac{\partial u_n}{\partial \xi_k} \to \frac{\partial u}{\partial \xi_k}$. Da der Integraloperator auf der rechten Seite beschränkt ist, so kann man unter dem Integral zum Grenzwert übergehen. Als Ergebnis erhalten wir dann die Formel (4) für eine beliebige Funktion aus dem Raum $H_\mathfrak{A}$.

§ 2. Das Spektrum des DIRICHLETschen Problems für das endliche Gebiet

Satz 15.2.1. *Im Falle eines endlichen Gebietes mit einem stückweise glatten Rand besitzt der Operator des* DIRICHLET*schen Problems für die nicht entartete selbstadjungierte elliptische Gleichung ein diskretes Spektrum.*

Beweis. Es sei M eine beschränkte Menge im Raum $H_{\mathfrak{A}}$:

$$|u|_{\mathfrak{A}} \leqq c = \text{const}, \quad \forall\, u \in M .$$

Auf Grund der Formel (3.3) des Kap. 14 erhalten wir

$$\int\limits_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C\, u^2 \right] dx \leqq c^2 .$$

Aus der Beziehung (2.3) des Kap. 14 ergibt sich dann die Ungleichung

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \leqq \frac{c^2}{\mu_0} .$$

Folglich gilt

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \leqq \frac{c}{\sqrt{\mu_0}} .$$

Die Ableitungen der Funktion $u \in M$ bilden somit eine in $L_2(\Omega)$ beschränkte Menge. Da der Integraloperator (1.4) in $L_2(\Omega)$ ein vollstetiger Operator von $\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$ ist (vgl. Satz 7.3.2), so bildet dieser die genannte Menge von Ableitungen auf eine im Raum $L_2(\Omega)$ kompakte Menge ab. Letztere stimmt aber auf Grund der Formel (1.4) mit der Menge M überein. Somit ist M eine im Raum $L_2(\Omega)$ kompakte Menge.

Also ist jede in $H_{\mathfrak{A}}$ beschränkte Menge im Raum $L_2(\Omega)$ kompakt. Auf Grund des Satzes 6.6.1 besitzt dann der Operator $\mathfrak{A}$ ein diskretes Spektrum, und der Satz ist bewiesen.

Aus dem soeben bewiesenen Satz und dem Satz 6.6.1 ergibt sich die folgende Behauptung:

Es existiert eine abzählbare Menge von Parameterwerten $\{\lambda_n\}$, für die das Problem

$$\Delta u + \lambda\, u \quad 0\,, \qquad x \in \Omega\,, \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{1}$$

eine nicht triviale Lösung besitzt. Die Werte λ_n sind die Eigenwerte des Operators des DIRICHLETschen Problems (kurz Eigenwerte des DIRICHLETschen Problems genannt); die entsprechenden nicht trivialen Lösungen des Problems (1) sind die zum Eigenwert λ_n gehöiigen Eigenfunktionen. Jedem Eigenwert entsprechen nur endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen. Jeden Eigenwert wiederholen wir so oft, wie ihm Eigenfunktionen entsprechen. Sämtliche Eigenwerte sind positiv, und es gilt

$$\lambda_n \underset{n \to \infty}{\to} \infty . \tag{2}$$

Das System der Eigenfunktionen $\{u_n\}$ kann man als orthonormiert in $L_2(\Omega)$ annehmen:

$$(u_j, u_k) = \delta_{jk}; \qquad j, k = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Im Raum $H_{\mathfrak{A}}$ ist dieses System ebenfalls orthogonal, jedoch nicht normiert; es gilt nämlich

$$[u_j, u_k]_{\mathfrak{A}} = 0\,, \qquad j \neq k; \qquad [u_k, u_k]_{\mathfrak{A}} = |u_k|_{\mathfrak{A}}^2 = \lambda_k. \tag{4}$$

In jedem der Räume $L_2(\Omega)$ und $H_{\mathfrak{A}}$ ist das System der Eigenfunktionen $\{u_n\}$ vollständig.

§ 3. Einige Elementarfälle

Es ist außerordentlich schwierig, mit Hilfe des Satzes 6.6.1 das Spektrum eines positiv-definiten Operators effektiv zu bestimmen. Das sieht man schon allein daran, daß man bei einer solchen Methode gezwungen ist, aus der Minimalfolge eine konvergente Teilfolge auszuwählen. Deshalb sind solche Spezialfälle von Interesse, in denen sich das Spektrum des Dirichletschen Problems explizit angeben läßt. Im folgenden geben wir einige Beispiele für Gebiete an, die eine elementare Darstellung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Dirichletschen Problems für die Laplace-Gleichung zulassen.

1. Das Parallelepiped im m-dimensionalen Raum. Wenn n eine natürliche Zahl bedeutet, dann genügt die Funktion

$$u_n(t) = \sin\frac{n\,\pi\,t}{a} \tag{1}$$

der reellen Veränderlichen t der Differentialgleichung

$$u_n'' + \frac{n^2\,\pi^2}{a^2}\,u_n = 0$$

sowie den Randbedingungen $u_n(0) = u_n(a) = 0$. Daraus folgt, daß die Funktion

$$u_{n_1 n_2 \ldots n_m}(x) = c \prod_{k=1}^{m} \sin\frac{n_k\,\pi\,x_k}{a_k}\,, \qquad c = \text{const}\,, \tag{2}$$

die Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda\,u = 0\,, \qquad \lambda = \pi^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2}$$

erfüllt und auf der Oberfläche des Parallelepipeds

$$0 < x_k < a_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{3}$$

verschwindet. Somit sind die Funktionen (2) Eigenfunktionen des Dirichletschen Problems für den Laplace-Operator im Parallelepiped (3); die zugehörigen Eigenwerte haben die Gestalt

$$\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \pi^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2}\,. \tag{4}$$

Das System (2) ist orthogonal in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$, wobei jetzt Ω

das Parallelepiped (3) bedeutet; es ist normiert, wenn

$$c = 2^{m/2} \prod_{k=1}^{m} a_k^{-1/2} \tag{5}$$

gesetzt wird.

Das System (2) ist im Raum $L_2(\Omega)$ auch vollständig; letzteres kann man leicht beweisen, indem man die Vollständigkeit des Systems (1) im Raum $L_2(0, a)$ benutzt und die Überlegungen aus dem § 2 des Kap. 7 wiederholt. Daraus folgt insbesondere, daß mit dem System (2) das System der Eigenfunktionen des DIRICHLETschen Problems für die LAPLACE-Gleichung im Parallelepiped erschöpft ist.

2. Der Kreis in der zweidimensionalen Ebene. In der Ebene mit den Polarkoordinaten ϱ, θ betrachten wir die Gleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

oder in der ausführlicheren Form[1])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u = 0 \tag{6}$$

mit der Randbedingung

$$u|_{\varrho=1} = 0\,. \tag{7}$$

Wir suchen nichttriviale Lösungen des Problems (6), (7) nach der sogenannten *Methode der Separation der Variablen.* Man sucht dabei diejenigen Lösungen auf, welche sich in der Form

$$u = f(\varrho)\,\varphi(\theta) \tag{8}$$

darstellen lassen.

Die Bedingung (7) führt dann auf folgende Randbedingung für die Funktion $f(\varrho)$:

$$f(1) = 0\,. \tag{9}$$

---

[1]) Wenn x und y die cartesischen Koordinaten in der Ebene sind, dann ist $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$. Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \cos\theta \frac{\partial u}{\partial \varrho}$$

und weiter

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} - \frac{2}{\varrho} \cos\theta \sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial \theta} + \frac{1}{\varrho^2} \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{\sin 2\theta}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \cos\theta \sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial \theta} + \frac{1}{\varrho^2} \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\sin 2\theta}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Somit gilt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Setzt man die Funktion (8) in die Gleichung (6) ein, dann erhält man leicht die Beziehung

$$\frac{\varrho^2}{f}\left(f'' + \frac{1}{\varrho} f' + \lambda f\right) = -\frac{\varphi''}{\varphi}. \tag{10}$$

In Gleichung (10) hängt die linke Seite nicht von θ und die rechte Seite nicht von ϱ ab; da beide Seiten gleich sind, so hängen sie weder von ϱ noch von θ ab und sind folglich gleich einer Konstanten, die wir mit n^2 bezeichnen wollen. Anstelle der Gleichung (10) erhalten wir jetzt zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\varphi''(\theta) + n^2 \varphi(\theta) = 0 \tag{11}$$

und

$$f''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} f'(\varrho) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\varrho^2}\right) f(\varrho) = 0\,. \tag{12}$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (11) hat die Gestalt

$$\varphi(\theta) = C_1 \cos n\,\theta + C_2 \sin n\,\theta\,. \tag{13}$$

Da die Funktion (8) eine eindeutige Funktion in der Ebene sein soll, so muß n eine ganze Zahl sein. Dabei genügt es, nicht negative n zu betrachten — eine Vorzeichenänderung bei n hätte lediglich auf die Konstante C_2 einen Einfluß.

Das allgemeine Integral der Gleichung (12) läßt sich über die BESSEL-Funktionen darstellen[1]):

$$f(\varrho) = C_3 J_n(\sqrt{\lambda}\,\varrho) + C_4 Y_n(\sqrt{\lambda}\,\varrho)\,.$$

Nach Definition gehören die Eigenfunktionen des DIRICHLETschen Problems zum energetischen Raum $H_{\mathfrak{A}}$ (vgl. § 3 von Kap. 14), und folglich sind die ersten Ableitungen dieser Funktionen im Kreis $\varrho < 1$ quadratisch summierbar. Da die BESSEL-Funktion 2. Art $Y_n(\sqrt{\lambda}\,\varrho)$ diese Eigenschaft nicht besitzt, so muß notwendigerweise $C_4 = 0$ sein. Der Wert der Konstanten C_3 ist für das Weitere unwesentlich (notwendig ist nur $C_3 \neq 0$), und wir setzen daher $C_3 = 1$. Dann gilt

$$f(\varrho) = J_n(\sqrt{\lambda}\,\varrho)\,.$$

Aus der Bedingung (9) ergibt sich jetzt

$$\lambda = j_{n,k}^2\,; \tag{14}$$

dabei bedeutet $j_{n,k}$ die k-te positive Wurzel der BESSEL-Funktion 1. Art J_n. Wir erhalten also

$$f(\varrho) = J_n(j_{n,k}\,\varrho)\,. \tag{15}$$

Die Formeln (13)—(15) lassen den Schluß zu, daß die Zahlen

$$j_{n,k}^2\,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{16}$$

---

[1]) In den Bezeichnungen der BESSEL-Funktionen halten wir uns an das Buch von G. N. WATSON, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1944.

die Eigenwerte des DIRICHLETschen Problems für den LAPLACE-Operator im Einheitskreis sind; jedem Eigenwert $j_{0,k}^2$ entspricht eine Eigenfunktion

$$J_0(j_{0,k}\,\varrho)\,, \tag{17$_1$}$$

und zu jedem Eigenwert $j_{n,k}^2$, $n > 0$, gehören zwei Eigenfunktionen

$$J_n(j_{n,k}\,\varrho)\cos n\,\theta\,, \qquad J_n(j_{n,k}\,\varrho)\sin n\,\theta\,. \tag{17$_2$}$$

Wenn Ω den Kreis $\varrho < 1$ bezeichnet, dann sind die Funktionen (17) im Raum $L_2(\Omega)$ orthogonal (aber nicht normiert) und bilden ein vollständiges System — sowohl das eine als auch das andere folgt aus bekannten Eigenschaften der BESSEL-Funktionen sowie aus obigen Bemerkungen über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionenprodukten (vgl. Satz 7.2.2). Daraus ergibt sich nun, daß durch die Formeln (16) und (17) die Gesamtheit aller Eigenwerte und Eigenfunktionen des DIRICHLETschen Problems für die LAPLACE-Gleichung im Kreis erfaßt wird.

Bemerkung. Die Eigenfunktionen des DIRICHLETschen Problems für den LAPLACE-Operator können im Falle einer Kugel von beliebiger Dimension mit Hilfe der BESSEL- und der Kugelfunktionen dargestellt werden.

§ 4. Die Wachstumsordnung der Eigenwerte

1. Die LAPLACE-Gleichung im m-dimensionalen Kubus. Im m-dimensionalen Kubus Q, der durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x_k \leqq a\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

erklärt sei, lassen sich die Eigenwerte des DIRICHLETschen Problems für die LAPLACE-Gleichung wie folgt darstellen [vgl. Formel (3.4)]:

$$\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{m} n_k^2\,. \tag{1}$$

Die Eigenwerte (1) ordnen wir nach ihrer Größe; bezeichnen wir in einer solchen Anordnung den n-ten Eigenwert mit λ_n, dann erhalten wir eine nichtfallende Folge $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$. Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, die Wachstumsordnung der Größe λ_n für $n \to \infty$ zu bestimmen.

Es erweist sich dabei als günstiger, nicht die Eigenwerte λ_n selbst, sondern die Zahlen

$$\lambda_n' = \frac{a^2}{\pi^2}\lambda_n = \sum_{k=1}^{m} n_k^2 \tag{2}$$

abzuschätzen.

Dazu betrachten wir im m-dimensionalen euklidischen Raum eine Kugel D_N vom Radius N mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung; die Zahl N wählen wir hinreichend groß und derart, daß für eine der Zahlen (2) gilt: $\lambda_n' = N^2$. Von solchen Zahlen λ_n' kann es mehrere geben. Wir bezeichnen mit ν_1 und ν_2 entsprechend den kleinsten bzw. den größten Wert n, für den $\lambda_n' = N^2$

gilt. Die Größe ν_2 gibt an, wieviel Zahlen der Gestalt (2) in der abgeschlossenen Kugel $\overline{D}_N$ liegen. Aus derselben Formel (2) ist auch ersichtlich, daß ν_2 gleich der Anzahl der Punkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten ist, die in der Kugel $\overline{D}_N$ enthalten sind. Die genannte Anzahl ist gleich dem Volumen des kubischen Gitters T_m mit der Seitenlänge 1, das sich in den ersten Oktanten der Kugel D_N einbeschreiben läßt (in Abb. 26 ist der zweidimensionale Fall dargestellt). Das Volumen des Gitters T_m ist offenbar kleiner als das Volumen des Oktanten:

$$\nu_2 < \frac{|S_1|}{2^m\, m} N^m . \tag{3}$$

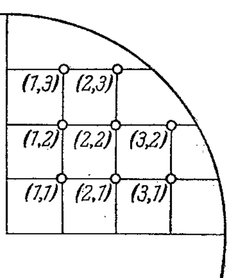


Abb. 26

Wir betrachten jetzt die Kugel D_{N-2} vom Radius $N-2$ mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Man überzeugt sich leicht davon, daß der erste Oktant dieser Kugel im Gitter T_m enthalten ist. Dafür genügt es zu zeigen, daß für einen beliebigen Eckpunkt $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ des Gitters T_m gilt

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 > (N-2)^2 . \tag{4}$$

Ein Eckpunkt des Gitters ist dadurch charakterisiert, daß für ihn die folgenden beiden Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_m^2 = \sum_{k=1}^{m} n_k^2 \leqq N^2 ,$$

$$\sum_{k=1}^{m} (n_k+1)^2 = \sum_{k=1}^{m} n_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{m} n_k + m > N^2 . \tag{5}$$

Aus der zweiten der Ungleichungen (5) ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 > N^2 - 2 \sum_{k=1}^{m} n_k - m \geqq N^2 - 2\,N\,m - m = (N-m)^2 - m^2 - m;$$

für hinreichend großes N ist die rechte Seite der letzten Ungleichung größer als $(N-m-1)^2$.

Wir erhalten somit

$$\nu_2 > \frac{|S_1|}{2^m\, m} (N-m-1)^m . \tag{6}$$

Die Ungleichungen (3) und (6) zeigen nun, daß für hinreichend großes N die folgende Abschätzung gilt:

$$\nu_2 = \frac{|S_1|}{2^m\, m} N + o(N^m) = \frac{\pi^{m/2}\, N^m}{2^{m-1}\, m\, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m) . \tag{7}$$

Wir schätzen jetzt die Größe ν_1 ab. Offenbar gilt $\nu_1 = \nu_2 - \sigma$, wobei σ die Anzahl der Punkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten bezeichnet, die auf der Kugeloberfläche

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 = N^2$$

von D_N gelegen sind. Durch die genannten Punkte legen wir Geraden, die zur m-ten Koordinatenachse parallel sind. Auf diesen Geraden sind dann die ersten $m - 1$ Koordinaten positiv und ganzzahlig; die Schnittpunkte der genannten Geraden mit der Ebene $n_m = 0$ erzeugen ein kubisches Gitter T_{m-1}, das ähnlich wie das Gitter T_m beschaffen ist, jedoch eine um Eins niedrigere Dimension besitzt. Daraus ergibt sich, daß die Zahl σ gleich dem Volumen des $\big((m-1)$-dimensionalen$\big)$ Gitters T_{m-1} ist und somit eine zu (7) analoge Formel gilt:

$$\sigma = \frac{\pi^{(m-1)/2}\, N^{m-1}}{2^{m-2}\,(m-1)\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} + o(N^{m-1})\,. \tag{8}$$

Aus den Beziehungen (7) und (8) sowie der Gleichung $\nu_1 = \nu_2 - \sigma$ erhalten wir

$$\nu_1 = \frac{\pi^{m/2}\, N^m}{2^{m-1}\, m\, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m)\,. \tag{9}$$

Wir erinnern schließlich daran, daß n eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet, für die $\lambda'_n = N^2$ und $\nu_1 \leqq n \leqq \nu_2$ gilt. Die Gleichungen (7) und (9) liefern dann

$$n = \frac{\pi^{m/2}\, N^m}{2^{m-1}\, m\, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m)\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\lambda_n = c_m\, n^{2/m} + o(n^{2/m})\,, \tag{10}$$

wobei c_m eine Konstante bedeutet, die sich unschwer berechnen läßt.

2. Der allgemeine Fall. Wir betrachten den Operator $\mathfrak{A}$ des DIRICHLETschen Problems (vgl. Kap. 14, § 2); die Koeffizienten A_{jk} und C sollen die Bedingungen (2.3) und (2.4) aus Kap. 14 erfüllen, so daß die Ungleichung (2.11) desselben Kapitels gilt. Für das Weitere ist wichtig, daß auch die umgekehrte Ungleichung gilt.

Die Koeffizienten $A_{jk}(x)$ sind im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$ stetig und folglich beschränkt. Daraus ergibt sich, daß der größte Eigenwert der Koeffizientenmatrix $\{A_{jk}(x)\}$ ebenfalls beschränkt ist. Es sei M_0 eine seiner oberen Schranken. Dann gilt

$$A_{jk}(x)\, t_j\, t_k \leqq M_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2\,. \tag{11}$$

Der Koeffizient $C(x)$ ist in $\overline{\Omega}$ ebenfalls stetig und beschränkt; es sei etwa $C(x) \leqq M_1$. Dann ergibt sich für $u \in D(\mathfrak{A})$ die Ungleichung

$$(\mathfrak{A}\, u, u) \leqq M_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + M_1 \int\limits_{\Omega} u^2\, dx\,.$$

Durch Anwendung der FRIEDRICHSschen Ungleichung auf das zweite Integral erhalten wir schließlich

$$(\mathfrak{A}\, u, u) \leqq \mu_1 \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx; \qquad \mu_1 = M_0 + \varkappa\, M_1\,. \tag{12}$$

Wir konstruieren jetzt zwei Kuben Q_1 und Q_2, von denen der erste das Gebiet Ω enthält und der zweite im Gebiet Ω enthalten ist. Mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ bezeichnen wir entsprechend die Operatoren des DIRICHLETschen Problems für die LAPLACE-Gleichung in den Gebieten Q_1 und Q_2.

Des weiteren bezeichnen wir mit $\lambda_n, \lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}$ die der Größe nach geordneten Eigenwerte der Operatoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$. Die genannten Operatoren sind durch folgende Ungleichungen verknüpft:

$$\mu_0\, \mathfrak{A}_1 \leqq \mathfrak{A} \leqq \mu_1\, \mathfrak{A}_2\,.$$

(Man beweise diese Beziehungen!). Dabei bedeutet μ_0 die Konstante aus der Ungleichung (2.11) von Kap. 14. Auf Grund des Mini-Max-Prinzips gilt

$$\mu_0\, \lambda_n^{(1)} \leqq \lambda_n \leqq \mu_1\, \lambda_n^{(2)}\,. \tag{13}$$

Da aber die Zahlen $\lambda_n^{(1)}$ und $\lambda_n^{(2)}$ Beziehungen der Gestalt (10) genügen, so ergibt sich für die Eigenwerte λ_n des Operators $\mathfrak{A}$ folgende zweiseitige Abschätzung:

$$c_1\, n^{2/m} \leqq \lambda_n \leqq c_2\, n^{2/m}; \qquad c_1, c_2 = \text{const} > 0\,. \tag{14}$$

Bemerkung. In Wirklichkeit gilt eine schärfere Aussage: Es existiert der Grenzwert

$$\lim \frac{n}{\lambda_n^{m/2}}$$

und dieser ist gleich der Größe

$$c_m' \int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{Det} A(x)}}\,, \qquad c_m' = \text{const}\,.$$

Dabei bedeutet $A(x)$ die Koeffizientenmatrix $\{A_{jk}(x)\}$, und c_m' hängt nur von der Dimension m des Raumes ab (vgl. T. CARLEMAN [5] sowie W. I. SMIRNOW [17], Bd. IV).

KAPITEL 16

DAS NEUMANNSCHE PROBLEM

§ 1. Der Fall des positiven Koeffizienten $C(x)$

Wir betrachten die formal selbstadjungierte Gleichung vom elliptischen Typ

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u=f(x)\,. \tag{1}$$

Die Lösung dieser Gleichung wird im endlichen Gebiet $\Omega\subset E_m$ mit dem stückweise glatten Rand Γ gesucht.

Wir setzen voraus, daß

$$A_{jk}\in C^{(1)}(\bar{\Omega})\,,\qquad C\in C(\bar{\Omega})$$

gilt und daß die Gleichung (1) in $\bar{\Omega}$ nicht entartet, d. h. für beliebige reelle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ die Ungleichung

$$A_{jk}(x)\,t_j\,t_k\geqq\mu_0\sum_{k=1}^{m}t_k^2 \tag{2}$$

für eine gewisse positive Konstante μ_0 erfüllt ist.

Für die Gleichung (1) formulieren wir die homogene Randbedingung des NEUMANNschen Problems

$$A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)|_\Gamma=0\,, \tag{3}$$

dabei bedeutet ν die äußere Normale an Γ.

Den durch das NEUMANNsche Problem erzeugten Operator bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$. Als sein Definitionsgebiet $D(\mathfrak{N})$ wählen wir die Menge der Funktionen aus $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, die der Bedingung (3) genügen; auf dieser Menge ist dann der Operator $\mathfrak{N}$ durch die Formel

$$\mathfrak{N}\,u=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C\,u$$

definiert.

Wir betrachten $\mathfrak{N}$ als Operator im Raum $L_2(\Omega)$ und beweisen zunächst seine Symmetrie. Sein Definitionsgebiet ist in $L_2(\Omega)$ dicht, da dieses offenbar die im Raum $L_2(\Omega)$ dichte Menge der finiten Funktionen enthält.

Wir bilden jetzt das Skalarprodukt

$$(\mathfrak{N}\,u, v)=-\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dx+\int_\Omega C\,u\,v\,dx\,.$$

Das erste Integral integrieren wir partiell:

$$(\mathfrak{N} u, v) = -\int_{\Gamma} v\, A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j)\, d\Gamma + \int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int_{\Omega} C\, u\, v\, dx\,.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite verschwindet auf Grund der Randbedingung (3), während die letzten beiden Integrale offensichtlich symmetrisch sind. Damit ist die Symmetrie des Operators $\mathfrak{N}$ bewiesen. Gleichzeitig ergibt sich die Formel

$$(\mathfrak{N} u, v) = \int_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C\, u\, v \right] dx\,. \tag{4}$$

Wenn wir in dieser Formel $v = u$ setzen, dann erhalten wir

$$(\mathfrak{N} u, u) = \int_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C\, u^2 \right] dx\,. \tag{5}$$

Da offenbar

$$\int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx \geqq \mu_0 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \geqq 0$$

gilt, so ergibt sich leicht folgende hinreichende Bedingung für die positive Definitheit des Operators $\mathfrak{N}$:

$$C(x) \geqq C_0 = \text{const} > 0\,. \tag{6}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, dann gilt

$$(\mathfrak{N} u, u) \geqq C_0 \int_{\Omega} u^2\, dx = C_0\, ||u||^2\,.$$

Dies ist die Ungleichung für die positive Definitheit mit der Konstanten $\gamma = \sqrt{C_0}$. Da sich natürlich im Falle solcher Koeffizienten $C(x)$ die früher entwickelte Theorie anwenden läßt, so besitzt das NEUMANNsche Problem eine und nur eine verallgemeinerte Lösung.

§ 2. Der Fall $C(x) \equiv 0$

Dieser Fall, dem alle übrigen Paragraphen dieses Kapitels gewidmet sind, ist der interessantere und auch schwierigere Fall. Wenn $C(x) \equiv 0$ ist, dann gilt

$$\mathfrak{N} u = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \tag{1}$$

und

$$(\mathfrak{N} u, u) = \int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx\,; \tag{2}$$

die Randbedingung (1.3) bleibt unverändert.

Im vorliegenden Fall ist der Operator $\mathfrak{N}$ nicht nur nicht positiv-definit, sondern auch nicht positiv. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, die

Funktion $u_0(x) \equiv 1$ zu betrachten. Diese besitzt sämtliche Ableitungen und erfüllt die Randbedingung (1.3), so daß folglich $u_0 \in D(\mathfrak{N})$ gilt; offensichtlich ist auch $\|u_0\| > 0$. Gleichzeitig gilt $(\mathfrak{N}\, u_0, u_0) = 0$, was aber nicht der Fall sein könnte, wenn $\mathfrak{N}$ ein positiver Operator wäre.

Das NEUMANNsche Problem

$$\mathfrak{N}\, u = f \tag{3}$$

oder in der ausführlicheren Form

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x)\,, \qquad A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)|_\Gamma = 0\,, \tag{3$_1$}$$

ist nicht lösbar, wenn nicht $f(x)$ eine gewisse spezielle Bedingung erfüllt, die wir jetzt herleiten wollen.

Wir nehmen an, das Problem (3) besitze eine Lösung $u \in D(\mathfrak{N})$.

Beide Seiten der Differentialgleichung (3_1) integrieren wir über das Gebiet Ω. Indem wir auf der linken Seite partiell integrieren und die Randbedingung von (3_1) benutzen, erhalten wir die gesuchte Bedingung

$$\int_\Omega f(x)\, dx = (f, 1) = 0\,. \tag{4}$$

Somit ist es zweckmäßig, Gleichung (3) nicht für beliebige $f \in L_2(\Omega)$, sondern nur für solche f zu betrachten, die dem zur Eins orthogonalen Unterraum angehören. Diesen Unterraum bezeichnen wir mit $\widetilde{L}_2(\Omega)$. Die soeben gewonnene Bedingung (4) gestattet dann folgende Formulierung: Im Falle $C(x) \equiv 0$ bildet der Operator $\mathfrak{N}$ jede Funktion $D(\mathfrak{N})$ in eine Funktion aus $\widetilde{L}_2(\Omega)$ ab.

Andererseits ist die Lösung des Problems (3), wenn sie existiert, nicht eindeutig[1]): Wenn $u_0(x)$ eine Lösung des Problems (3) ist, dann ist auch die Funktion $u_0(x) + c$ für eine beliebige Konstante c eine solche Lösung. Andere Lösungen gibt es nicht. Wenn nämlich $u_0(x)$ und $u_1(x)$ zwei Lösungen des Problems (3) sind, dann genügt die Differenz $v(x) = u_0(x) - u_1(x)$ der homogenen Gleichung $\mathfrak{N}\, v = 0$. Aus der Formel (1.5) erhalten wir für $C(x) \equiv 0$ die Beziehung

$$\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx = 0\,.$$

Da aber die Koeffizientenmatrix $\{A_{jk}\}$ positiv-definit ist, so muß notwendigerweise $\frac{\partial v}{\partial x_k} \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ und somit $v(x) \equiv \text{const}$ gelten, was zu beweisen war.

Man kann die Eindeutigkeit der Lösung des NEUMANNschen Problems garantieren, wenn man verlangt, daß diese dem oben eingeführten Unterraum $\widetilde{L}_2(\Omega)$ angehört; durch diese Bedingung ist nämlich die Konstante c eindeutig bestimmt.

---

[1]) Ähnliche Überlegungen wie die folgenden haben wir bereits im Kap. 12 bei der LAPLACE-Gleichung angestellt.

Die zuletzt ausgesprochene Forderung kann man auch wie folgt formulieren: Wir gehen zur Einengung des Operators $\mathfrak{N}$ über, indem wir sein Definitionsgebiet $D(\mathfrak{N})$ durch die Teilmenge $D(\mathfrak{N}) \cap \widetilde{L}_2(\Omega)$ ersetzen. Den auf diese Weise eingeengten Operator bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_0$. Sein Definitionsgebiet ist die Menge $D(\mathfrak{N}_0) = D(\mathfrak{N}) \cap \widetilde{L}_2(\Omega)$, und sein Wertebereich gehört, ebenso wie dei des Operators $\mathfrak{N}$, zu $\widetilde{L}_2(\Omega)$.

Somit gehören sowohl das Definitionsgebiet als auch der Wertebereich des Operators $\mathfrak{N}_0$ zum Unterraum $\widetilde{L}_2(\Omega)$. Folglich kann man $\widetilde{L}_2(\Omega)$ als einen Raum betrachten, den der Operator $\mathfrak{N}_0$ in sich abbildet. Unschwer sieht man, daß in diesem Raum der Operator $\mathfrak{N}_0$ positiv ist. In der Tat, für diesen Operator behält die Formel (1.5) offensichtlich ihre Gültigkeit:

$$(\mathfrak{N}_0 u, u) = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx . \tag{5}$$

Daraus ergibt sich $(\mathfrak{N}_0 u, u) \geqq 0$. Wenn $(\mathfrak{N}_0 u, u) = 0$ ist, dann erhalten wir $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ und somit $u(x) \equiv c = \text{const}$. Wegen $u \in \widetilde{L}_2(\Omega)$ gilt aber

$$0 = (c, 1) = c \int_\Omega d\Omega = c\,|\Omega| .$$

Daraus folgt nun $c = 0$ und damit $u(x) \equiv 0$, was zu beweisen war.

Unser nächstes Ziel ist zu beweisen, daß der Operator $\mathfrak{N}_0$ positiv-definit ist. Diesem Beweis sind die folgenden drei Paragraphen gewidmet.

§ 3. Die Integraldarstellung von S. L. Sobolew

Wir betrachten ein endliches Gebiet $\Omega \subset E_m$, das die folgende Eigenschaft besitzt: In jedem Punkt, der im Inneren dieses Gebietes oder auf dessen Rand liegt, läßt sich ein Kugelsektor mit diesem Punkt als Scheitel, einem festen Radius R und einem Öffnungswinkel 2α errichten, der (mit möglicher Ausnahme des Scheitels) ganz im Gebiet Ω gelegen ist (vgl. Abb. 27). In diesem Fall sagt man, das Gebiet Ω erfülle die *Konusbedingung*.

Wir betrachten jetzt eine Funktion $\psi(t)$ der reellen Veränderlichen t, die auf dem Segment $0 \leqq t \leqq 1$ beliebig oft differenzierbar ist und für die gilt

$$\psi(t) = 1 , \qquad 0 \leqq t \leqq \frac{1}{3} ,$$

$$\psi(t) = 0 , \quad \frac{2}{3} \leqq t \leqq 1 .$$

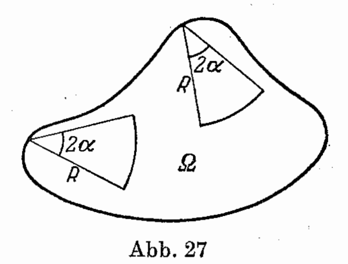


Abb. 27

Eine solche Funktion ist z. B. die Mittelfunktion der Funktion

$$\psi_0(t) = \begin{cases} 1, & t < \frac{1}{2}, \\ 0, & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

mit dem Mittelungsradius $h < \frac{1}{6}$.

Es sei jetzt $u \in C^{(1)}(\Omega)$. Wir wählen in Ω einen Punkt x und konstruieren einen in Ω gelegenen Kugelsektor mit dem Scheitel x. Danach führen wir die Kugelkoordinaten[1]) $r = |x - \xi|$, $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$ mit dem Mittelpunkt x ein derart, daß die Gleichung der Mantelfläche des Kugelsektors die Gestalt $\vartheta_1 = \alpha$ annimmt. Schließlich setzen wir

$$v(\xi) = v(r, \theta) = v(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}) = u(\xi)\, \psi\left(\frac{r}{R}\right). \tag{1}$$

Dann gilt offenbar

$$v(0, \theta) = u(x), \qquad v(R, \theta) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = u(\xi) \frac{\partial \psi\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial r} + \psi\left(\frac{r}{R}\right) \frac{\partial u(\xi)}{\partial r}. \tag{3}$$

Aus den Formeln (2) ergibt sich

$$u(x) = -\int_0^R \frac{\partial v}{\partial r}\, dr. \tag{4}$$

Wir integrieren jetzt die Gleichung (4) über den Teil S_1' der Einheitssphäre S_1, für den $0 \leqq \vartheta_1 \leqq \alpha$ gilt (d. h. also über den Teil, der durch die Mantelfläche des Kugelsektors aus der Einheitssphäre herausgeschnitten wird). Dabei wird die linke Seite von (4) mit der positiven Konstanten $b = |S_1'|$ multipliziert; nach Division durch b erhalten wir dann die Formel

$$u(x) = -\frac{1}{b} \int_{V_x} \frac{\partial v}{\partial r}\, dr\, dS_1 = -\frac{1}{b} \int_{V_x} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{d\xi}{r^{m-1}}, \tag{5}$$

wobei V_x den Kugelsektor mit dem Scheitel x bedeutet.

Wir ersetzen jetzt $\frac{\partial v}{\partial r}$ nach der Formel (3) und berücksichtigen die Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cos(\xi_k, r);$$

hier bedeuten ξ_k die festen cartesischen Koordinatenachsen. Schließlich führen

[1]) Wir setzen hier $m > 2$ voraus; für den Fall $m = 2$ lassen sich die nachfolgenden Überlegungen leicht modifizieren.

wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$B_0(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{b} \frac{\partial \psi\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial r}, & \xi \in V_x, \\ 0, & \xi \notin V_x, \end{cases}$$

$$B_k(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{b} \psi\left(\frac{r}{R}\right) \cos(\xi_k, r), & \xi \in V_x, \\ 0, & \xi \notin V_x, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m;$$

die Funktionen $B_0(x, \xi)$ und $B_k(x, \xi)$ sind offenbar beschränkt. Der Formel (5) kann man jetzt folgende Gestalt geben:

$$u(x) = \int_\Omega \frac{B_0(x, \xi)}{r^{m-1}} u(\xi)\, d\xi + \int_\Omega \frac{B_k(x, \xi)}{r^{m-1}} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} d\xi . \tag{6}$$

Die Beziehung (6) ist die gesuchte Integraldarstellung von S. L. Sobolew.

Für das Weitere ist wichtig, daß die Integrale (6) im Raum $L_2(\Omega)$ vollstetige Operatoren über den Funktionen u und $\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$ darstellen. In der Tat, da $B_0(x, \xi) \equiv 0$ für $r < \frac{R}{3}$ gilt, so ist der Kern des ersten Integrals in (6) beschränkt, und folglich ist dieses Integral ein Fredholmscher Operator über u. Die übrigen Integrale in der Formel (6) sind Integraloperatoren mit schwacher Singularität über den Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$.

In den folgenden Paragraphen des vorliegenden Kapitels wird vorausgesetzt, daß das Gebiet Ω endlich ist und die Konusbedingung erfüllt.

Die Integraldarstellung (6) haben wir für die Funktionen der Klasse $C^{(1)}(\Omega)$ erhalten. Man kann sie aber leicht auf solche Funktionen erweitern, die in Ω summierbar sind und verallgemeinerte erste Ableitungen besitzen, welche in einer gewissen Potenz $p > 1$ summierbar sind. Den entsprechenden Beweis überlassen wir dem Leser; wir beschränken uns hier auf den Hinweis, daß bei diesem Beweis ein Satz zu benutzen ist, der die Vollstetigkeit des Integraloperators mit schwacher Singularität im Raum $L_p(\Omega)$ für beliebiges p, $1 < p < \infty$, garantiert.

Bemerkung. Die Darstellung (6) ist in Wirklichkeit nur ein Spezialfall einer allgemeineren Integraldarstellung, die ebenfalls auf S. L. Sobolew zurückgeht (vgl. [18—19]). Die Sobolewsche Integraldarstellung war der Ausgangspunkt für den Beweis der Einbettungssätze (vgl. Kap. 2, § 5).

§ 4. Untersuchung des Operators $\mathfrak{N}_0$

Wir setzen

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_0 + I; \tag{1}$$

dabei bedeutet I den identischen Operator im Raum $\widetilde{L}_2(\Omega)$. Offensichtlich ist

$D(\mathfrak{N}_1) = D(\mathfrak{N}_0)$. Des weiteren gilt

$$(\mathfrak{N}_1 u, u) = (\mathfrak{N}_0 u, u) + \|u\|^2 = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \|u\|^2 . \tag{2}$$

Da das Integral in (2) nicht negativ ist, so ergibt sich

$$(\mathfrak{N}_1 u, u) \geqq \|u\|^2 , \tag{3}$$

d. h., $\mathfrak{N}_1$ ist ein positiv-definiter Operator.

Indem man die Überlegungen des § 3 von Kap. 14 wiederholt, beweist man leicht, daß die in den energetischen Raum $H_{\mathfrak{N}_1}$ des Operators $\mathfrak{N}_1$ eingehenden Funktionen im Gebiet Ω quadratisch summierbar sind und quadratisch summierbare verallgemeinerte erste Ableitungen besitzen; aus der Beziehung (2) ergeben sich dabei die folgenden Formeln für die energetische Norm und das energetische Produkt:

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_1} = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + u^2 \right] dx ; \tag{4}$$

$$[u, v]_{\mathfrak{N}_1} = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + u\, v \right] dx . \tag{5}$$

Wir beweisen jetzt, daß der Operator $\mathfrak{N}_1$ ein diskretes Spektrum besitzt.

Auf Grund des Satzes 6.6.1 genügt es zu zeigen, daß eine beliebige, bezüglich der energetischen Metrik des Operators $\mathfrak{N}_1$ beschränkte Menge von Funktionen im Raum $\widetilde{L}_2(\Omega)$ oder, was dasselbe ist, im Raum $L_2(\Omega)$ kompakt ist.

Es sei $M \subset H_{\mathfrak{N}_1}$ eine solche Menge:

$$|u|_{\mathfrak{N}_1} \leqq c = \text{const} , \qquad \forall\, u \in M .$$

Der letzten Ungleichung kann man auch folgende Gestalt geben:

$$\int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \|u\|^2 \leqq c^2 .$$

Auf Grund der Ungleichung (1.2) erhalten wir dann

$$\mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \|u\|^2 \leqq c^2 ,$$

woraus sich folgende Beziehungen ergeben:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| \leqq \frac{c}{\sqrt{\mu_0}} , \qquad \|u\| \leqq c .$$

Somit ist nachgewiesen, daß sowohl die Menge M als auch die Mengen der ersten Ableitungen der Funktionen aus M in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$ beschränkt sind. Für die Funktion $u \in M$ berücksichtigen wir jetzt die Integraldarstellung (3.6). Die in diese Darstellung eingehenden vollstetigen Integral-

operatoren überführen die soeben genannten beschränkten Mengen in kompakte Mengen. Damit ist bewiesen, daß die Menge M im Raum $L_2(\Omega)$ kompakt ist.

Es seien jetzt

$$\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots \leqq \nu_n \leqq \cdots$$

die Eigenwerte des Operators $\mathfrak{N}_1$ und $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ die entsprechenden Eigenfunktionen.

Auf Grund der Formel (3.5) des Kap. 6 ergibt sich

$$\nu_1 = \frac{|u_1|^2_{\mathfrak{N}_1}}{||u_1||^2} \geqq 1 \,.$$

Wir beweisen, daß in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen nicht eintreten kann und folglich $\nu_1 > 1$ gilt. Wir nehmen das Gegenteil an: Es sei $\nu_1 = 1$. Dann folgt aus der Formel (4)

$$\int\limits_\Omega A_{jk} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \, dx = 0 \,.$$

Daraus schließen wir

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_k} \equiv 0 \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \qquad u_1 \equiv c_1 = \text{const} \,.$$

Wegen $u_1 \in \widetilde{L}_2(\Omega)$ gilt aber

$$0 = (u_1, 1) = (c_1, 1) = \int\limits_\Omega c_1 \, dx = c_1 \, |\Omega| \,,$$

d. h. $c_1 = 0$. Damit ergibt sich $u_1(x) \equiv 0$, was aber im Widerspruch zur Definition der Eigenfunktion steht. Die Behauptung ist somit bewiesen.

Als Folgerung ergibt sich der folgende wichtige Satz.

Satz 16.4.1. *Der Operator $\mathfrak{N}_0$ ist positiv-definit.*

Beweis. Es gilt

$$\inf_{u \in H_{\mathfrak{N}_1}} \frac{|u|^2_{\mathfrak{N}_1}}{||u||^2} = \nu_1 \,.$$

Daraus erhalten wir

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_1} \geqq \nu_1 \, ||u||^2 \,, \qquad u \in H_{\mathfrak{N}_1} \,. \tag{6}$$

Wenn im besonderen $u \in D(\mathfrak{N}_1) = D(\mathfrak{N}_0)$ ist, dann ergibt sich

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_1} = (\mathfrak{N}_1 \, u, u) = (\mathfrak{N}_0 \, u, u) + ||u||^2 \tag{7}$$

und damit $(\mathfrak{N}_0 \, u, u) \geqq (\nu_1 - 1) \, ||u||^2$. Aus der letzten Ungleichung folgt wegen $\nu_1 > 1$ die positive Definitheit des Operators $\mathfrak{N}_0$.

Wir betrachten jetzt den energetischen Raum $H_{\mathfrak{N}_0}$ des positiv-definiten Operators $\mathfrak{N}_0$ und beweisen, daß die energetischen Räume $H_{\mathfrak{N}_1}$ und $H_{\mathfrak{N}_0}$ aus denselben Elementen bestehen, wobei die folgende Beziehung gilt:

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_1} = |u|^2_{\mathfrak{N}_0} + ||u||^2 \,. \tag{8}$$

Es sei $u \in H_{\mathfrak{N}_0}$. Auf Grund des Satzes 5.3.2 existiert eine Folge $u_n \in D(\mathfrak{N}_0) = D(\mathfrak{N}_1)$ derart, daß gilt

$$|u_n - u_m|_{\mathfrak{N}_0} \underset{m,\, n\to\infty}{\to} 0\,, \qquad ||u_n - u|| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Indem man die Beziehung (7) auf die Differenz $u_n - u_m$ anwendet, ersieht man, daß gleichzeitig auch die Beziehungen

$$|u_n - u_m|_{\mathfrak{N}_1} \underset{m,\, n\to\infty}{\to} 0\,, \qquad ||u_n - u|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

erfüllt sind; letztere liefern $u \in H_{\mathfrak{N}_1}$. Genauso beweist man auch die umgekehrte Behauptung: Wenn $u \in H_{\mathfrak{N}_1}$ ist, dann gilt auch $u \in H_{\mathfrak{N}_0}$.

Die Formel (7) zeigt, daß für die Elemente $u \in D(\mathfrak{N}_0) = D(\mathfrak{N}_1)$ die Beziehung (8) gilt; durch Grenzübergang erhält man diese Beziehung auch für die idealen Elemente der energetischen Räume.

Aus der Formel (2.5) folgt, daß für die Funktionen $u,\ v \in D(\mathfrak{N}_0)$ die Gleichungen

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_0} = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx \tag{9}$$

und

$$[u, v]_{\mathfrak{N}_0} = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx \tag{10}$$

gelten. Durch Grenzübergang werden sie auf beliebige Funktionen aus $H_{\mathfrak{N}_0}$ erweitert.

Satz 16.4.2. *Der Operator $\mathfrak{N}_0$ besitzt ein diskretes Spektrum. Seine Eigenwerte und Eigenfunktionen sind $\nu_k - 1$ bzw. u_k, wenn ν_k und u_k die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des Operators $\mathfrak{N}_1$ bezeichnen.*

Beweis. Die Zahl ν_k und die Funktion $u_k(x)$ bedeuten den verallgemeinerten Eigenwert bzw. die dazu gehörige verallgemeinerte Eigenfunktion des Operators $\mathfrak{N}_1$. Diese sind durch folgende Beziehung verknüpft:

$$[u_k, \eta]_{\mathfrak{N}_1} = \nu_k (u_k, \eta)\,, \qquad \forall\, \eta \in H_{\mathfrak{N}_1}\,. \tag{11}$$

Aus der Beziehung (8) für die Normen ergibt sich eine analoge Beziehung für die Skalarprodukte:

$$[u, v]_{\mathfrak{N}_1} = [u, v]_{\mathfrak{N}_0} + (u, v)\,.$$

Berücksichtigt man schließlich, daß die Räume $H_{\mathfrak{N}_1}$ und $H_{\mathfrak{N}_0}$ aus denselben Elementen bestehen, dann kann man die Formel (11) auf die folgende Gestalt bringen:

$$[u_k, \eta]_{\mathfrak{N}_0} = (\nu_k - 1)\,(u_k, \eta)\,, \qquad \forall\, \eta \in H_{\mathfrak{N}_1}\,. \tag{12}$$

Gleichung (12) zeigt nun, daß der Operator $\mathfrak{N}_0$ abzählbar viele positive verallgemeinerte Eigenwerte der Gestalt $\nu_k - 1$ besitzt, die mit wachsendem k gegen Unendlich streben; die zu diesen Eigenwerten gehörigen verallgemeinerten

Eigenfunktionen $u_k(x)$ bilden im Raum $\widetilde{L}_2(\Omega)$ ein vollständiges orthonormiertes System. Der Satz ist damit bewiesen.

§ 5. Die verallgemeinerte Lösung des Neumannschen Problems

Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$\mathfrak{N}_0\, u = f\,, \qquad f \in \widetilde{L}_2(\Omega) \tag{1}$$

oder, was dasselbe bedeutet, die Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x) \tag{2}$$

mit der Randbedingung

$$A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)|_\Gamma = 0\,; \tag{3}$$

die Koeffizienten $A_{jk} \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ seien so beschaffen, daß die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$A_{jk}(x)\, t_j\, t_k \geqq \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2\,; \qquad x \in \overline{\Omega}\,, \qquad \mu_0 = \text{const} > 0\,.$$

Wir erinnern daran, daß auf Grund einer oben getroffenen Annahme das Gebiet Ω endlich ist und die Konusbedingung erfüllt und daß die Bedingung $f \in \widetilde{L}_2(\Omega)$ den folgenden zwei Forderungen äquivalent ist:

$$\int_\Omega f(x)\, dx = 0\,, \qquad \int_\Omega f^2(x)\, dx < \infty\,. \tag{4}$$

Da der Operator $\mathfrak{N}_0$ im Raum $\widetilde{L}_2(\Omega)$ positiv-definit ist, so besitzt die Gleichung (1) in $H_{\mathfrak{N}_0}$ eine und nur eine verallgemeinerte Lösung $u_0(x)$. Als Element des energetischen Raumes $H_{\mathfrak{N}_0}$ ist $u_0 \in \widetilde{L}_2(\Omega)$, d. h., $u_0(x)$ ist quadratisch summierbar im Gebiet Ω, und es gilt

$$\int_\Omega u_0(x)\, dx = 0\,. \tag{4_1}$$

Des weiteren besitzt die Funktion $u_0(x)$ in Ω quadratisch summierbare verallgemeinerte erste Ableitungen, und sie realisiert das Minimum des Funktionals

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_0} - 2\,(u, f) = \int_\Omega \left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} - 2\,u\,f\right] dx\,, \qquad u \in H_{\mathfrak{N}_0}\,. \tag{5}$$

Die weiteren Untersuchungen führen wir für die LAPLACE-Gleichung

$$-\Delta u = f(x) \tag{6}$$

durch. Die Randbedingung nimmt dann die folgende einfache Gestalt an:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0\,. \tag{7}$$

Die Bedingungen (4) und (4_1) bleiben unverändert. Wie bereits im allgemeinen Fall bewiesen, existiert eine verallgemeinerte Lösung $u_0(x)$ des Problems (6), (7). Da diese das Minimum des Funktionals

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 - 2\,u\,f\right] dx\,, \qquad u \in H_{\mathfrak{N}_0}\,, \tag{8}$$

realisiert, ist die Variation dieses Funktionals im Punkt u_0 gleich Null. Letzteres liefert die Beziehung

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi_k}\,\frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} - f\,\eta\right) d\xi = 0\,, \qquad \forall\, \eta \in H_{\mathfrak{N}_0}\,. \tag{9}$$

Satz 16.5.1. *Wenn $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leqq 1$, gilt, dann ist $u_0 \in C^{(2)}(\Omega)$.*

Beweis. Dieser stimmt fast wörtlich mit dem des Satzes 14.6.2 überein. Zunächst führen wir das Volumenpotential

$$\psi(x) = -\frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Omega f(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi$$

ein; dann gilt $-\Delta\psi = f(x)$ und $\psi \in C^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap C^{(2)}(\Omega)$. Durch die Substitution $u_0 = v_0 + \psi$ in der Formel (9) erhalten wir die Beziehung

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi}\,\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\,d\xi = 0\,, \qquad \forall\, \eta \in H_{\mathfrak{N}_0}\,. \tag{10}$$

Wir setzen $\eta(\xi) = \omega_h(r)$, $r = |x - \xi|$, $x \in \Omega$; die Zahl h wählen wir dabei kleiner als den Abstand zwischen dem Punkt x und dem Rand des Gebietes Ω. Eine solche Wahl ist möglich, da 1. $\omega_h(r)$ beliebig oft differenzierbar ist und 2. die Funktion $\omega_h(r)$ in einer Umgebung des Randes identisch verschwindet und folglich die Randbedingung (7) erfüllt. Damit ergibt sich $\omega_h(r) \in D(\mathfrak{N}_0)$ und folglich $\omega_h(r) \in H_{\mathfrak{N}_0}$.

Es gilt also

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k}\,\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial \xi_k}\,d\xi = 0\,.$$

Ebenso wie im Satz 14.6.2 folgt hieraus, daß v_{0h} und somit auch v_0 im Gebiet Ω harmonisch ist. Dann gilt aber

$$v_0 \in C^{(2)}(\Omega)\,, \qquad u_0 = (v_0 + \psi) \in C^{(2)}(\Omega)\,,$$

und der Satz ist damit bewiesen.

Die im Anschluß an den Beweis des Satzes 14.6.2 gemachten Bemerkungen behalten auch im vorliegenden Fall ihre Gültigkeit.

Übungsaufgaben

1. Man beweise, daß eine beliebige Funktion $u \in \tilde{L}_2(\Omega)$ mit verallgemeinerten ersten Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, zum energetischen Raum $H_{\mathfrak{N}_0}$ (vgl. § 4) gehört.

Daraus ist die POINCARÉ*sche Ungleichung*

$$\int_\Omega u^2\,dx \leqq c_1 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_2 \left(\int_\Omega u\,dx\right)^2; \qquad c_1, c_2 = \text{const},$$

abzuleiten. Dabei wird vorausgesetzt, daß das Gebiet Ω endlich ist und die Konusbedingung erfüllt.

2. Mit Hilfe der Integraldarstellung von S. L. SOBOLEW beweise man die folgende Behauptung:

Wenn die Funktion $u(x)$ verallgemeinerte erste Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, besitzt, dann ist diese einer Funktion äquivalent, die auf einer beliebigen stückweise glatten $(m-1)$-dimensionalen Fläche fast überall definiert und quadratisch summierbar ist.

3. Man beweise, daß die verallgemeinerte Lösung $u_0(x)$ des NEUMANNschen Problems

$$-\Delta u = f(x), \qquad f \in \tilde{L}_2(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega}), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$$

die Randbedingung in folgendem Sinne erfüllt: Es sei Ω_n ein inneres Teilgebiet des Gebietes Ω mit einem stückweise glatten Rand Γ_n, und es gelte $|\Omega \setminus \Omega_n| \to 0$. Dann strebt

$$\int_{\Gamma_n} \eta \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad \forall\, \eta \in H_{\mathfrak{N}_0}.$$

4. Der Koeffizient $C(x)$ sei im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$ stetig und nicht negativ, und auf einer gewissen Menge vom positiven Maß gelte $C(x) > 0$. Außerdem nehmen wir an, daß die Koeffizienten $A_{jk}(x)$ die im § 1 aufgezählten Eigenschaften besitzen und das Gebiet Ω endlich ist und die Konusbedingung erfüllt. Unter diesen Voraussetzungen beweise man, daß der Operator $\mathfrak{N}$ (vgl. § 1) positiv-definit ist und ein diskretes Spektrum besitzt.

KAPITEL 17

NICHT SELBSTADJUNGIERTE ELLIPTISCHE GLEICHUNGEN

§ 1. Die verallgemeinerte Lösung

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+B_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}+C(x)\,u=f(x) \tag{1}$$

und formulieren für sie das DIRICHLETsche Problem mit der Randbedingung

$$u|_\Gamma = 0\,; \tag{2}$$

dabei sei Γ der stückweise glatte Rand eines endlichen Gebietes Ω im Raum E_m der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Wir setzen voraus, daß die Bedingungen

$$A_{jk}\in C^{(1)}(\bar{\Omega})\,;\qquad B_k,\, C\in C(\bar{\Omega})$$

erfüllt sind und daß (1) in $\bar{\Omega}$ eine nicht entartete elliptische Gleichung ist; letzteres bedeutet

$$A_{jk}(x)\,t_j\,t_k \geqq \mu_0\sum_{k=1}^{m} t_k^2\,,\qquad \mu_0=\text{const}>0\,.$$

Wir betrachten zunächst das DIRICHLETsche Problem für den formal selbstadjungierten elliptischen Differentialausdruck auf der linken Seite:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x)\,,\qquad u|_\Gamma=0\,; \tag{3}$$

den Operator dieses Problems bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$. Im Kap. 14 wurde nachgewiesen, daß der Operator $\mathfrak{A}$ positiv-definit ist; deshalb existiert für beliebiges $f\in L_2(\Omega)$ eine verallgemeinerte Lösung u_0 des Problems (3), die dem energetischen Raum $H_{\mathfrak{A}}$ angehört. Auf diese Weise läßt sich jedem Element $f\in L_2(\Omega)$ ein Element $u_0\in H_{\mathfrak{A}}$ — die verallgemeinerte Lösung des Problems (3) — zuordnen. Diese Zuordnung definiert einen Operator, den wir im weiteren mit G bezeichnen:

$$Gf=u_0\,. \tag{4}$$

Offenbar gilt $D(G)=L_2(\Omega)$ und $R(G)\subset H_{\mathfrak{A}}$.

Dem Operator G kann man auch eine explizite Darstellung geben: Wenn $\{\omega_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $H_{\mathfrak{A}}$ ist, dann gilt [vgl. Formel (5.11) aus Kap. 5]

$$G f = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\, \omega_n . \tag{5}$$

Nach Definition bildet der Operator G den Raum $L_2(\Omega)$ in den Raum $H_{\mathfrak{A}}$ ab; natürlich kann man G auch als Operator aus $L_2(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ betrachten.

Die verallgemeinerte Lösung u_0 realisiert das Minimum des Funktionals

$$F(u) = [u, u]_{\mathfrak{A}} - 2(u, f) ,$$

und folglich ist die Variation dieses Funktionals im Punkt u_0 gleich Null:

$$\delta F(u_0, \eta) = 2\, [u_0, \eta]_{\mathfrak{A}} - 2(f, \eta) = 0 , \qquad \forall\, \eta \in H_{\mathfrak{A}} .$$

Indem wir hier u_0 durch $G f$ ersetzen, erhalten wir die Formel

$$[G f, \eta]_{\mathfrak{A}} = (f, \eta) , \tag{6}$$

welche für beliebige Elemente $f \in L_2(\Omega)$ und $\eta \in H_{\mathfrak{A}}$ gilt[1]).

Wir bezeichnen mit K den durch die Formel

$$K u = B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + C u \tag{7}$$

definierten Operator mit dem Definitionsgebiet $H_{\mathfrak{A}}$. Dann kann man das Problem (1), (2) in folgender Form schreiben:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x) - K u , \qquad u|_{\Gamma} = 0 . \tag{8}$$

Der Lösung von (8) (wenn eine solche existiert und $H_{\mathfrak{A}}$ angehört) kann man die Gestalt

$$u = G\,(f - K u) = G f - G K u \tag{9}$$

geben.

Wir führen jetzt folgende Bezeichnungen ein:

$$G f = F , \qquad G K = T .$$

Offenbar gilt $F \in H_{\mathfrak{A}}$, der Operator T ist auf dem ganzen Raum $H_{\mathfrak{A}}$ definiert und bildet diesen in sich ab. Die Gleichung (9) nimmt dann die Gestalt

$$u + T u = F \tag{10}$$

an. Wir geben nun folgende Definition:

Verallgemeinerte Lösung des Problems (1), (2) heißt eine Funktion $u \in H_{\mathfrak{A}}$, die die Gleichung (10) erfüllt.

[1]) Wir bemerken, daß unsere Behauptungen über den Operator G und dessen Eigenschaften auch im Falle eines beliebigen positiv-definiten Operators gelten; man hat dann lediglich den Raum $L_2(\Omega)$ durch den Raum H zu ersetzen, in dem der Operator definiert ist.

§ 2. Die Fredholmschen Sätze

Lemma 17.2.1. *Der Operator G ist in $L_2(\Omega)$ vollstetig.*

Beweis. Der Operator $\mathfrak{A}$ besitzt ein diskretes Spektrum (vgl. Kap. 15). Es seien λ_n und $u_n(x)$ die Eigenwerte bzw. die Eigenfunktionen dieses Operators; dabei gelte wie gewöhnlich $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \leqq \cdots$, und die Funktionen u_n seien orthonormiert in $L_2(\Omega)$. Dann sind diese Funktionen im Raum $H_{\mathfrak{A}}$ orthogonal, aber nicht normiert; es gilt nämlich

$$[u_j, u_k]_{\mathfrak{A}} = 0\,, \qquad j \neq k; \qquad |u_k|^2_{\mathfrak{A}} = \lambda_k\,.$$

Wir erinnern außerdem daran, daß das System $\{u_n\}$ in $H_{\mathfrak{A}}$ vollständig ist. Dann ist offensichtlich das System $\left\{\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$ in $H_{\mathfrak{A}}$ orthonormiert und vollständig.

In der Formel (1.5) setzen wir

$$\omega_n = \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\,.$$

Dies ergibt folgende Darstellung für den Operator G:

$$G f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, u_n)}{\lambda_n} u_n\,. \tag{1}$$

Wir führen jetzt die nachfolgenden Bezeichnungen ein:

$$G = G_n' + G_n''\,, \qquad G_n' f = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f, u_k)}{\lambda_k} u_k\,, \qquad G_n'' f = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(f, u_k)}{\lambda_k} u_k\,. \tag{2}$$

Der erste Operator ist endlichdimensional und somit vollstetig. Für den zweiten Operator erhalten wir eine Abschätzung der Norm:

$$\|G_n'' f\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(f, u_k)^2}{\lambda_k^2} \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (f, u_k)^2\,.$$

Auf Grund der Besselschen Ungleichung gilt dann

$$\|G_n'' f\|^2 \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \|f\|^2\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\|G_n''\| \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

und folglich

$$\|G - G_n'\| \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Als Grenzwert (im Sinne der Normkonvergenz) einer Folge vollstetiger Operatoren ist dann der Operator G im Raum $L_2(\Omega)$ vollstetig. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Satz 17.2.1. *Der Operator $T = G K$ ist im Raum $H_{\mathfrak{A}}$ vollstetig.*

Beweis. Der Operator G ist vollstetig in $L_2(\Omega)$. Folglich läßt sich aus jeder beschränkten Menge $M \subset L_2(\Omega)$ eine Folge $\{v_n\}$ auswählen derart, daß die Folge $\{G v_n\}$ konvergiert und somit die folgende Beziehung erfüllt ist:

$$||G v_n - G v_k|| \underset{n,\, k\to\infty}{\to} 0 .$$

Wir betrachten jetzt eine beliebige Menge $N \subset H_{\mathfrak{A}}$, die in der energetischen Metrik beschränkt ist:

$$|u|_{\mathfrak{A}} \leqq a , \qquad \forall\, u \in N , \qquad a = \text{const} .$$

Wenn das Element u die Menge N durchläuft, dann durchläuft $K u$ die in $L_2(\Omega)$ beschränkte Menge $K(N)$. In der Tat, es gilt

$$a^2 \geqq |u|_{\mathfrak{A}}^2 = \int\limits_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx \geqq \mu_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx = \mu_0 \sum_{k=1}^{m} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|^2 .$$

Daraus ergibt sich

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\| \leqq \frac{a}{\sqrt{\mu_0}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m .$$

Gleichzeitig gilt aber

$$||u|| \leqq \frac{1}{\gamma} |u| \leqq \frac{a}{\gamma},$$

wobei γ die untere Grenze des Operators $\mathfrak{A}$ bedeutet.

Nach Voraussetzung sind die Koeffizienten $B_k(x)$ und $C(x)$ im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$ stetig und somit beschränkt; es sei $|B_k(x)| \leqq b$, $|C(x)| \leqq b$, $b = \text{const}$. Dann gilt

$$||K u|| \leqq b \left(\sum_{k=1}^{m} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\| + ||u|| \right) \leqq a\, b \left(\frac{m}{\sqrt{\mu_0}} + \frac{1}{\gamma} \right) = c = \text{const},$$

was zu beweisen war.

Wie weiter oben festgestellt wurde, läßt sich aus der in $L_2(\Omega)$ beschränkten Menge $K(N)$ eine Folge $\{K v_n\}$ auswählen derart, daß gilt

$$||G K v_n - G K v_k|| = ||T v_n - T v_k|| \underset{n,\, k\to\infty}{\to} 0 . \tag{3}$$

Die Beziehung (3) bedeutet nun, daß T als Operator von $H_{\mathfrak{A}}$ in $L_2(\Omega)$ vollstetig ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß T auch als Operator von $H_{\mathfrak{A}}$ in $H_{\mathfrak{A}}$ vollstetig ist. Dafür genügt es wiederum, die folgende Beziehung nachzuweisen:

$$|T v_n - T v_k| \underset{n,\, k\to\infty}{\to} 0 . \tag{4}$$

Wir schätzen das Quadrat der Norm in (4) ab. Unter Benutzung der Formel (1.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} |T v_n - T v_k|_{\mathfrak{A}}^2 &= [T (v_n - v_k), T (v_n - v_k)]_{\mathfrak{A}} = [G K (v_n - v_k), T (v_n - v_k)]_{\mathfrak{A}} = \\ &= (K v_n - K v_k, T v_n - T v_k) \leqq \\ &\leqq ||K v_n - K v_k|| \cdot ||T v_n - T v_k|| \leqq 2\, c\, ||T v_n - T v_k|| \underset{n,\, k\to\infty}{\to} 0 . \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten jetzt bei derselben Randbedingung (1.2) eine etwas allgemeinere Gleichung als die Gleichung (1.1):

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\lambda\left(B_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+C\,u\right)=f(x)\,. \tag{5}$$

Dieses Problem läßt sich offensichtlich auf die Form

$$u+\lambda\,T\,u=F \tag{6}$$

bringen.

Aus der früher entwickelten allgemeinen Theorie (vgl. Teil III) folgt, daß für dieses Problem eine höchstens abzählbare Menge von charakteristischen Zahlen existiert, die sich nur im Unendlichen häufen können; für alle übrigen Werte λ existiert eine Lösung der Gleichung (5), und diese ist eindeutig. Ist dagegen λ eine charakteristische Zahl, dann existiert im allgemeinen keine Lösung. In diesem Fall ist für die Existenz einer Lösung notwendig und hinreichend, daß die Funktion F eine endliche Anzahl von Orthogonalitätsbedingungen erfüllt. Wenn nämlich $w_1, w_2, \ldots, w_s$ die Eigenfunktionen der Gleichung $w+\bar{\lambda}\,T^*\,w=0$ darstellen, dann ist für die Lösbarkeit der Gleichung (6) notwendig und hinreichend, daß gilt

$$[F, w_j]_{\mathfrak{A}}=0\,,\qquad j=1,2,\ldots,s\,.$$

Auf Grund der Formel (1.6) und der Beziehung $F=G\,f$ kann man die letzte Bedingung auch in der folgenden Form schreiben:

$$(f, w_j)=0\,,\qquad j=1,2,\ldots,s\,. \tag{7}$$

Wenn die Orthogonalitätsbedingung erfüllt ist, dann existiert eine verallgemeinerte Lösung, aber diese ist nicht eindeutig. In der Tat, es seien die Orthogonalitätsbedingungen erfüllt, und u_0 sei irgend eine partikuläre Lösung der Gleichung (6). Dann gilt $u=u_0+\tilde{u}$, wobei $\tilde{u}$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung

$$\tilde{u}+\lambda\,T\,\tilde{u}=0 \tag{8}$$

bedeutet; letztere hat die Gestalt $\tilde{u}=\sum_{j=1}^{s}c_j\,\tilde{u}_j$. Dabei sind c_j beliebige Konstanten und $\tilde{u}_j$ die linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (8).

Sämtliche für das Dirichletsche Problem formulierten Behauptungen gelten auch für das Neumannsche Problem, wenn $\mathfrak{A}=\mathfrak{N}_1$ gesetzt wird, wobei $\mathfrak{N}_1$ den im § 4 des Kap. 16 betrachteten Operator bedeutet.

Übungsaufgabe

Man beweise, daß die charakteristischen Zahlen des Operators T in der Halbebene $\operatorname{Re}\lambda>-q$ liegen, wobei q eine hinreichend große Konstante bedeutet.

KAPITEL 18

DIE POTENTIALTHEORETISCHE METHODE BEI DER HOMOGENEN LAPLACE-GLEICHUNG

Die in den vorangegangenen Kapiteln entwickelte Variationsmethode zur Lösung der DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme hat bei allen ihren Vorteilen auch einige Nachteile. So läßt sich mit dieser Methode das homogene DIRICHLETsche Problem nur dann lösen, wenn eine Funktion $\psi(x)$ existiert, die den im § 5 des Kap. 14 genannten Bedingungen genügt. Die größte Einschränkung, die die Variationsmethode dem entsprechenden Problem auferlegt, besteht aber darin, daß der Operator des Problems positiv-definit sein muß (oder, wie das im vorhergehenden Kapitel der Fall war, sich von einem positiv-definiten Operator nur durch einen schwächeren Summanden unterscheiden darf). Letzteres ist auch der Grund dafür, weshalb die Variationsmethode im Falle eines unendlichen Gebietes versagt. Wenn man von einer elliptischen Gleichung zu elliptischen Systemen allgemeiner Gestalt übergeht, dann ist auch das DIRICHLETsche Problem für ein endliches Gebiet nicht mehr positiv, so daß sich auch in diesem Fall die Variationsmethode nicht mehr anwenden läßt.

Der Vorteil der potentialtheoretischen Methode, von der im vorliegenden Kapitel die Rede sein wird, besteht darin, daß diese Methode viele der genannten Schwierigkeiten überwindet. Diese Methode ist allerdings mit umfangreichen Rechnungen verbunden, wobei ihre Anwendung im Falle eines Gebietes mit unglatter Berandung wesentlich erschwert wird. Wir betrachten deshalb nur die LAPLACE-Gleichung, die wir dann als homogen annehmen können (vgl. Kap. 11, § 6). Von dem Rand des betrachteten Gebietes verlangen wir eine bestimmte Glattheit, die in den folgenden Paragraphen genauer festgelegt wird. In diesem Kapitel wird überall, mit Ausnahme der letzten Paragraphen 13 und 14, vorausgesetzt, daß für die Dimension des Raumes $m > 2$ gilt.

§ 1. LJAPUNOW-Flächen

Die im Raum E_m gelegene Fläche Γ heißt LJAPUNOW-*Fläche,* wenn sie die folgenden beiden LJAPUNOW-*Bedingungen* erfüllt:

1. In jedem Punkt der Fläche Γ existiert eine bestimmte Normale.

2. Es seien x und ξ zwei Punkte der Fläche Γ, $r = |x - \xi|$, n und ν die Normalen zu Γ in den Punkten x bzw. ξ und ϑ der Winkel zwischen diesen

Normalen. Dann existieren positive Konstanten a und α derart, daß gilt

$$\vartheta \leqq a\, r^{\alpha} . \tag{1}$$

Satz 18.1.1. *Es sei Γ eine geschlossene* LJAPUNOW-*Fläche. Dann existiert eine Konstante $d > 0$ mit der Eigenschaft, daß der Teil der Fläche, der sich innerhalb der Kugel vom Radius d mit einem beliebigen Mittelpunkt $x \in \Gamma$ befindet, von den Parallelen zur Normalen an die Fläche Γ im Punkt x in höchstens einem Punkt geschnitten wird.*

Die im Satz erwähnte Kugel wollen wir LJAPUNOW-*Kugel* nennen und mit $S(x)$ bezeichnen.

Beweis. Wir wählen die Zahl d derart, daß gilt

$$a\, d^{\alpha} < 1 . \tag{2}$$

Bei einer solchen Wahl von d gilt die Behauptung des Satzes. Wir nehmen das Gegenteil an: Es existiere eine Kugel vom Radius d mit dem Mittelpunkt in einem gewissen Punkt $x \in \Gamma$ derart, daß der innerhalb dieser Kugel gelegene Teil $\Gamma'(x)$ der Fläche Γ von einem gewissen zur Normalen n im Punkt x parallelen Strahl n' in zwei Punkten ξ' und ξ geschnitten wird (s. Abb. 28). Wir

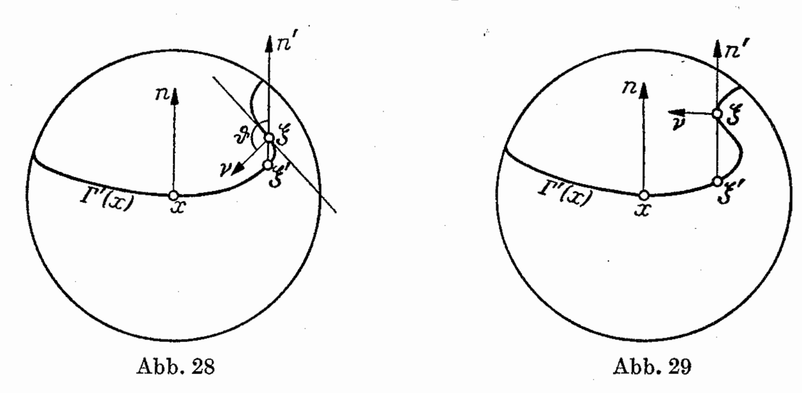


Abb. 28 Abb. 29

nehmen an, daß n die Richtung der äußeren Normalen besitzt und daß n' im Punkt ξ' aus dem von Γ berandeten Gebiet herauszeigt, im Punkt ξ hingegen in dieses Gebiet hineinzeigt. Wir errichten im Punkt ξ die Tangentialebene sowie die äußere Normale ν an die Fläche Γ. Dann zeigen die Normalen ν und $n = n'$ auf verschiedene Seiten der Tangentialebene, und da ν senkrecht auf dieser Ebene steht, so ist der Winkel $\vartheta = (\nu, n) > \frac{\pi}{2}$. Letzteres ist aber nicht möglich, da $|x - \xi| < d$ und folglich, auf Grund der Ungleichung (2), $(\nu, n) < 1 < \frac{\pi}{2}$ gilt.

Es wäre noch der Fall denkbar, daß der Strahl n' die Fläche im Punkt ξ berührt (s. Abb. 29). Dann gilt aber $(\nu, n) = \frac{\pi}{2}$, was ebenfalls im Widerspruch zur Ungleichung (2) steht.

Der Satz 18.1.1 ist damit bewiesen.

Im weiteren setzen wir voraus, daß der Radius d der LJAPUNOW-Kugel die Ungleichung (2) erfüllt.

Auf der Fläche Γ wählen wir jetzt einen beliebigen Punkt x und nehmen in diesem eine lokales Koordinatensystem an; dabei sei x der Ursprung dieses Systems, die ξ_m-Achse richten wir entlang der Normalen n an die Fläche Γ im Punkt x, und die Koordinatenachsen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ legen wir in die Tangentialebene an Γ in demselben Punkt x. Aus dem Satz 18.1.1 ergibt sich, daß der innerhalb der LJAPUNOW-Kugel $S(x)$ liegende Teil der Fläche Γ in dem genannten lokalen Koordinatensystem durch eine explizite Gleichung der Gestalt

$$\xi_m = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}), \qquad f \in C^{(1)}, \tag{3}$$

dargestellt werden kann. Dabei ist offensichtlich

$$f(0, 0, \ldots, 0) = 0; \quad f_{\xi_j}(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{4}$$

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, eine Abschätzung für die Funktion f und deren erste Ableitungen im Inneren der Kugel $S(x)$ anzugeben. Wir werden auch im weiteren den innerhalb der Kugel $S(x)$ liegenden Teil der Fläche Γ mit $\Gamma'(x)$ bezeichnen.

Es sei $\xi \in \Gamma'(x)$ und ν die Normale an Γ im Punkt ξ. Wir schätzen zunächst die Richtungskosinus der Normalen ν im lokalen Koordinatensystem ab. Es gilt

$$\cos(\nu, \xi_m) = \cos(\nu, n) = \cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \cdots$$

Auf Grund der Ungleichungen (1) und (2) ist $\vartheta < 1$. Die letzte Reihe ist alternierend und die Folge ihrer Glieder monoton fallend; in einer derartigen Reihe hat der Rest nach endlich vielen Gliedern das Vorzeichen des nächstfolgenden Gliedes. Somit gilt

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqq 1 - \frac{\vartheta^2}{2}. \tag{5}$$

Auf Grund der Ungleichung (1) ergibt sich ferner

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqq 1 - \frac{1}{2} a^2 r^{2\alpha}. \tag{6}$$

Nach der Ungleichung (2) ist $a^2 r^{2\alpha} \leqq a^2 d^{2\alpha} < 1$ und folglich

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqq \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Die beiden Ungleichungen (6) und (7) werden wir im weiteren benötigen.

Wenn eine Fläche durch die Gleichung

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = 0$$

gegeben ist, dann lassen sich die Richtungskosinus der Normalen an diese

Fläche durch folgende Formel bestimmen:

$$\cos(\nu, \xi_k) = \pm \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_k}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\partial F}{\partial \xi_j}\right)^2}} .$$

Die Gleichung der Fläche $\Gamma'(x)$ hat die Gestalt

$$\xi_m - f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}) = 0 ,$$

und es gilt $\cos(\nu, \xi_m) > 0$. Daraus ergibt sich jetzt

$$\cos(\nu, \xi_k) = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)^2}} , \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1 , \tag{8}$$

und

$$\cos(\nu, \xi_m) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2}} . \tag{9}$$

Aus den Ungleichungen (6) und (2) sowie der letzten Gleichung schließen wir dann

$$\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2} \leqq \frac{1}{1 - \frac{1}{2} a^2 r^{2\alpha}} = 1 + \frac{\frac{1}{2} a^2 r^{2\alpha}}{1 - \frac{1}{2} a^2 r^{2\alpha}} <$$

$$< 1 + \frac{\frac{1}{2} a^2 r^{2\alpha}}{1 - \frac{1}{2} a^2 d^{2\alpha}} < 1 + a^2 r^{2\alpha} .$$

Durch Quadrieren erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2 < 2\, a^2 r^{2\alpha} + a^4 r^{4\alpha} .$$

Da aber $r \leqq d$ ist, so ergibt sich auf Grund der Ungleichung (2)

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2 < 3\, a^2 r^{2\alpha} \tag{10}$$

und folglich

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right| < \sqrt{3}\, a\, r^{\alpha} , \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1 . \tag{11}$$

Aus Formel (8) folgt dann die Abschätzung

$$|\cos(\nu, \xi_k)| \leqq \left|\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right| < \sqrt{3}\, a\, r^{\alpha} , \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1 . \tag{12}$$

Wir schätzen jetzt die Größe $|\xi_m|$ auf dem Teil $\Gamma'(x)$ der Fläche Γ ab. Indem wir

$$\varrho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2$$

setzen, erhalten wir sofort

$$r^2 = \varrho^2 + \xi_m^2 . \tag{13}$$

Da in der Formel (11) ξ_k eine beliebige Richtung in der Tangentialebene an die Fläche Γ bedeutet, insbesondere also auch die Richtung ϱ sein kann, so gilt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right| < \sqrt{3}\, a\, r^\alpha \leqq \sqrt{3}\, a\, d^\alpha \leqq \sqrt{3} .$$

Daraus folgt nun

$$|f| \leqq \int_0^\varrho \left|\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right| d\,\varrho < \sqrt{3}\,\varrho$$

und somit

$$|\xi_m| < \sqrt{3}\,\varrho . \tag{14}$$

Diese Abschätzung läßt sich jedoch wesentlich verbessern. Zunächst liefern die Formeln (13) und (14)

$$r \leqq 2\,\varrho . \tag{15}$$

Damit erhalten wir

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right| < 2^\alpha \sqrt{3}\, a\, \varrho^\alpha .$$

Jetzt ergibt sich

$$|f| = |\xi_m| \leqq a_1\, \varrho^{\alpha+1} , \qquad a_1 = \frac{2^\alpha \sqrt{3}\, a}{\alpha + 1} . \tag{16$_1$}$$

Wegen $\varrho \leqq r$ finden wir schließlich

$$|\xi_m| \leqq a_1\, r^{\alpha+1} . \tag{16$_2$}$$

Im weiteren werden wir mit dem Buchstaben r sowohl den Abstand zwischen den Punkten x und ξ als auch den von x nach ξ gerichteten Ortsvektor bezeichnen. Wir leiten jetzt eine Abschätzung für $\cos(\nu, r)$ unter der Voraussetzung $x \in \Gamma$ und $\xi \in \Gamma'(x)$ her. Im lokalen Koordinatensystem gilt

$$\cos(\nu, r) = \cos(r, x_k)\cos(\nu, x_k) = \frac{\xi_k - x_k}{r}\cos(\nu, x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\xi_k}{r}\cos(\nu, x_k) + \frac{\xi_m}{r}\cos(\nu, x_m) .$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen $\frac{|\xi_k|}{r} = |\cos(r, x_k)| \leqq 1$ und $|\cos(\nu, x_m)| \leqq 1$ ergibt sich dann auf Grund der Ungleichungen (12) und (16) die Abschätzung

$$|\cos(\nu, r)| \leqq c\, r^\alpha ; \tag{17}$$

dabei ist $c = \sqrt{3}\,(m-1)\,a + a_1 = \text{const}$.

§ 2. Der Raumwinkel

Wir betrachten eine stückweise glatte Fläche Γ, die nicht notwendig geschlossen zu sein braucht und auf der eine positive Richtung der Normalen festgelegt ist.

Mit ξ bezeichnen wir einen beliebigen Punkt der Fläche Γ und mit ν die im Punkt ξ an die Fläche Γ errichtete Normale. Es sei $x \in E_m$ ein Punkt mit der Eigenschaft, daß in einem beliebigen Punkt $\xi \in \Gamma$ der von x nach ξ gerichtete Ortsvektor r mit der Normalen ν einen spitzen oder höchstens einen rechten Winkel bildet; es gilt demnach $\cos(r, \nu) \geqq 0$. Aus dem Punkt x errichten wir jetzt die Ortsvektoren nach sämtlichen Punkten der Fläche Γ. Diese Ortsvektoren füllen dann ein gewisses Gebiet aus, das von der Fläche Γ und der Kegelfläche K, deren Erzeugenden die in den Randpunkten der Fläche Γ endenden Ortsvektoren sind, berandet wird (s. Abb. 30). Wenn Γ eine geschlossene Fläche ist, dann muß sich der Punkt x innerhalb von Γ befinden (anderenfalls könnte der Winkel (r, ν) auch ein stumpfer Winkel sein); in diesem Fall stimmt das genannte Gebiet mit dem Inneren der Fläche Γ überein. Um den Punkt x beschreiben wir jetzt eine Kugel von beliebigem Radius R. Mit σ_R bezeichnen wir den Teil der Kugeloberfläche, der sich innerhalb des oben erwähnten Konus befindet. Dann heißt der von R unabhängige Quotient

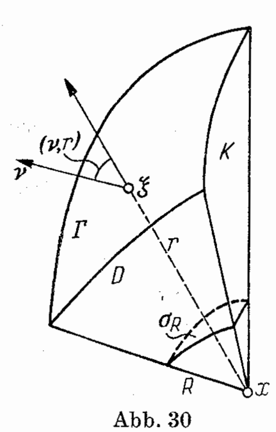


Abb. 30

$$\omega_x(\Gamma) = \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} \tag{1}$$

Raumwinkel, unter dem die Fläche R vom Punkt x aus sichtbar ist.

Die soeben beschriebene Konstruktion ist auch dann möglich, wenn auf der Fläche Γ die Beziehung $\cos(r, \nu) \leqq 0$ gilt. In diesem Fall nennt man den Raumwinkel $\omega_x(\Gamma)$, unter dem die Fläche Γ vom Punkt x aus sichtbar ist, den mit dem negativen Vorzeichen versehenen Quotienten (1).

Im allgemeinen Fall, wo sich das Vorzeichen von $\cos(r, \nu)$ ändert, wollen wir annehmen, daß sich die Fläche Γ in gewisse Teile $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ zerlegen läßt, auf denen $\cos(r, \nu)$ ein konstantes Vorzeichen besitzt. Für eine solche Fläche wird der Raumwinkel durch die Formel

$$\omega_x(\Gamma) = \sum \omega_x(\Gamma_k) \tag{2}$$

definiert, wenn nur die Reihe (2) absolut konvergiert (letzteres ist z. B. im Falle endlich vieler Teile Γ_k garantiert).

Wir beweisen jetzt, daß in allen genannten Fällen für den Raumwinkel $\omega_x(\Gamma)$ die folgende Formel gilt:

$$\omega_x(\Gamma) = -\frac{1}{m-2}\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma\,. \tag{3}$$

Offensichtlich genügt es, den Fall zu betrachten, wo sich auf der Fläche Γ das Vorzeichen von $\cos(r, \nu)$ nicht ändert.

Zunächst leiten wir eine vorbereitende Formel her, die auch im weiteren von Nutzen sein wird. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial \xi_k} \cos(\nu, \xi_k) .$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k - x_k}{r} = \cos(r, \xi_k)$$

ergibt sich daraus

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu, \xi_k)$$

oder schließlich

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}} \cos(r, \nu) . \tag{4}$$

Es sei $\cos(r, \nu) \geqq 0$. Den Radius R wählen wir hinreichend klein, so daß die Flächen σ_R und Γ keine gemeinsamen Punkte besitzen (vgl. Abb. 30).

Wir betrachten das Gebiet D, das durch die Flächen Γ und σ_R sowie durch den zwischen diesen beiden Flächen liegenden Teil der Konusfläche K berandet wird. Da in diesem Gebiet $\frac{1}{r^{m-2}}$ eine harmonische Funktion des Punktes ξ ist, so gilt [vgl. Formel (6.9) des Kap. 10]

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu^*} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma + \int_{\sigma_R} \frac{\partial}{\partial \nu^*} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \sigma_R + \int_K \frac{\partial}{\partial \nu^*} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi K = 0 .$$

Dabei bezeichnet ν^* die in bezug auf D äußere Normale an die Fläche; wegen $\cos(r, \nu) \geqq 0$ gilt $\nu^* = \nu$ auf der Fläche Γ.

Auf der Fläche K ist $\cos(r, \nu^*) = 0$, da r die Richtung der Erzeugenden hat und ν^* auf dieser senkrecht steht. Auf Grund der Formel (4) verschwindet dann das Integral über K, so daß wir erhalten

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma = -\int_{\sigma_R} \frac{\partial}{\partial \nu^*} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \sigma_R .$$

Da auf der Fläche σ_R die Normale ν^* entgegengesetzt zum Vektor r gerichtet ist, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial \nu^*} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{r=R} = \frac{m-2}{R^{m-1}} .$$

Damit ergibt sich

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma = -\frac{m-2}{R^{m-1}} \int_{\sigma_R} d_\xi \sigma_R = -(m-2) \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} = -(m-2)\, \omega_x(\Gamma) ,$$

was zu beweisen war.

Im Falle $\cos(r, \nu) \leqq 0$ ist $\nu^* = -\nu$ auf Γ. Auf Grund der obigen Überlegungen finden wir dann

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma = \frac{m-2}{R^{m-1}} \int_{\sigma_R} d_\xi \sigma_R = (m-2) \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} = -(m-2)\, \omega_x(\Gamma) .$$

Wenn die Fläche Γ in die Teile $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ zerlegt ist, auf denen sich das Vorzeichen von $\cos(r, \nu)$ nicht ändert, dann ist offensichtlich

$$\sum |\omega_x(\Gamma_k)| = \int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma . \tag{5}$$

Satz 18.2.1. *Es sei Γ eine geschlossene* LJAPUNOW-*Fläche. Dann existiert eine Konstante C derart, daß gilt*

$$\int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma \leqq C , \qquad \forall\, x \in E_m . \tag{6}$$

Beweis. Es sei d der Radius der LJAPUNOW-Kugel für die Fläche Γ. Wenn der Abstand zwischen dem Punkt x und der Fläche Γ nicht kleiner als $\frac{d}{2}$ ist, dann gilt $r = |x - \xi| \geqq \frac{d}{2}$, und nach der Formel (4) ergibt sich

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| = (m-2) \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} \leqq \frac{2^{m-1}(m-2)}{d^{m-1}}$$

und somit

$$\int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma \leqq \frac{2^{m-1}(m-2)}{d^{m-1}} |\Gamma| . \tag{7}$$

Der Abstand zwischen dem Punkt x und der Fläche Γ sei jetzt kleiner als $\frac{d}{2}$. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in \Gamma$ mit der Eigenschaft

$$|x - x_0| = \min_{\xi \in \Gamma} |x - \xi| < \frac{d}{2} . \tag{8}$$

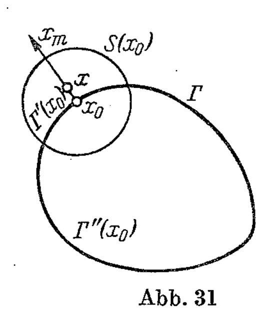


Abb. 31

Dabei liegt bekanntlich der Punkt x auf der im Punkt x_0 errichteten Normalen n_0 an die Fläche Γ.

Wir betrachten die LJAPUNOW-Kugel $S(x_0)$. Mit $\Gamma'(x_0)$ und $\Gamma''(x_0)$ bezeichnen wir entsprechend den innerhalb bzw. außerhalb der Kugel $S(x_0)$ liegenden Teil der Fläche Γ (s. Abb. 31). Wenn $\xi \in \Gamma''(x_0)$ ist, dann gilt $|\xi - x_0| \geqq d$ und somit

$$|\xi - x| \geqq |\xi - x_0| - |x - x_0| > \frac{d}{2} .$$

Daraus ergibt sich

$$\int_{\Gamma''(x_0)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma \leqq \frac{2^{m-1}(m-2)\, |\Gamma''(x_0)|}{d^{m-1}} < \frac{2^{m-1}(m-2)\, |\Gamma|}{d^{m-1}} . \tag{9}$$

Wir haben also noch das Integral

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \left|\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right| d_\xi \Gamma = (m-2) \int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma$$

zu betrachten.

Wir wählen ein lokales Koordinatensystem mit dem Punkt x_0 als Ursprung; die x_m-Achse richten wir entlang der Normalen an die Fläche Γ im Punkt x_0. Wir setzen $|x - x_0| = \delta$; dann ist $\delta < \frac{d}{2}$, und im lokalen Koordinatensystem gilt $x = (0, 0, \ldots, 0, \pm\delta)$. Mit $G'(x_0)$ bezeichnen wir die Projektion der Fläche $\Gamma'(x_0)$ auf die Tangentialebene im Punkt x_0. Unter Berücksichtigung der Abschätzung (1.7) erhalten wir dann

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma = \int\limits_{G'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-1} \cos(\nu, \xi_m)} \leqq$$
$$\leqq 2 \int\limits_{G'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_{m-1}. \tag{10}$$

Wir setzen jetzt $\varrho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{m-1}^2$; offensichtlich ist ϱ der Abstand zwischen dem Punkt x_0 und der Projektion des Punktes ξ auf die Tangentialebene in x_0. Aus der Formel

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 + (\xi_m - x_m)^2 = \varrho^2 + (\xi_m \pm \delta)^2$$

ergibt sich $r \geqq \varrho$. Da andererseits das Gebiet $G'(x_0)$ durch die Ungleichung $r < d$ definiert ist, so gilt auch $\varrho < d$. Letzteres bedeutet, daß das Gebiet $G'(x_0)$ in der $(m-1)$-dimensionalen Kugel $\varrho \leqq d$ liegt; aus Formel (10) schließen wir nun

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma \leqq 2 \int\limits_{\varrho<d} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}. \tag{11}$$

Wenn $\delta = 0$ (d. h. $x = x_0 \in \Gamma$) gilt, dann ergibt sich auf Grund der Ungleichung (1.17)

$$\frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} \leqq \frac{c}{r^{m-1-\alpha}} \leqq \frac{c}{\varrho^{m-1-\alpha}} \tag{12}$$

und folglich

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma \leqq 2\,c \int\limits_{\varrho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-1-\alpha}} = \text{const}. \tag{13}$$

Damit haben wir gleichzeitig bewiesen, daß das Integral (6) für beliebiges $x \in \Gamma$ existiert.

Es sei jetzt $\delta > 0$. In diesem Fall erhalten wir unter Benutzung der Abschätzungen (1.12), (1.16) und (1.17):

$$|\cos(r, \nu)| = |\cos(r, \xi_k) \cos(\nu, \xi_k)| \leqq \sqrt{3}\,(m-1)\, a\, r_0^\alpha +$$
$$+ \frac{|\xi_m \pm \delta|}{r} \leqq c\, r_0^\alpha + a_1 \frac{r_0^{\alpha+1}}{r} + \frac{\delta}{r}.$$

Dabei ist $r_0 = |\xi - x_0|$. Somit gilt jetzt

$$2 \int\limits_{\varrho<d} \frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1} \leqq 2\, c \int\limits_{\varrho<d} \frac{r_0^\alpha\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}} +$$

$$+ 2\, a_1 \int\limits_{\varrho<d} \frac{r_0^{\alpha+1}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m} + 2\, \delta \int\limits_{\varrho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m}. \tag{14}$$

Wir wollen nun eine Abschätzung der Größen r_0 und r durch die Größe ϱ geben. Der Abstand r_0 läßt sich nach Formel (1.15) abschätzen, da in dieser Formel r den Abstand zwischen dem Punkt ξ und dem Ursprung des lokalen Koordinatensystems bedeutet. Folglich ist $r_0 \leqq 2\,\varrho$. Um den Abstand r abzuschätzen, betrachten wir zunächst die Beziehung

$$r^2 = \varrho^2 + \xi_m^2 + \delta^2 \pm 2\, \xi_m\, \delta\,.$$

Auf Grund der Ungleichung $|2\, \xi_m\, \delta| \leqq \frac{1}{2}\delta^2 + 2\, \xi_m^2$ erhalten wir dann

$$r^2 \geqq \varrho^2 + \frac{1}{2}\delta^2 - \xi_m^2\,.$$

Nach Formel (1.16_1) ergibt sich

$$|\xi_m| \leqq a_1\, \varrho^{\alpha+1} \leqq a_1\, d^\alpha \varrho\,.$$

Da man den Radius d beliebig klein wählen kann, so können wir

$$a_1\, d^\alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

voraussetzen. Dann gilt

$$r^2 \geqq \frac{1}{2}(\varrho^2 + \delta^2)\,.$$

Jetzt lassen sich die Integrale auf der rechten Seite in (14) leicht abschätzen. Für die ersten beiden Integrale ergibt sich ganz einfach

$$\int\limits_{\varrho<d} \frac{r_0^\alpha\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}} \leqq \int\limits_{\varrho<d} \frac{2^{m-1+\alpha}\, \varrho^\alpha\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\varrho^2+\delta^2)^{\frac{m-1}{2}}} \leqq$$

$$\leqq 2^{m-1+\alpha} \int\limits_{\varrho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-1-\alpha}} = \text{const}$$

und analog

$$\int\limits_{\varrho<d} \frac{r_0^{\alpha+1}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m} \leqq 2^{m+1+\alpha} \int\limits_{\varrho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-1-\alpha}} = \text{const}\,.$$

Wir betrachten jetzt das letzte Integral in der Ungleichung (14). Indem wir die Abschätzung für r benutzen, finden wir

$$\delta \int\limits_{\varrho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m} \leqq 2^{\frac{m}{2}}\, \delta \int\limits_{\varrho<d} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\varrho^2+\delta^2)^{\frac{m}{2}}} < 2^{\frac{m}{2}}\, \delta \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\varrho^2+\delta^2)^{\frac{m}{2}}}\,,$$

dabei bedeutet E_{m-1} den $(m-1)$-dimensionalen euklidischen Raum. Im letzten Integral setzen wir

$$\xi_k = \delta\,\eta_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1\,; \qquad \sum_{k=1}^{m-1} \eta_k^2 = \varrho_1^2\,.$$

Dann ergibt sich

$$\delta \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\varrho^2+\delta^2)^{\frac{m}{2}}} = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_{m-1}}{(\varrho_1^2+1)^{\frac{m}{2}}}\,.$$

Das letzte Integral konvergiert und ist folglich eine Konstante.

Jetzt ist offensichtlich, daß für $0 < \delta < \frac{d}{2}$ das Integral (14) nicht größer als eine gewisse Konstante ist. Diese Behauptung gilt aber auch im Falle $\delta = 0$ [vgl. Formel (13)]. Folglich existiert eine Konstante C' mit der Eigenschaft

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r,\nu)|}{r^m}\, d_\xi\Gamma \leqq C'\,, \qquad 0 \leqq \delta < \frac{d}{2}\,.$$

Unter Berücksichtigung der Ungleichung (9) sehen wir nun, daß der Satz 18.2.1 auch im Falle $\delta < \frac{d}{2}$ gilt; dabei kann

$$C = \frac{2^{m-1}(m-2)\,|\Gamma|}{d^{m-1}} + C'$$

gewählt werden. Der Satz 18.2.1 ist damit vollständig bewiesen.

§ 3. Das Potential der Doppelschicht

Das Potential der Doppelschicht haben wir im § 5 des Kap. 11 als ein Integral der Gestalt

$$W(x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\, \frac{\partial}{\partial\nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma \tag{1}$$

definiert, wobei ν die äußere Normale an die Fläche Γ im Punkt ξ bedeutet. Es wurde bewiesen, daß $W(x)$ sowohl im Inneren als auch im Äußeren von Γ eine harmonische Funktion darstellt; auf der Fläche Γ ist das Potential (1) nicht definiert worden.

Wir nehmen jetzt an, daß Γ eine geschlossene Ljapunow-Fläche sei und die Dichtefunktion $\sigma(\xi)$ auf dieser Fläche stetig ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende Satz.

Satz 18.3.1. *Das Potential der Doppelschicht* (1) *existiert in einem beliebigen Punkt x auf der Fläche Γ und ist eine stetige Funktion dieses Punktes $x \in \Gamma$.*

Beweis. Die Existenz des Integrals (1) in den Punkten $x \in \Gamma$ läßt sich einfach beweisen. Die Dichte $\sigma(\xi)$ ist auf der abgeschlossenen, kompakten Menge Γ stetig und folglich beschränkt. Es sei $|\sigma(\xi)| \leqq M = \text{const}$. Dann gilt

$$\left|\sigma(\xi)\, \frac{\partial}{\partial\nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\right| \leqq M \left|\frac{\partial}{\partial\nu}\, \frac{1}{r^{m-2}}\right|. \tag{2}$$

Im vorangegangenen Paragraphen wurde bewiesen, daß das Integral (2.6) für beliebiges $x \in \Gamma$ existiert; letzteres bedeutet, daß für $x \in \Gamma$ die Funktion $\left|\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right|$ auf Γ summierbar ist. Dann ist aber auch die linke Seite der Ungleichung (2) auf Γ summierbar, und folglich existiert für die genannten Punkte x das Integral (1).

Wir beweisen jetzt, daß das Integral (1) eine stetige Funktion des Punktes $x \in \Gamma$ ist. Die Abschätzung (1.17) zeigt, daß das Potential (1) einen Integraloperator mit schwacher Singularität über der Funktion $\sigma(\xi)$ darstellt. Dem Kern

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{(m-2)\cos(r, \nu)}{r^{m-1}}$$

dieses Operators geben wir die Form

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{(m-2)\, r^{-\frac{\alpha}{2}} \cos(r, \nu)}{r^{m-1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

Der Zähler, den wir mit $A(x, \xi)$ bezeichnen wollen, ist für $x \neq \xi$ eine stetige Funktion des Punktes (x, ξ) $(x, \xi \in \Gamma)$. Für $x \in \Gamma$ und $x \to \xi$ gilt auf Grund der Ungleichung (1.17) $A(x, \xi) \to 0$. Setzen wir also $A(x, x) = 0$, dann ist die Funktion $A(x, \xi)$ stetig auf $\Gamma \times \Gamma$. Nach dem Satz 7.4.1 überführt der Integraloperator (1) jede stetige Funktion wieder in eine stetige Funktion. Da nun $\sigma(\xi)$ nach Voraussetzung stetig ist, so ist auch das Potential der Doppelschicht eine stetige Funktion des Punktes $x \in \Gamma$. Der Satz ist damit bewiesen.

§ 4. Das Gausssche Integral

So nennt man das Potential der Doppelschicht, dessen Dichte identisch Eins ist, d. h. also das folgende Integral:

$$W_0(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma. \tag{1}$$

Dabei bedeutet Γ eine geschlossene Fläche und ν die äußere Normale an Γ im Punkt ξ. Für dieses Integral gilt der folgende Satz.

Satz 18.4.1. *Wenn Γ eine geschlossene* LJAPUNOW-*Fläche ist, dann gilt für das* GAUSSsche *Integral die folgende Formel:*

$$P_0(x) = \begin{cases} -(m-2)\,|S_1| = -\dfrac{2(m-2)\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, & \text{falls } x \text{ innerhalb } \Gamma, \\ 0, & \text{falls } x \text{ außerhalb } \Gamma, \\ -\dfrac{m-2}{2}\,|S_1| = -\dfrac{(m-2)\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, & \text{falls } x \text{ auf } \Gamma \text{ gelegen ist.} \end{cases} \tag{2}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß sich die ersten beiden Gleichungen von (2) für eine beliebige geschlossene stückweise glatte Fläche Γ beweisen lassen. Davon wollen wir uns jetzt überzeugen.

Es sei also Γ eine stückweise glatte geschlossene Fläche und x ein im Inneren von Γ gelegener Punkt. Wir beschreiben um diesen Punkt eine Sphäre S_ε vom Radius ε; dabei soll ε so klein gewählt werden, daß die Sphäre S_ε ebenfalls im Inneren von Γ liegt (s. Abb. 32). In dem durch die Flächen Γ und S_ε begrenzten Gebiet ist die Funktion $\frac{1}{r^{m-2}}$ harmonisch. Folglich gilt auf Grund der Formel (6.9) des Kap. 10

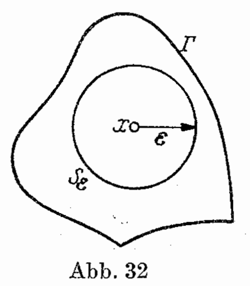


Abb. 32

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\Gamma + \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, dS_\varepsilon = 0\,. \tag{3}$$

Da auf S_ε die Normale ν entgegengesetzt zum Radiusvektor gerichtet ist, so ergibt sich

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, dS_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\, dS_\varepsilon = (m-2)\frac{|S_\varepsilon|}{\varepsilon^{m-1}} = (m-2)\,|S_1|\,, \tag{4}$$

womit die erste Gleichung von (2) bewiesen ist. Noch einfacher gestaltet sich der Beweis der zweiten Formel aus (2). Wenn der Punkt x außerhalb von Γ liegt, dann ist die Funktion $\frac{1}{r^{m-2}}$ im Inneren von Γ harmonisch, und folglich gilt

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\Gamma = 0\,.$$

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem dritten Integral von (2). Es sei Γ eine geschlossene LJAPUNOW-Fläche und $x \in \Gamma$. Die Existenz des GAUSSschen Integrals im Punkt x folgt aus dem Satz des vorangegangenen Paragraphen. Wir wollen jetzt den Wert dieses Integrals berechnen und verfahren dabei wie folgt.

Wir wählen eine Zahl ε, $0 < \varepsilon < d$, und beschreiben um den Punkt $x \in \Gamma$ eine Sphäre S_ε vom Radius ε. Den Teil der Fläche Γ, der außerhalb dieser Sphäre liegt, bezeichnen wir mit Γ'_ε; der im Inneren von Γ gelegene Teil der Sphäre S_ε soll mit S'_ε bezeichnet werden (s. Abb. 33). Da das GAUSSsche Integral für $x \in \Gamma$ konvergiert, so ist

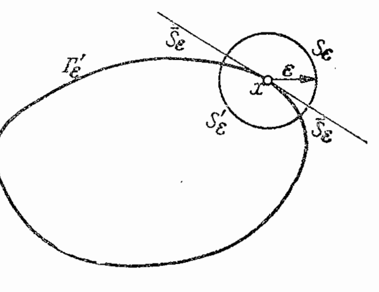


Abb. 33

$$W_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma\,. \tag{5}$$

Da der Punkt x außerhalb des Gebietes liegt, das durch die Flächen Γ'_ε und S'_ε berandet wird, so ist in diesem Gebiet die Funktion $\frac{1}{r^{m-2}}$ harmonisch, und folglich gilt

$$\int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma + \int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_\varepsilon = 0 .$$

Dann ergibt sich aber

$$W_0(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_\varepsilon . \tag{6}$$

Da in dem Integral (6) die Normale ν entgegengesetzt zum Radiusvektor gerichtet ist, so erhalten wir schließlich

$$\int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_\varepsilon = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}} \int_{S'_\varepsilon} d_\xi S_\varepsilon = (m-2) \frac{|S'_\varepsilon|}{\varepsilon^{m-1}} . \tag{7}$$

Für hinreichend kleines ε stimmt die Fläche S'_ε nahezu mit der durch die Tangentialebene gebildeten Halbsphäre überein (s. Abb. 33); die Größe $|S'_\varepsilon|$ unterscheidet sich vom Flächeninhalt der Halbsphäre $\frac{\pi^{\frac{m}{2}} \varepsilon^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$ lediglich durch den Flächeninhalt des zwischen Γ und der Tangentialebene eingeschlossenen Flächenstreifens $\overline{S}_\varepsilon$. Die Höhe dieses Streifens ist gleich dem Maximalwert von $|\xi_m|$ in den Schnittpunkten der Flächen Γ und S_ε. Wegen $\varepsilon < d$ liegen diese Punkte im Inneren der LJAPUNOW-Kugel, und für sie gilt folglich die Abschätzung (1.16_2):

$$|\xi_m| \leq a_1 \, r^{\alpha+1} = a_1 \, \varepsilon^{\alpha+1} .$$

Daraus ersieht man leicht (die Einzelheiten dieses Beweises überlassen wir dem Leser), daß der Inhalt des Flächenstreifens von der Ordnung $O(\varepsilon^{m-1+\alpha})$ ist. Jetzt ist offensichtlich, daß

$$\int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_\varepsilon = \frac{(m-2)\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + O(\varepsilon^\alpha)$$

und folglich

$$W_0(x) = \frac{-(m-2)\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \qquad x \in \Gamma ,$$

gilt. Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

§ 5. Die Grenzwerte des Potentials der Doppelschicht

Am Beispiel des GAUSSschen Integrals ist ersichtlich, daß das Potential der Doppelschicht im allgemeinen eine Unstetigkeit erfährt, wenn der Punkt x durch die Fläche Γ hindurchgeht. Wie wir aber sofort sehen werden, existieren unter hinreichend allgemeinen Voraussetzungen die Grenzwerte des Potentials der Doppelschicht, wenn der Punkt x einem beliebigen Punkt $x_0 \in \Gamma$ von innen oder von außen her zustrebt. Wir wollen mit $W_i(x_0)$ und $W_e(x_0)$ entsprechend die Grenzwerte des Potentials der Doppelschicht $W(x)$ im Punkt $x_0 \in \Gamma$ bezeichnen, wenn der Punkt x von innen bzw. von außen her gegen den Punkt x_0 strebt. Den Wert dieses Potentials im Punkt x_0 werden wir mit $\overline{W(x_0)}$ bezeichnen.

Satz 18.5.1. *Es sei Γ eine geschlossene* LJAPUNOW-*Fläche und $\sigma(\xi)$ eine auf Γ stetige Dichtefunktion. Dann gelten für das Potential der Doppelschicht* (3.1) *die folgenden Grenzwertbeziehungen:*

$$\left.\begin{aligned} W_i(x_0) &= -\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\sigma(x_0) + \overline{W(x_0)}\,, \\ W_e(x_0) &= \frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\sigma(x_0) + \overline{W(x_0)}\,, \end{aligned}\right\} x_0 \in \Gamma\,. \tag{1}$$

Beweis. Die Formel (3.1) schreiben wir in der Form

$$W(x) = W_1(x) + \sigma(x_0)\, W_0(x)\,. \tag{2}$$

Dabei bedeutet W_0 das GAUSSsche Integral und

$$W_1(x) = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma\,. \tag{3}$$

$W_1(x)$ ist das Potential der Doppelschicht mit der Dichte $\sigma(\xi) - \sigma(x_0)$; letztere ist gleich Null für $\xi = x_0$. Wir beweisen jetzt die Stetigkeit dieses Potentials im Punkt x_0.

Um den Punkt x_0 beschreiben wir eine Kugel von einem gewissen Radius η; die Fläche Γ wird dadurch in zwei Teile Γ' und Γ'' zerlegt, von denen der erste innerhalb der Kugel und der zweite außerhalb der Kugel gelegen ist. Für das Potential $W_1(x)$ ergibt sich dann entsprechend

$$W_1(x) = W_1'(x) + W_1''(x)$$

mit

$$W_1'(x) = \int_{\Gamma'} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma\,,$$

$$W_1''(x) = \int_{\Gamma''} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma\,.$$

Wir betrachten die offensichtliche Ungleichung

$$|W_1(x) - \overline{W_1(x_0)}| \leqq |W_1'(x)| + |\overline{W_1'(x_0)}| + |W_1''(x) - \overline{W_1''(x_0)}|\ ; \tag{4}$$

der Strich über einer Funktion bedeutet stets den Wert des entsprechenden Potentials auf der Fläche Γ.

Wir schätzen nun die rechte Seite der Ungleichung (4) ab. Zunächst wählen wir die Zahl η derart, daß für $|\xi - x_0| < \eta$ die Ungleichung

$$|\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3\,C}$$

erfüllt ist; dabei bedeuten ε eine beliebig vorgegebene positive Zahl und C die in die Ungleichung (2.6) eingehende Konstante. Eine derartige Wahl der Zahl η ist auf Grund der Stetigkeit der Dichte $\sigma(\xi)$ möglich. Dann gilt für beliebiges $x \in E_m$

$$|W_1'(x)| \leqq \int_{\Gamma'} |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| \left|\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3\,C} \int_{\Gamma'} \left|\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma \leqq \frac{\varepsilon}{3\,C} \int_{\Gamma} \left|\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right| d\Gamma \leqq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Insbesondere ist

$$|\overline{W_1'(x_0)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Wir halten jetzt die Zahl η fest und betrachten nur solche Punkte x, für die $|x - x_0| \leqq \frac{1}{2}\eta$ gilt. Dann erhalten wir für die Fläche Γ'':

$$r = |\xi - x| \geqq |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqq \eta - \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\eta.$$

Da der Integrand im Integral $W_1''(x)$ stetig ist, so ist auch die Funktion $W_1''(x)$ stetig; folglich gibt es eine Zahl $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß für $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung

$$|W_1''(x) - W_1''(x_0)| = |W_1''(x) - \overline{W_1''(x_0)}| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}$$

erfüllt ist.

Aus den Beziehungen (4) bis (7) folgt jetzt

$$|W_1(x) - \overline{W_1(x_0)}| < \varepsilon \tag{8}$$

für alle x mit der Eigenschaft $|x - x_0| < \delta$; letzteres bedeutet die Stetigkeit des Potentials $W_1(x)$ im Punkt x_0. Folglich stimmen in diesem Punkt die Grenzwerte des Potentials $W_1(x)$ mit dem Wert $\overline{W_1(x_0)}$ überein:

$$W_{1i}(x_0) = W_{1e}(x_0) = \overline{W_1(x_0)}. \tag{9}$$

Die Formel (4.2) liefert für das GAUSSsche Integral $W_0(x)$ die Grenzwerte

$$W_{0i}(x_0) = -(m-2)\,|S_1|, \qquad W_{0e}(x_0) = 0$$

sowie den Wert

$$\overline{W_0(x_0)} = -\frac{m-2}{2}\,|S_1|.$$

Jetzt folgt aus den Formeln (2) und (9) die Existenz der Grenzwerte $W_i(x_0)$ und $W_e(x_0)$:

$$\begin{aligned} W_i(x_0) &= \overline{W_1(x_0)} + \sigma(x_0)\, W_{0i}(x_0) = \overline{W_1(x_0)} - (m-2)\,|S_1|\,\sigma(x_0)\,, \\ W_e(x_0) &= \overline{W_1(x_0)} + \sigma(x_0)\, W_{0e}(x_0) = \overline{W_1(x_0)}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Des weiteren gilt

$$\overline{W_1(x_0)} = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r_0^{m-2}}\, d_\xi \Gamma =$$

$$= \overline{W(x_0)} + \frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\sigma(x_0)\,, \qquad r_0 = |\xi - x_0|\,, \tag{11}$$

und die Formeln (1) ergeben sich unmittelbar aus den Beziehungen (10) und (11). Der Satz ist damit bewiesen.

Aus den Formeln (1) erhält man eine einfache Beziehung, die die Werte der Dichtefunktion des Potentials der Doppelschicht mit dessen Grenzwerten verknüpft:

$$W_i(x_0) - W_e(x_0) = -(m-2)\,|S_1|\,\sigma(x_0)\,. \tag{12}$$

Bemerkung 1. Wenn die Dichte $\sigma(\xi)$ auf Γ nicht stetig, sondern nur summierbar ist, dann erweist es sich, daß die Grenzwerte des Potentials der Doppelschicht fast überall auf Γ existieren und durch dieselben Formeln (1) geliefert werden.

Bemerkung 2. Für die Normalableitung des Potentials der Doppelschicht gilt der folgende Satz von LJAPUNOW. Es sei Γ eine geschlossene LJAPUNOW-Fläche und $\sigma(\xi)$ eine auf Γ stetige Dichtefunktion. Wenn die Normalableitung des Potentials der Doppelschicht einen Grenzwert für $x \to x_0 \in \Gamma$ von innen (bzw. von außen) her besitzt, dann existiert auch der Grenzwert dieser Ableitung von außen (bzw. von innen) her und beide stimmen überein.

Satz 18.5.2. *Es sei Γ eine geschlossene* LJAPUNOW-*Fläche und $\sigma(\xi)$ eine auf Γ stetige Dichtefunktion. Dann konvergiert das Potential der Doppelschicht gleichmäßig gegen seine Grenzwerte sowohl von innen als auch von außen her.*

Beweis. Wir behalten hier die beim Beweis des Satzes 18.5.1 eingeführten Bezeichnungen bei. Als stetige Funktion ist $\sigma(\xi)$ gleichmäßig stetig auf Γ. Folglich kann der Radius η unabhängig von der Lage des Punktes x_0 auf der Fläche Γ gewählt werden. Des weiteren bemerken wir, daß das Potential $W_1''(x)$ in Wirklichkeit eine Funktion der beiden Punkte $x \in E_m$ und $x_0 \in \Gamma$ ist. Wenn der Radius η fest ist, dann ist die genannte Funktion auf der durch die Beziehungen

$$x_0 \in \Gamma\,, \qquad |x - x_0| \leqq \frac{1}{2}\eta$$

definierten abgeschlossenen beschränkten Punktmenge stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Folglich kann die in die Ungleichung (8) eingehende Zahl δ so gewählt werden, daß sie nur von ε abhängt. Dann folgt aus dieser Beziehung (8), daß $W_1(x) \underset{x \to x_0}{\to} W_1(x_0)$ gleichmäßig bezüglich des Punktes $x_0 \in \Gamma$ gilt.

Das Potential $W_0(x)$ ist sowohl innerhalb als auch außerhalb von Γ konstant; folglich konvergiert $W_0(x)$ für $x \to x_0$ sowohl von innen als auch von außen her gleichmäßig gegen seine Grenzwerte.

Aus der Formel (2) ist dann ersichtlich, daß dieselbe Eigenschaft auch das Potential $W(x)$ besitzt. Der Satz ist bewiesen.

§ 6. Die Stetigkeit des Potentials der einfachen Schicht

Satz 18.6.1. *Es sei Γ eine geschlossene* LJAPUNOW-*Fläche und $\mu(\xi)$ eine auf Γ meßbare und beschränkte Dichtefunktion. Dann ist das Potential der einfachen Schicht*

$$V(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma \tag{1}$$

im gesamten Raum E_m stetig.

Beweis. Die Stetigkeit des Potentials (1) ist für $x \notin \Gamma$ offensichtlich; es ist also nur der Fall $x \in \Gamma$ zu betrachten.

Wir beweisen zunächst, daß das Integral (1) für $x \in \Gamma$ konvergiert und folglich das Potential der einfachen Schicht $V(x)$ auf der Fläche Γ definiert ist. Wir betrachten die LJAPUNOW-Kugel $S(x)$ und bezeichnen mit $\Gamma'(x)$ den Teil der Fläche Γ, der im Inneren von $S(x)$ gelegen ist. Dann gilt

$$V(x) = \int_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma .$$

Da der Integrand des zweiten Integrals stetig ist, so genügt es, das erste Integral zu betrachten. Wir führen ein lokales Koordinatensystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ mit dem Ursprung im Punkt x ein, wobei die ξ_m-Achse entlang der Normalen an Γ im Punkt x gerichtet sein soll. Des weiteren sei

$$\varrho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{m-1}^2 .$$

Indem wir die Projektion der Fläche $\Gamma'(x)$ auf die Tangentialebene $\xi_m = 0$ an Γ im Punkt x mit $G'(x)$ bezeichnen, erhalten wir

$$\int_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\xi = \int_{G'(x)} \mu(\xi) \frac{d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-2} \cos(\nu, \xi_m)} . \tag{2}$$

Wenn nun $|\mu(\xi)| \leqq M = \text{const}$ gilt, dann ist der Integrand durch

$$\frac{2\,M}{\varrho^{m-2}}$$

beschränkt, woraus die Konvergenz des Integrals (2) unmittelbar folgt.

Wir beweisen jetzt, daß das Potential (1) in einem beliebigen Punkt $x \in \Gamma$ stetig ist. Es sei y ein beliebiger Punkt des Raumes E_m. Wir beschreiben um den Punkt x eine Kugel vom Radius $\eta < d$ und bezeichnen mit Γ'_η und Γ''_η die Teile der Fläche Γ, die innerhalb bzw. außerhalb dieser Kugel gelegen sind. Dementsprechend zerlegen wir das Integral (1) in zwei Integrale, über Γ'_η und über Γ''_η; diese Integrale bezeichnen wir mit V' und V''. Dann gilt offenbar

$$|V(y) - V(x)| \leqq |V'(y)| + |V'(x)| + |V''(y) - V''||(x)| . \tag{3}$$

Wir schätzen zunächst den ersten Summanden in (3) ab. Wegen $\eta < d$ ergibt sich $\Gamma'_\eta \subset \Gamma'(x)$. Auf Γ'_η führen wir ein lokales Koordinatensystem mit dem Ursprung in x ein. Mit y' bezeichnen wir die Projektion des Punktes y auf die Tangentialebene im Punkt x (s. Abb. 34); im lokalen Koordinatensystem hat y' die Gestalt $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, 0)$. Wir setzen

$$\varrho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (\xi_k - y_k)^2 .$$

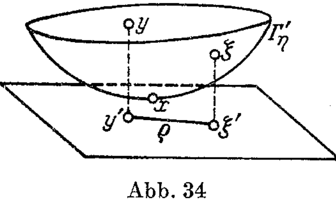


Abb. 34

Dann ist ϱ der Abstand zwischen den Projektionen der Punkte ξ und y auf die Tangentialebene im Punkt x, und folglich gilt $\varrho \leqq |\xi - y|$. Nun ergibt sich

$$|V'(y)| = \left| \int_{\Gamma'_\eta} \mu(\xi) \frac{d_\xi \Gamma}{|\xi - y|^{m-2}} \right| \leqq M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-2} \cos(\nu, \xi_m)} \leqq 2\, M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-2}},$$

dabei bedeutet G'_η die Projektion der Fläche Γ'_η auf die Tangentialebene im Punkt x.

Wir wählen jetzt den Punkt y in einer solchen Umgebung des Punktes x, daß $|y - x| < \frac{1}{2}\eta$ gilt. Dann erhalten wir für $\xi \in \Gamma'_\eta$

$$\varrho \leqq |\xi - y| \leqq |\xi - x| + |x - y| < \frac{3}{2}\eta .$$

Letzteres bedeutet, daß das Gebiet G'_η ganz in der $(m - 1)$-dimensionalen Kugel $\varrho < \frac{3}{2}\eta$ enthalten ist, und folglich gilt

$$|V'(y)| \leqq 2\, M \int_{\varrho < \frac{3}{2}\eta} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-2}} . \tag{4}$$

Im $(m - 1)$-dimensionalen Raum führen wir Kugelkoordinaten mit dem Ursprung im Punkt y' ein. Dann ist $d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1} = \varrho^{m-2}\, d\varrho\, d\sigma_1$, wobei σ_1 die Einheitssphäre im $(m - 1)$-dimensionalen Raum und $d\sigma_1$ das Flächenelement derselben bezeichnet. Die Formel (4) nimmt dann die Gestalt

$$|V'(y)| \leqq 2\, M \int_{\sigma_1} d\sigma_1 \int_0^{\frac{3}{2}\eta} d\varrho = 3\, M\, |\sigma_1|\, \eta$$

an.

Es sei jetzt ε eine beliebig vorgegebene positive Zahl und $\eta = \frac{\varepsilon}{9\, M\, |\sigma_1|}$. Dann folgt aus $|y - x| < \frac{\varepsilon}{18\, M\, |\sigma_1|}$ die Ungleichung $|V'(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Offensichtlich gilt aber auch für $y = x$:

$$|V'(x)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Die Ungleichung (3) liefert jetzt

$$|V(y) - V(x)| < \frac{2}{3}\varepsilon + |V''(y) - V''(x)| .$$

Die Zahl $\delta > 0$ wählen wir nun derart, daß die folgenden beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind: $\delta < \frac{\varepsilon}{18\, M\, |\sigma_1|}$ und

$$|V''(y) - V''(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } |y - x| < \delta .$$

Dann ergibt sich $|V(y) - V(x)| < \varepsilon$, und der Satz ist bewiesen.

§ 7. Die Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht

Wir betrachten wiederum das Potential der einfachen Schicht (6.1) unter der Voraussetzung, daß Γ eine geschlossene LJAPUNOW-Fläche ist.

Es sei x ein beliebiger Punkt des Raumes E_m und n die durch x führende äußere Normale an die Fläche Γ. Wenn $x \notin \Gamma$ ist, dann kann man die Ableitung des Potentials (6.1) nach der Richtung der Normalen n berechnen, indem man einfach unter dem Integral differenziert:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma . \tag{1}$$

Eine analoge Überlegung wie im § 2 liefert die Formel

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{m-2}{r^{m-1}} \cos(r, n) . \tag{2}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = (m-2) \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}}\, d_\xi \Gamma . \tag{3}$$

Es sei jetzt $x \in \Gamma$. In diesem Fall konvergiert das Integral (3), wenn die Dichtefunktion $\mu(\xi)$ meßbar und beschränkt ist. Diese Behauptung wollen wir jetzt beweisen. Es sei also $|\mu(\xi)| \leqq M = \text{const}$. Wenn man mit $\Gamma'(x)$ den im Inneren der LJAPUNOW-Kugel $S'(x)$ gelegenen Teil der Fläche Γ bezeichnet, dann genügt es, die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}}\, d_\xi \Gamma$$

zu beweisen.

Indem wir lokale Koordinaten mit dem Ursprung im Punkt x einführen, bringen wir das letzte Integral auf die Gestalt

$$\int_{G'(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\cos(\nu, \xi_m)} , \tag{4}$$

dabei bedeutet $G'(x)$ die Projektion der Fläche $\Gamma'(x)$ auf die Tangentialebene im Punkt x. Der Integrand in (4) ist beschränkt durch

$$\frac{2\,M}{\varrho^{m-1}}\,|\cos(r,\,n)|\,,\qquad \varrho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{m-1}^2\,.$$

Des weiteren gilt

$$\cos(r,\ n) = \cos(r,\,\xi_m) = \frac{\xi_m}{r}\,.$$

Da nun auf Grund der Ungleichungen (1.16) und (1.15)

$$|\cos(n,\,r)| \leqq a_1\,r^\alpha \leqq 2^\alpha\,a_1\,\varrho^\alpha \tag{5}$$

ist, so erhalten wir für den Integranden von (4) eine Abschätzung durch die Funktion

$$\frac{2^\alpha\,M\,a_1}{\varrho^{m-1-\alpha}}\,.$$

Letztere sichert die Konvergenz des Integrals (3).

Etwas später werden wir sehen, daß man den Wert des Integrals (3) für $x \in \Gamma$ nicht als Normalableitung des Potentials (6.1) ansehen kann; wir bezeichnen diesen Wert mit $\overline{\dfrac{\partial V(x)}{\partial n}}$.

Wenn die Grenzwerte der Normalableitung $\dfrac{\partial V(x)}{\partial n}$ für $x \to x_0 \in \Gamma$ von innen und entsprechend von außen her existieren, dann bezeichnen wir diese mit $\dfrac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}$ bzw. $\dfrac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}$.

Satz 18.7.1. *Es sei Γ eine geschlossene* Ljapunow-*Fläche und $\mu(\xi)$ eine auf Γ stetige Dichtefunktion. Dann besitzt das Potential der einfachen Schicht* (6.1) *auf der Fläche Γ sowohl von innen als auch von außen her eine regelmäßige Normalableitung. Für die Grenzwerte der Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht gelten die folgenden Beziehungen:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} &= \frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}\,,\\ \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} &= -\,\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Beweis. Wir betrachten das Potential der Doppelschicht

$$W(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi \Gamma \tag{7}$$

und bilden die Summe

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} + W(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\right] d_\xi \Gamma\,.$$

Zunächst beweisen wir, daß diese Summe eine stetige Funktion des Punktes x auf der Normalen an die Fläche Γ darstellt.

Es sei x_0 ein Punkt auf der Fläche Γ, n die Normale an Γ in diesem Punkt und x ein beliebiger Punkt auf der Normalen n, der sich innerhalb oder außerhalb von Γ befindet. Wir beschreiben um den Punkt x_0 eine Kugel vom Radius $\eta < d$ und bezeichnen mit Γ'_η den Teil der Fläche Γ, der im Inneren dieser Kugel gelegen ist. Die Überlegungen aus dem vorangegangenen Paragraphen zeigen, daß es hinreichend ist, die folgende Behauptung zu verifizieren: Für beliebig vorgegebenes positives ε und hinreichend kleines η gilt die Ungleichung

$$A = \left| \int_{\Gamma'_\eta} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right] d_\xi \Gamma \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir finden zunächst

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(n, \xi_k),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{-(m-2)}{r^{m-1}} \frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(\nu, \xi_k).$$

Jetzt führen wir ein lokales Koordinatensystem mit dem Ursprung im Punkt x_0 ein. In diesem System ist $x_k = 0$, $\cos(n, \xi_k) = 0$ für $1 \leqq k \leqq m-1$ und $\cos(n, \xi_m) = 1$. Somit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} =$$

$$= \frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\xi_m - x_m}{r} [1 - \cos(\nu, \xi_m)] - \frac{m-2}{r^{m-1}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\xi_k}{r} \cos(\nu, \xi_k).$$

Auf Grund der Ungleichungen (1.12) und (1.6) ergibt sich

$$|\cos(\nu, \xi_k)| \leqq \sqrt{3}\, a\, r_0^\alpha, \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqq 1 - \frac{a^2 r_0^{2\alpha}}{2}$$

mit $r_0 = |\xi - x_0|$, und aus der letzten Ungleichung folgt

$$1 - \cos(\nu, \xi_m) \leqq \frac{a^2 r_0^{2\alpha}}{2} < \frac{a r_0^\alpha}{2}.$$

Jetzt schließt man leicht auf die Beziehung

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| \leqq \frac{c_1 r_0^\alpha}{r^{m-1}}, \qquad c_1 = \text{const}. \tag{8}$$

Wir setzen $\varrho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{m-1}^2$ und bezeichnen mit G'_η die Projektion der Fläche Γ'_η auf die Tangentialebene im Punkt x_0. Nach Formel (1.15) ist dann $r_0 \leqq 2\varrho$. Andererseits gilt

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 + (\xi_m - x_m)^2 \geqq \varrho^2$$

und somit $r \geqq \varrho$. Aus Formel (8) ergibt sich jetzt

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| \leqq \frac{2^\alpha c_1}{\varrho^{m-1-\alpha}}. \tag{9}$$

Es sei nun $|\mu(\xi)| \leqq M$. Dann finden wir

$$A \leqq 2^\alpha c_1 M \int_{\Gamma'_\eta} \frac{d_\xi \Gamma}{\varrho^{m-1-\alpha}} = 2^\alpha c_1 M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-1-\alpha} \cos(\nu, \xi_m)} \leqq$$

$$\leqq 2^{\alpha+1} c_1 M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-1-\alpha}}.$$

Da im Gebiet G'_η die Ungleichung $\varrho \leqq r \leqq \eta$ erfüllt ist, so ist dieses Gebiet ganz in der Kugel $\varrho \leqq \eta$ enthalten, und folglich gilt

$$A \leqq 2^{\alpha+1} c_1 M \int_{\varrho<\eta} \frac{d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\varrho^{m-1-\alpha}} = 2^{\alpha+1} c_1 M \int_{\sigma_1} d\sigma_1 \int_0^\eta \varrho^{\alpha-1} \, d\varrho =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1} c_1 M |\sigma_1|}{\alpha} \eta^\alpha ;$$

dabei ist σ_1 die Einheitssphäre im $(m-1)$-dimensionalen Raum. Es genügt jetzt

$$\eta < \left[\frac{\alpha \varepsilon}{3 \cdot 2^{\alpha+1} c_1 M |\sigma_1|} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

zu wählen, dann erhalten wir

$$A < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Indem wir die Überlegungen aus den §§ 3 und 6 wiederholen und die Abschätzung (10) benutzen, überzeugen wir uns davon, daß die Summe $\frac{\partial V(x)}{\partial n} + W(x)$ stetig ist, wenn man mit dem Punkt x durch die Fläche Γ hindurchgeht. Dann stimmen also die Grenzwerte dieser Summe mit den Werten auf Γ überein:

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} + W_i(x_0) = \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} + W_e(x_0) = \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} + \overline{W(x_0)}.$$

Daraus ergeben sich die gesuchten Beziehungen

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} = \overline{W(x_0)} - W_i(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} = \frac{(m-2)\,|S_1|}{2} \mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}},$$

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} = \overline{W(x_0)} - W_e(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} = -\frac{(m-2)\,|S_1|}{2} \mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (6) erhalten wir eine Formel, die die Dichte des Potentials der einfachen Schicht mit den Grenzwerten der Normalableitung dieses Potentials verknüpft:

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} - \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} = (m-2)\,|S_1|\,\mu(x_0). \tag{11}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\frac{\partial V(x)}{\partial n_i}$ und $\frac{\partial V(x)}{\partial n_e}$ die regelmäßigen Normalableitungen sind. Zunächst ist

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \left[\frac{\partial V(x)}{\partial n} + W(x)\right] - W(x) . \tag{12}$$

Nach dem bereits Bewiesenen ist der Ausdruck in den eckigen Klammern stetig und konvergiert folglich gleichmäßig gegen seinen Grenzwert; dabei ist es gleichgültig, ob sich der Punkt x von innen oder von außen her dem Punkt x_0 nähert. Des weiteren strebt auf Grund des Satzes 18.5.2 das Potential der Doppelschicht $W(x)$ gleichmäßig gegen seinen Grenzwert, wenn x entweder von innen oder von außen her gegen x_0 strebt. Auf Grund der Formel (12) besitzt dieselbe Eigenschaft auch die Funktion $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$. Nach Definition (s. Kap. 12, § 2) besitzt dann das Potential (6.1) sowohl von innen als auch von außen her eine regelmäßige Normalableitung. Der Satz ist damit bewiesen.

§ 8. Zurückführung der DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme auf Integralgleichungen

Wir betrachten eine geschlossene LJAPUNOW-Fläche Γ; diese berandet zwei Gebiete: ein Innengebiet Ω und ein Außengebiet Ω'. Für die homogene LAPLACE-Gleichung kann man dann vier Randwertaufgaben gleichzeitig formulieren: Gesucht sei eine Funktion $u(x)$, die im Gebiet Ω bzw. Ω' harmonisch ist und die entweder die Randbedingung des DIRICHLETschen Problems

$$u|_\Gamma = \varphi(x) \tag{1}$$

oder die Randbedingung des NEUMANNschen Problems

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \psi(x) \tag{2}$$

erfüllt. Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien auf Γ stetig.

Mit D_i und D_e bezeichnen wir das DIRICHLETsche Problem für das Innen- bzw. Außengebiet, mit N_i und N_e — entsprechend das NEUMANNsche Problem für das Innen- bzw. Außengebiet. Die Lösungen dieser Probleme suchen wir in Form eines gewissen Potentials. Genauer gesagt suchen wir die Lösung des DIRICHLETschen Problems als Potential der Doppelschicht

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma , \tag{3}$$

die Lösung des NEUMANNschen Problems als Potential der einfachen Schicht

$$u(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma ; \tag{4}$$

von den gesuchten Dichtefunktionen $\sigma(\xi)$ und $\mu(\xi)$ fordern wir Stetigkeit auf der Fläche Γ.

Bei einer solchen Lösungsdarstellung erhalten wir von vornherein Funktionen, die in den entsprechenden Gebieten harmonisch sind, so daß lediglich die Randbedingungen erfüllt werden müssen. Wir bemerken allerdings, daß wir beim Problem D_e auf einige Schwierigkeiten treffen werden. Eine Lösung dieses Problems kann nämlich im Unendlichen von der Ordnung $O(|x|^{2-m})$ sein; das Potential (3) hingegen nimmt mit der Ordnung $O(|x|^{1-m})$ schneller ab. Demzufolge kann nicht jede in Ω' harmonische Funktion in der Form (3) dargestellt werden.

Betrachten wir z. B. das DIRICHLETsche Problem D_i. Die Randbedingung (1) ist dann wie folgt zu verstehen: Für $x \in \Omega$ und $x \to x_0 \in \Gamma$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0) \,. \tag{5}$$

Da nun $u(x)$ ein Potential der Doppelschicht darstellt, dessen Dichte nach Voraussetzung stetig ist, so ergibt sich in diesem Fall auf Grund der Formel (5.1)

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = -\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\sigma(x_0) + \int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{|\xi - x_0|^{m-2}}\,d_\xi \Gamma \,.$$

Wenn man dies in die Formel (5) einsetzt, x_0 durch x ersetzt und anschließend durch $-\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}$ dividiert, dann erhält man für die gesuchte Funktion $\sigma(x)$ die folgende Integralgleichung:

$$\sigma(x) - \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi \Gamma = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\,\varphi(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,.$$

Unter Benutzung der Formeln (5.1) und (7.6) für die Grenzwerte sowie der Randbedingungen (1) und (2) ergeben sich auch für die übrigen drei Probleme entsprechende Integralgleichungen. Wir wollen alle vier Integralgleichungen nacheinander aufschreiben:

$$(D_i) \qquad \sigma(x) - \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi \Gamma = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\,\varphi(x)\,, \tag{6}$$

$$(D_e) \qquad \sigma(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi \Gamma = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\,\varphi(x)\,, \tag{7}$$

$$(N_i) \qquad \mu(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi \Gamma = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\,\psi(x)\,, \tag{8}$$

$$(N_e) \qquad \mu(x) - \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi \Gamma = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\,\psi(x)\,. \tag{9}$$

In den Gleichungen (6) bis (9) ist $x \in \Gamma$.

Dabei gelten folgende Eigenschaften der Gleichungen (6)—(9):

1. Die Abschätzung (1.17) sowie die Formeln (7.2) und (7.5) zeigen, daß die Gleichungen (6)—(9) Integralgleichungen mit schwacher Singularität darstellen.

2. Jeder der Kerne

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$$

entsteht aus dem anderen durch Vertauschung der Argumente. Da diese Kerne außerdem reell sind, so sind sie zueinander adjungiert (s. Kap. 8, § 1). Folglich sind die Gleichungen (6) und (9) sowie die Gleichungen (7) und (8) paarweise zueinander adjungiert.

3. Jede quadratisch summierbare Lösung der Gleichungen (6) bis (9) ist auf Γ stetig. In der Tat gilt nach § 3

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{A(x,\xi)}{r^{m-1-\frac{\alpha}{2}}},$$

wobei $A(x, \xi)$ eine auf $\Gamma \times \Gamma$ stetige Funktion bedeutet. Durch Vertauschung der Argumente x und ξ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{A(\xi,x)}{r^{m-1-\frac{\alpha}{2}}},$$

wobei die Funktion $A(\xi, x)$ ebenfalls auf $\Gamma \times \Gamma$ stetig ist. Berücksichtigen wir schließlich, daß die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach Voraussetzung stetig sind, dann folgt die Behauptung aus dem Satz 8.6.1.

Die Gleichungen (6)—(9) nennt man gewöhnlich die *Integralgleichungen der Potentialtheorie.*

§ 9. Die DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme im Halbraum

Bis jetzt haben wir noch nicht definiert, was wir unter einer harmonischen Funktion im Halbraum oder allgemein in einem Gebiet mit unendlichem Rand verstehen wollen. Wir erweitern auf diesen Fall die früher für ein endliches Gebiet gegebene Definition: In einem Gebiet mit unendlichem Rand heißt eine Funktion harmonisch, wenn sie in diesem Gebiet stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt und die homogene LAPLACE-Gleichung erfüllt.

Die im vorangegangenen Paragraphen erhaltenen Integralgleichungen ermöglichen die Lösung der DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme für die homogene LAPLACE-Gleichung im Halbraum; dabei muß man lediglich fordern, daß die vorgegebenen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mit einer bestimmten Ordnung im Unendlichen abnehmen. Ausführlicher kommen wir darauf etwas später zu sprechen.

Unter gewissen natürlichen Einschränkungen lassen sich die oben bewiesenen Sätze über die Potentiale auch auf den Fall einer unendlichen Fläche Γ über-

tragen. Wenn z. B. Γ die Hyperebene $\xi_m = 0$ darstellt, dann muß man zusätzlich fordern, daß die Dichte $\sigma(\xi)$ des Potentials der Doppelschicht im Unendlichen die Ordnung

$$\sigma(\xi) = O(\varrho^{-\beta}), \quad \varrho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2, \quad \beta = \text{const} > 0, \tag{1}$$

die Dichte $\mu(\xi)$ des Potentials der einfachen Schicht hingegen die Ordnung

$$\mu(\xi) = O(\varrho^{-\beta-1}) \tag{2}$$

besitzt; unter diesen Voraussetzungen konvergieren die Integrale (3.1) und (6.1).

Im Falle des Halbraumes genügt es, sich etwa auf das Randwertproblem für das Innengebiet zu beschränken und lediglich die Gleichungen (8.6) und (8.8) zu betrachten. Nach der Formel (2.4) hat der Kern der Gleichung (8.6) die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{(m-2)}{r^{m-1}} \cos(r, \nu).$$

Im vorliegenden Fall ist die in bezug auf den Halbraum $\xi_m > 0$ äußere Normale ν der ξ_m-Achse entgegen gerichtet. Wenn nun beide Punkte x und ξ in der Ebene $\xi_m = 0$ liegen, dann liegt in dieser Ebene auch der Vektor r und folglich gilt $\cos(r, \nu) \equiv 0$. Also ist der Kern der Gleichung (8.6) und damit auch der zu ihm adjungierte Kern der Gleichung (8.8) identisch Null. Die genannten Gleichungen ergeben jetzt

$$\sigma(x) = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \varphi(x), \quad \mu(x) = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \psi(x).$$

Folglich wird die Lösung des DIRICHLETschen Problems für den Halbraum $x_m > 0$ durch die Formel

$$u(x) = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{1}{r^{m-2}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1} \tag{3}$$

geliefert; die Lösung des NEUMANNschen Problems hat die Gestalt

$$u(x) = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}. \tag{4}$$

Dabei muß für die Dichten der Potentiale (3) und (4) im Unendlichen

$$\varphi(\xi) = O(\varrho^{-\beta}), \quad \psi(\xi) = O(\varrho^{-\beta-1}), \quad \beta = \text{const} > 0$$

gelten.

Führt man in der Formel (3) die Differentiation durch, dann ergibt sich

$$u(x) = \frac{2\,x_m}{|S_1|} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{r^m} \, d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}, \tag{3_1}$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (\xi_k - x_k)^2 + x_m^2.$$

§ 10. Untersuchung des ersten Paares adjungierter Gleichungen

Die weitere Untersuchung der Integralgleichungen der Potentialtheorie führen wir unter der Voraussetzung durch, daß Γ eine geschlossene und reguläre Fläche sei. Wir bemerken, daß eine reguläre Fläche notwendigerweise eine LJAPUNOW-Fläche mit dem Exponenten $\varkappa = 1$ ist (Man beweise diese Behauptung!).

Im vorliegenden Paragraphen wollen wir beweisen, daß die Integralgleichungen (8.6) und (8.9), welche dem DIRICHLETschen Problem D_i für das Innengebiet bzw. dem NEUMANNschen Problem N_e für das Außengebiet entsprechen, für beliebige stetige Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eindeutig lösbar sind. Dazu betrachten wir die homogene Integralgleichung des NEUMANNschen Problems für das Außengebiet; die gesuchte Funktion bezeichnen wir mit $\mu_0(x)$:

$$\mu_0(x) - \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_\Gamma \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi = 0\,. \tag{1}$$

Es sei $\mu_0 \in L_2(\Gamma)$ irgendeine Lösung der Gleichung (1). Wie im § 8 bewiesen wurde, ist dann μ_0 eine stetige Funktion auf Γ. Wir betrachten jetzt das Potential der einfachen Schicht mit der Dichte μ_0:

$$V_0(x) = \int\limits_\Gamma \mu_0(\xi) \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma\,. \tag{2}$$

Das Potential (2) besitzt eine regelmäßige Normalableitung von außen her, und die Gleichung (1) ergibt, daß diese Normalableitung gleich Null ist:

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0\,. \tag{3}$$

Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes des NEUMANNschen Problems für das Außengebiet gilt dann

$$V_0(x) \equiv 0\,, \qquad x \in \Omega'\,. \tag{4}$$

Da aber das Potential der einfachen Schicht eine im ganzen Raum stetige Funktion darstellt, so erhalten wir

$$V_0(x) \equiv 0\,, \qquad x \in \Gamma\,. \tag{5}$$

Wir betrachten jetzt das Potential $V_0(x)$ im Innengebiet Ω. Hier ist $V_0(x)$ eine harmonische Funktion, und infolge der Beziehung (5) verschwindet diese auf dem Rand Γ. Nach dem Eindeutigkeitssatz des DIRICHLETschen Problems für das Innengebiet ergibt sich

$$V_0(x) \equiv 0\,, \qquad x \in \Omega\,. \tag{6}$$

Damit gilt in Ω auch

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} \equiv 0\,.$$

Daraus folgt zusammen mit den Formeln (3) und (7.11) $\mu_0(x) \equiv 0$.

Die homogene Integralgleichung (1) besitzt also nur die triviale Lösung. Auf Grund der FREDHOLMschen Alternative (s. Kap. 8, § 5) ist dann die Integralgleichung (8.9) des NEUMANNschen Problems für das Außengebiet für eine beliebige Funktion $\psi \in L_2(\Gamma)$ und folglich auch für eine beliebige stetige Funktion $\psi(x)$ eindeutig lösbar.

Damit ist der Parameterwert

$$\lambda = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}$$

ein regulärer Wert des Kernes $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$; nach dem dritten FREDHOLMschen Satz gilt dasselbe auch für den adjungierten Kern $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}$. Daraus ergibt sich, daß die Integralgleichung des DIRICHLETschen Problems für das Innengebiet für eine beliebige Funktion $\varphi \in L_2(\Gamma)$ und damit erst recht für eine beliebige stetige Funktion $\varphi(x)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Da nun die Lösbarkeit der Integralgleichungen der Randwertprobleme D_i und N_e die Lösbarkeit dieser Probleme zur Folge hat, so gelangen wir zu folgenden Aussagen:

1. Wenn Γ eine reguläre Fläche ist, dann ist das DIRICHLETsche Problem für das Innengebiet dieser Fläche bei beliebigen stetigen Randbedingungen lösbar, und die Lösung läßt sich als Potential der Doppelschicht darstellen.

2. Wenn Γ eine reguläre Fläche ist, dann ist das NEUMANNsche Problem für das Außengebiet dieser Fläche bei beliebigen stetigen Randbedingungen lösbar, und die Lösung läßt sich als Potential der einfachen Schicht darstellen.

§ 11. Untersuchung des zweiten Paares adjungierter Gleichungen

Der in die Integralgleichungen der Randwertprobleme D_e und N_i [d. h. in die Gleichungen (8.7) und (8.8)] eingehende Parameterwert

$$\lambda = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \tag{1}$$

ist eine charakteristische Zahl für jeden der Kerne

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}.$$

In der Tat, wie die dritte der Gleichungen (4.2) zeigt, besitzt die homogene Integralgleichung des Problems D_e

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \sigma_0(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = 0 \tag{2}$$

die nicht triviale Lösung $\sigma_0(x) \equiv 1$. Letzteres bedeutet, daß (1) eine charakteristische Zahl des Kernes $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}$ ist. Auf Grund des dritten FREDHOLMschen Satzes ist dann diese Zahl auch eine charakteristische Zahl des adjungierten

Kernes $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$. Folglich besitzt die homogene Integralgleichung des Problems N_i

$$\mu_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int_\Gamma \mu_0(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = 0 \tag{3}$$

wenigstens eine von Null verschiedene Lösung; wir bezeichnen diese mit $\mu_0(x)$.

Wir beweisen jetzt, daß die Gleichungen (2) und (3) keine nicht trivialen Lösungen besitzen, die zu den oben genannten Lösungen $\sigma_0(x)$ bzw. $\mu_0(x)$ linear unabhängig sind. Auf Grund des dritten FREDHOLMschen Satzes genügt es, diese Eigenschaft für die Gleichung (3) nachzuweisen. Wir betrachten das Potential der einfachen Schicht mit der Dichte $\mu_0(\xi)$

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma\,. \tag{4}$$

Aus Gleichung (3) folgt

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_i} \equiv 0\,. \tag{5}$$

Da $V_0(x)$ eine im Innengebiet Ω harmonische Funktion ist, so gilt nach dem Eindeutigkeitssatz für das Problem N_i

$$V_0(x) \equiv c_0 = \text{const}\,,\qquad x\in\Omega\,. \tag{6}$$

Dabei ist $c_0 \neq 0$. In der Tat, aus $c_0 = 0$ würde $V_0(x) \equiv 0$ für $x \in \Omega$ folgen. Auf Grund der Stetigkeit des Potentials der einfachen Schicht gilt dann $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Gamma$, und aus dem Eindeutigkeitssatz des DIRICHLETschen Problems für das Außengebiet schließen wir $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Dann ist aber

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0\,. \tag{7}$$

Aus den Beziehungen (5) und (7) sowie der Formel (7.11) ergibt sich schließlich $\mu_0(x) \equiv 0$. Letzteres bedeutet aber einen Widerspruch zu der früher getroffenen Annahme, daß $\mu_0(x)$ eine nicht triviale Lösung sei.

Damit haben wir gleichzeitig die folgende Behauptung bewiesen: Wenn das Potential der einfachen Schicht im Inneren der Fläche Γ identisch Null ist, dann ist auch seine Dichte identisch Null.

Wir nehmen jetzt an, Gleichung (3) besitze noch eine weitere Lösung $\mu_1(x)$. Wir bilden das Potential

$$V_1(x) = \int_\Gamma \mu_1(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi\,.$$

Indem wir die vorangegangenen Überlegungen wiederholen, finden wir $V_1(x) \equiv c_1 = \text{const}$ für $x \in \Omega$. Wir setzen

$$\mu_2(x) = c_1\,\mu_0(x) - c_0\,\mu_1(x)\,. \tag{8}$$

Offensichtlich ist $\mu_2(x)$ eine Lösung derselben Gleichung (3). Jetzt betrachten wir das Potential

$$V_2(x) = \int_\Gamma \mu_2(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma = c_1 V_0(x) - c_0 V_1(x) .$$

Für $x \in \Omega$ gilt $V_2(x) = c_1 c_0 - c_0 c_1 = 0$. Nach dem bereits Bewiesenen ist dann $\mu_2(x) \equiv 0$, woraus

$$\mu_1(x) = \frac{c_1}{c_0} \mu_0(x) \tag{9}$$

folgt.

Somit unterscheidet sich eine beliebige Lösung der Gleichung (3) nur durch einen konstanten Faktor von $\mu_0(x)$, was zu beweisen war.

Wir betrachten jetzt die inhomogene Gleichung (8.8) des Problems N_i. Auf Grund des vierten FREDHOLMschen Satzes ist diese Gleichung dann und nur dann lösbar, wenn die Funktion $\psi(x)$ zu sämtlichen Lösungen der adjungierten homogenen Gleichung (8.7) orthogonal ist. Die letzte Gleichung besitzt aber nur eine linear unabhängige Lösung $\sigma_0(x) \equiv 1$. Folglich ist für die Lösbarkeit der Gleichung (8.8) notwendig und hinreichend, daß die Beziehung $(\psi, 1) = 0$ oder, was dasselbe bedeutet, die Bedingung

$$\int_\Gamma \psi(x) \, d_x \Gamma = 0 \tag{10}$$

erfüllt ist.

Wenn die Gleichung (8.8) eine Lösung besitzt, dann ist offensichtlich auch das Problem N_i lösbar. Folglich ist die Bedingung (10) hinreichend für die Lösbarkeit des Problems N_i. Wenn umgekehrt die Funktion $u(x)$ im Inneren von Γ harmonisch ist und die notwendigen stetigen Ableitungen besitzt, dann gilt

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d_x \Gamma = 0 .$$

Wegen

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_\Gamma = \psi(x)$$

ergibt sich

$$\int_\Gamma \psi(x) \, d_x \Gamma = 0 .$$

Folglich ist (10) nicht nur eine hinreichende, sondern auch eine notwendige Lösbarkeitsbedingung.

Wir können also folgendes Ergebnis formulieren:

Es sei Γ eine reguläre Fläche und $\psi \in C(\Gamma)$. Dann ist die Bedingung (10) notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des NEUMANNschen für das Innengebiet mit der Randbedingung $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_\Gamma = \psi(x)$; die Lösung dieses Problems läßt sich als Potential der einfachen Schicht darstellen.

Es bleibt noch die Integralgleichung (8.7) des DIRICHLETschen Problems für das Außengebiet zu betrachten.

Für diese Gleichung lassen sich leicht die notwendigen und hinreichenden Lösbarkeitsbedingungen angeben:

$$(\varphi, \mu_0) = \int_\Gamma \varphi(x)\, \mu_0(x)\, d_x\Gamma = 0\,. \tag{11}$$

Ist die Bedingung (11) erfüllt, dann ist die Integralgleichung (8.7) lösbar. In diesem Fall existiert eine Lösung des DIRICHLETschen Problems für das Außengebiet, die sich als Potential der Doppelschicht darstellen läßt und folglich im Unendlichen wie $|x|^{1-m}$ abnimmt.

Wenn die Bedingung (11) verletzt ist, dann existiert keine Lösung der Gleichung (8.7). Das bedeutet jedoch nicht, daß auch das DIRICHLETsche Problem für das Außengebiet unlösbar ist; in diesem Fall kann man lediglich behaupten, daß dieses Problem keine Lösung besitzt, die sich als Potential der Doppelschicht darstellen läßt.

§ 12. Die Lösung des DIRICHLETschen Problems für das Außengebiet

Wir legen den Koordinatenursprung in das Innere der Fläche Γ. Die Funktion $\frac{1}{|x|^{m-2}}$ ist in einem beliebigen Gebiet, das den Koordinatenursprung nicht enthält, insbesondere also im Gebiet Ω', harmonisch.

Die Lösung des Problems D_e suchen wir in der Form

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma + \frac{1}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma \sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma\,. \tag{1}$$

Für eine beliebige stetige Funktion $\sigma(\xi)$ stellt die rechte Seite der Formel (1) eine in Ω' harmonische Funktion dar; es genügt demnach, $\sigma(\xi)$ so zu bestimmen, daß die Randbedingung (8.1) erfüllt wird.

Dieselben Überlegungen wie im § 8 führen uns auf die folgende Integralgleichung für die unbekannte Funktion $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{1}{|x|^{m-2}}\right] \sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\, \varphi(x)\,, \quad x \in \Gamma\,. \tag{2}$$

Der Kern der Gleichung (2)

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{1}{|x|^{m-2}}$$

besitzt, ebenso wie der Kern $\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}$, eine schwache Singularität, und folglich läßt sich auf (2) die FREDHOLMsche Theorie anwenden.

Wir betrachten jetzt die homogene Integralgleichung, die sich aus der Gleichung (2) für $\varphi(x) \equiv 0$ ergibt:

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{1}{|x|^{m-2}}\right] \sigma_0(\xi)\, d_\xi\Gamma = 0\,. \tag{3}$$

Es sei $\sigma_0 \in L_2(\Gamma)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (3). Analog zum § 8 läßt sich dann nachweisen, daß diese Lösung stetig ist. Wir bilden nun die in Ω' harmonische Funktion

$$u_0(x) = \int_\Gamma \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma + \frac{1}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma \sigma_0(\xi)\, d_\xi \Gamma . \tag{4}$$

Aus Gleichung (3) folgt $u_0(x)|_\Gamma \equiv 0$, und nach dem Eindeutigkeitssatz des DIRICHLETschen Problems für das Außengebiet ergibt sich $u_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Wir multiplizieren jetzt beide Seiten von (4) mit $|x|^{m-2}$ und lassen $|x| \to \infty$ streben. Da das Potential der Doppelschicht im Unendlichen wie $|x|^{1-m}$ abnimmt, so strebt der erste Summand gegen Null, und wir erhalten folglich

$$\int_\Gamma \sigma_0(\xi)\, d_\xi \Gamma = 0 . \tag{5}$$

Somit genügt jede Lösung der Gleichung (3) der Beziehung (5). Die Gleichung (3) nimmt folglich die einfachere Gestalt

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \sigma_0(\xi)\, d_\xi \Gamma = 0 \tag{6}$$

an, die wiederum mit Gleichung (11.2) übereinstimmt. Wie im § 11 gezeigt wurde, besitzt Gleichung (6) die Eins als einzige linear unabhängige Lösung; somit ergibt sich für die allgemeine Lösung dieser Gleichung $\sigma_0(\xi) \equiv C = \text{const.}$ Setzen wir das in (5) ein, so erhalten wir $C\,|\Gamma| = 0$ und folglich $C = 0$. Also besitzt die Gleichung (3) nur die triviale Lösung $\sigma_0(\xi) \equiv 0$. Auf Grund der FREDHOLMschen Alternative ist dann die inhomogene Gleichung (2) für eine beliebige stetige Funktion $\varphi(x)$ lösbar. Folglich ist für eine beliebige stetige Randfunktion $\varphi(x)$ das DIRICHLETsche Problem für das Außengebiet lösbar, wobei deren Lösung in der Form (1) dargestellt werden kann.

Bemerkung 1. Sämtliche Ergebnisse der §§ 10—12 lassen sich auf beliebige geschlossene LJAPUNOW-Flächen erweitern, wenn man verlangt, daß die vorgegebenen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eine LIPSCHITZ-*Bedingung mit einem Exponenten* λ (auch HÖLDER-*Bedingung* genannt) erfüllen:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqq A\,|x_1 - x_2|^\lambda ,$$

hierbei sind A und λ positive Konstanten.

Bemerkung 2. Die Untersuchung der Integralgleichungen der Potentialtheorie wird um einiges erschwert, wenn das Gebiet Ω (oder Ω') nicht nur durch eine, sondern durch mehrere geschlossene LJAPUNOW-Flächen berandet wird; die Ergebnisse lauten dann etwas anders als im Falle einer einzigen Randfläche. Ausführlicher sind diese Fragen in dem Buch von N. M. GÜNTER [4] behandelt.

Bemerkung 3. Die potentialtheoretische Methode läßt sich auch auf einige andere Randwertaufgaben anwenden. Es sei z. B. eine Funktion $u(x)$ gesucht, die entweder innerhalb oder außerhalb einer geschlossenen regulären Fläche Γ harmonisch ist und die eine Randbedingung der Gestalt

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)\, u\right]_\Gamma = \omega(x) \tag{7}$$

erfüllt; dabei seien $\beta(x)$ und $\omega(x)$ stetige Funktionen auf Γ und n bedeute die äußere Normale an Γ im Punkt $x \in \Gamma$. Ein solches Problem nennt man des öfteren eine *dritte Randwertaufgabe*. Die Lösung suchen wir in Form eines Potentials der einfachen Schicht

$$u(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma . \tag{8}$$

Unter Benutzung des Satzes über die Grenzwerte der Normalableitung des Potentials (8) erhalten wir für $\mu(\xi)$ eine schwach singuläre Integralgleichung

$$\mu(x) \pm \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\beta(x)}{r^{m-2}}\right] \mu(\xi)\, d_\xi \Gamma = \pm \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\, \omega(x) , \qquad x \in \Gamma . \tag{9}$$

Dabei entspricht das Vorzeichen „+" dem Randwertproblem für das Innengebiet, das Vorzeichen „−" dem Randwertproblem für das Außengebiet.

Wenn das Problem (7) für die harmonische Funktion höchstens eine Lösung besitzt, dann ist Gleichung (9) und folglich auch das betrachtete Problem für eine beliebige Funktion $\omega(x)$ lösbar. Ist dagegen die Lösung nicht eindeutig bestimmt (besitzt etwa das dem Problem (7) entsprechende homogene Problem k linear unabhängige Eigenfunktionen), dann existiert dann und nur dann eine Lösung des inhomogenen Problems, wenn die Funktion $\omega(x)$ k Orthogonalitätsbedingungen erfüllt. Nach dem ersten FREDHOLMschen Satz ist die Zahl k endlich. Das betrachtete Problem besitzt im Falle des Innengebietes (entsprechend im Falle des Außengebietes) eine eindeutige Lösung, wenn $\beta(x) \geqq 0$ und auf einer Teilmenge von Γ mit positivem Maß $\beta(x) > 0$ gilt (entsprechend, wenn $\beta(x) \leqq 0$ und auf einer Teilmenge von Γ mit positivem Maß $\beta(x) < 0$ gilt). Man beweise die letzte Behauptung!

§ 13. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher

Im Falle $m = 2$ ist die singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung die Funktion $\ln \frac{1}{r}$ mit $r = |\xi - x|$. Dementsprechend werden die Potentiale der einfachen und der Doppelschicht in der zweidimensionalen Ebene durch folgende Formeln definiert:

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \ln \frac{1}{r}\, d_\xi \Gamma , \tag{1}$$

$$W(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r}\, d_\xi \Gamma . \tag{2}$$

Hierbei ist Γ eine geschlossene Kurve, von der wir voraussetzen, daß sie die LJAPUNOW-Bedingungen erfüllt. Die Ungleichung (2.6) ist jetzt durch die folgende zu ersetzen:

$$\int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right| d_\xi \Gamma \leqq C = \text{const} . \tag{3}$$

Die Dichten $\sigma(\xi)$ und $\mu(\xi)$ setzen wir als stetige Funktionen voraus.

Die Potentiale (1) und (2) heißen gewöhnlich *logarithmische Potentiale*. Das logarithmische Potential einer Doppelschicht ist sowohl innerhalb als auch außerhalb von Γ harmonisch; im Unendlichen hat es die Ordnung $O(|x|^{-1})$.

Das logarithmische Potential der einfachen Schicht ist innerhalb von Γ harmonisch; außerhalb von Γ ist es (im Gegensatz zum Fall $m > 2$) im allgemeinen nicht harmonisch, denn eine Funktion, die in einem unendlichen Gebiet der zweidimensionalen Ebene harmonisch sein soll, muß im Unendlichen beschränkt sein, das Potential der einfachen Schicht jedoch wächst im allgemeinen im Unendlichen wie $\ln |x|$.

Für die Potentiale (1) und (2) gelten Sätze, die den im Fall $m > 2$ bewiesenen Sätzen analog (jedoch mit diesen nicht immer identisch) sind: Das Potential der einfachen Schicht ist in der gesamten Ebene, mit möglicher Ausnahme des unendlich fernen Punktes, stetig; für das Potential einer Doppelschicht gelten die Grenzwertbeziehungen

$$\begin{aligned} W_i(x) &= -\pi\,\sigma(x) + \overline{W(x)}\,, \\ W_e(x) &= \pi\,\sigma(x) + \overline{W(x)} \end{aligned} \tag{4}$$

und für die Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial n_i} &= \pi\,\mu(x) + \overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}\,, \\ \frac{\partial V(x)}{\partial n_e} &= -\pi\,\mu(x) + \overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei handelt es sich in (5) um eine regelmäßige Normalableitung.

Das GAUSSsche Integral läßt sich jetzt nach der folgenden Formel berechnen:

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r}\, d_\xi \Gamma = \begin{cases} -2\pi & \text{innerhalb von } \Gamma\,, \\ 0 & \text{außerhalb von } \Gamma\,, \\ -\pi & \text{auf } \Gamma\,. \end{cases} \tag{6}$$

Die DIRICHLETschen und die NEUMANNschen Probleme werden wie gewöhnlich gestellt; wir behalten auch die Bezeichnungen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für die in diesen Problemen gegebenen Funktionen bei. Wesentlich ist, daß sich das NEUMANNsche Problem N_e für das Außengebiet im Falle $m = 2$ durch einige Besonderheiten auszeichnet. Der Eindeutigkeitssatz für das Problem N_e läßt sich im vorliegenden Fall genauso formulieren wie für das Problem N_i: Zwei Lösungen dieses Problems können sich lediglich um eine additive Konstante unterscheiden. Es gilt auch die Umkehrung: Zwei Funktionen, die außerhalb von Γ harmonisch sind und sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, sind Lösungen ein und desselben Problems N_e.

Eine andere Besonderheit des Problems N_e in der zweidimensionalen Ebene kommt in folgendem Lemma zum Ausdruck.

Lemma 18.13.1. *Notwendig für die Lösbarkeit des Problems N_e im Falle $m = 2$ ist die Bedingung*

$$\int_\Gamma \psi(x)\, dx = 0\,. \tag{7}$$

Beweis. Wir nehmen an, daß eine Lösung $u(x)$ des Problems N_e existiert. Um den Koordinatenursprung beschreiben wir einen Kreis S_R von solch großem

Radius R, daß die Kurve Γ im Inneren von S_R gelegen ist. Da die Funktion $u(x)$ außerhalb von S_R harmonisch und in dem entsprechenden abgeschlossenen Gebiet stetig ist, so gilt die POISSONsche Formel (s. Formel (1.6_1) des Kap. 13)

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 - R^2}{\varrho^2 - 2 R \varrho \cos(\omega - \theta) + R^2} u(R, \omega)\, d\omega \; ; \tag{8}$$

hierbei bedeuten R, ω die Polarkoordinaten des Punktes ξ, $u(R, \omega) = u(\xi)$, ϱ, θ sind die Polarkoordinaten des Punktes x und $\varrho > R$.

Wir differenzieren jetzt beide Seiten der Formel (8) nach den cartesischen Koordinaten des Punktes x, indem wir wie folgt verfahren. Wir setzen $z = x_1 + i x_2$, $\zeta = \xi_1 + i \xi_2$, wobei x_1, x_2 und ξ_1, ξ_2 die cartesischen Koordinaten der Punkte x und ξ bedeuten. Dann gilt $z = \varrho e^{i\theta}$, $\zeta = R e^{i\omega}$ und

$$\frac{\varrho^2 - R^2}{\varrho^2 - 2 R \varrho \cos(\omega - \theta) + R^2} = \operatorname{Re} \frac{z + \zeta}{z - \zeta}$$

(vgl. hierzu § 1 des Kap. 13). Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\varrho^2 - R^2}{\varrho^2 - 2 R \varrho \cos(\omega - \theta) + R^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} \frac{z + \zeta}{z - \zeta} = \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z + \zeta}{z - \zeta} = - \operatorname{Re} \frac{2\zeta}{(z - \zeta)^2} .$$

Folglich ist

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \omega) \operatorname{Re} \frac{\zeta}{(z - \zeta)^2} d\omega = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) .$$

Analog finden wir $\frac{\partial u}{\partial x_2} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$, wobei die letzten beiden Abschätzungen für hinreichend große $|x|$ gelten.

Die Anwendung der Formel (2.7) des Kap. 12 auf das durch die Kurven Γ und $S_{\bar{R}}$ $(\bar{R} > R)$ berandete Gebiet $\Omega'_{\bar{R}}$ ergibt

$$- \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d_x \Gamma + \int_{S_{\bar{R}}} \frac{\partial u}{\partial n} d_x S_{\bar{R}} = 0 \; ;$$

dabei ist n die äußere Normale an Γ bzw. an $S_{\bar{R}}$ im Punkt x. Vor dem ersten Integral tritt das negative Vorzeichen auf, da die Normale n auf Γ für das Gebiet $\Omega'_{\bar{R}}$ die innere Normale ist.

Der letzten Formel kann man jetzt die Gestalt

$$- \int_\Gamma \psi(x)\, d_x \Gamma + \int_{S_{\bar{R}}} \frac{\partial u}{\partial n} d_x S_{\bar{R}} = 0 \tag{9}$$

geben. Weiter folgt aus den oben erhaltenen Abschätzungen, daß für hinreichend großes $\bar{R}$ auf der Kreisperipherie $S_{\bar{R}}$ die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(n, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(n, x_2) \right| \leq \frac{c}{\bar{R}^2} , \qquad c = \text{const} ,$$

erfüllt ist. Folglich gilt

$$\left| \int\limits_{S_{\overline{R}}} \frac{\partial u}{\partial u} d_x S_{\overline{R}} \right| \leqq \frac{c}{\overline{R}^2} 2 \pi \overline{R} = \frac{2 \pi c}{\overline{R}} \underset{\overline{R} \to \infty}{\to} 0 .$$

Indem wir nun in der Formel (9) $\overline{R} \to \infty$ streben lassen, gelangen wir zu der Beziehung (7).

Damit ist das Lemma bewiesen.

Wie auch im allgemeinen Fall werden wir die Lösung des DIRICHLETschen Problems als Potential einer Doppelschicht (2) und die Lösung des NEUMANNschen Problems als Potential einer einfachen Schicht (1) suchen. Diese Ansätze führen für das DIRICHLETsche Problem auf die Integralgleichungen

$$\sigma(x) \mp \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} d_\xi \Gamma = \mp \frac{1}{\pi} \varphi(x) \tag{D}$$

und für das NEUMANNsche Problem auf die Integralgleichungen

$$\mu(x) \pm \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} d_\xi \Gamma = \pm \frac{1}{\pi} \psi(x) . \tag{N}$$

Die Kerne dieser Gleichungen besitzen eine schwache Singularität. Im vorliegenden Fall läßt sich leicht nachweisen, daß die Kerne beschränkt sind, wenn der LJAPUNOW-Exponent $\alpha = 1$ ist, und stetig, wenn die Kurve Γ eine stetige Krümmung besitzt. Wiederum bilden die Gleichungen der Probleme D_i und N_e sowie der Probleme D_e und N_i Paare zueinander adjungierter Gleichungen. Im weiteren setzen wir voraus, daß die Krümmung der Kurve Γ stetig ist.

Bei der Untersuchung der Integralgleichungen (D) und (N) stützen wir uns auf folgendes Lemma.

Lemma 18.13.2. *Wenn die Integralgleichung des Problems N_e*

$$\mu(x) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} d_\xi \Gamma = - \frac{1}{\pi} \psi(x) \tag{10}$$

lösbar ist und die Funktion $\psi(x)$ der Bedingung (7) *genügt, dann liefert das Potential der einfachen Schicht* (1) *eine Lösung des Problems N_e.*

Beweis. Die Integralgleichung (10) sei lösbar. Nehmen wir ihre Lösung als Dichte des Potentials (1), so erhalten wir eine Funktion, die der Randbedingung des Problems N_e genügt und die außerhalb von Γ überall harmonisch ist, außer möglicherweise im unendlich fernen Punkt, wo diese Funktion unbeschränkt sein kann. Es bleibt zu zeigen, daß das Potential (1) unter der Bedingung (7) im Unendlichen beschränkt ist.

Zu diesem Zweck multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung (10) mit $d_x \Gamma$ und integrieren längs Γ. Unter Berücksichtigung der Bedingung (7) erhalten wir

$$\int\limits_{\Gamma} \mu(x) \, d_x \Gamma - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} d_\xi \Gamma \, d_x \Gamma = 0 . \tag{11}$$

Im Doppelintegral vertauschen wir x und ξ; dabei geht n in ν über. Unter Benutzung der dritten Gleichung von (6) finden wir dann

$$\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\,d_x\Gamma = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(x)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\,d_x\Gamma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(x)\left\{\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\right\}d_x\Gamma = -\int_\Gamma \mu(x)\,d_x\Gamma\,.$$

Nunmehr folgt aus der Gleichung (11)

$$\int_\Gamma \mu(x)\,d_x\Gamma = 0\,. \tag{12}$$

Jetzt ersetzen wir in Gleichung (12) x durch ξ, multiplizieren diese Gleichung mit $\ln|x|$ und addieren die erhaltene Gleichung zu (1). Als Resultat erhalten wir einen neuen Ausdruck für das Potential (1):

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\ln\frac{|x|}{r}\,d_\xi\Gamma\,. \tag{13}$$

Das Integral (13) ist für $|x|\to\infty$ beschränkt (es strebt sogar gegen Null), und das Lemma ist damit beweisen.

Die folgende Untersuchung der Integralgleichungen (D) und (N) verläuft im wesentlichen wie in den §§ 10—12; wir können uns daher kurz fassen.

Zunächst beweisen wir, daß die Gleichung (10) des Problems N_e für eine beliebige stetige Funktion $\psi(x)$ lösbar ist. Gemäß der FREDHOLMschen Alternative betrachten wir dazu die homogene Gleichung

$$\mu_0(x) - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu_0(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = 0\,. \tag{14}$$

Es sei $\mu_0(x)$ eine Lösung von (14). Die rechte Seite der Gleichung (14) ist gleich Null, genügt also offenbar der Bedingung (7); auf Grund des Lemmas 18.13.2 ist dann das Potential

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi)\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma$$

eine Lösung des homogenen Problems N_e. Nach dem Eindeutigkeitssatz des Problems N_e gilt deshalb $V_0(x) \equiv C =$ const außerhalb von Γ. Wegen der Stetigkeit des Potentials $V_0(x)$ in der gesamten Ebene ist dann $V_0(x)\equiv C$ auch auf Γ. Aus dem Eindeutigkeitssatz des Problems D_i schließen wir, daß $V_0(x)\equiv C$ auch innerhalb von Γ ist. Dann gilt aber

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} = \frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0\,,$$

und aus den Formeln (5) folgt

$$\mu_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} - \frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e}\right] \equiv 0\,.$$

Aus Lemma 18.13.2 folgt jetzt, daß *die Bedingung* (7) *nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Lösbarkeit des Problems N_e in der zweidimensionalen Ebene ist.*

Zusammen mit Gleichung (10) ist auch die zu ihr adjungierte Integralgleichung des Problems D_i stets lösbar. Daraus folgt, daß auch in der zweidimensionalen Ebene das Problem D_i stets lösbar ist.

Die Untersuchung der Integralgleichungen der Probleme D_e und N_i verläuft genauso wie im allgemeinen Fall und führt zu denselben Resultaten: Die Bedingung (7) ist notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Problems N_i; die homogene Integralgleichung des Problems D_e

$$\sigma_0(x) + \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \, d_\xi \Gamma = 0 \tag{15}$$

besitzt als Lösung nur eine Konstante.

Die Lösung des Problems D_e in der zweidimensionalen Ebene läßt sich durch den Lösungsansatz

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \, d_\xi \Gamma + \int_\Gamma \sigma(\xi) \, d_\xi \Gamma \tag{16}$$

bestimmen. Dieser Ansatz führt auf die Integralgleichung

$$\sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} + 1 \right] \sigma(\xi) \, d_\xi \Gamma = \frac{1}{\pi} \varphi(x) \, . \tag{17}$$

Genauso wie im § 12 kann man beweisen, daß Gleichung (17) stets lösbar ist.

§ 14. Die Gleichungen der Potentialtheorie für den Kreis

Es sei jetzt Γ der Kreis $x_2^2 + x_2^2 = R^2$. Wir bestimmen den Kern des Potentials der Doppelschicht unter der Voraussetzung, daß beide Punkte $x = (x_1, x_2)$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ auf dem Kreis Γ liegen. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \cos(\nu, \xi_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \cos(\nu, \xi_2) = -\frac{\cos(\nu, r)}{r} \, .$$

Auf dem Kreis stimmt die Richtung der Normalen ν mit der Richtung des zum Punkt ξ führenden Radiusvektors überein. Wie aus Abb. 35 ersichtlich ist, gilt

$$r = 2 R \sin \frac{\pi - 2\beta}{2} = 2 R \cos \beta \, ,$$

wobei β den Winkel (ν, r) bedeutet. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{2R} \, ; \qquad x, \xi \in \Gamma \, . \tag{1}$$

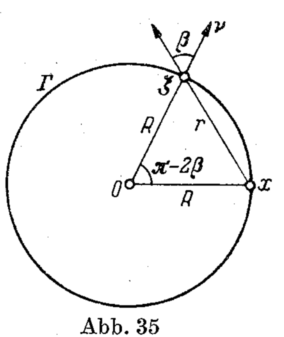


Abb. 35

Vertauschen wir jetzt x und ξ, dann erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{2R}; \qquad x, \xi \in \Gamma. \tag{2}$$

Im vorliegenden Fall sind also die Kerne der Gleichungen (D) und (N) entartet, diese Gleichungen lassen sich folglich elementar lösen. Wir untersuchen hier die Gleichungen der Randwertaufgaben für das Innengebiet; die Lösung der Integralgleichungen der Probleme für das Außengebiet überlassen wir dem Leser.

Wir bezeichnen mit θ und ω die Winkel, die die Radiusvektoren $O\,x$ und $O\,\xi$ mit der x_1-Achse bilden. Dann ist $d_\xi \Gamma = R\,d\omega$. Weiter kann man eine Funktion des Punktes $x \in \Gamma$ auch als Funktion von θ betrachten. Dementsprechend werden wir z. B. $\sigma(\theta)$ an Stelle von $\sigma(x)$ schreiben.

Die Gleichung des DIRICHLETschen Problems für das Innengebiet nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\sigma(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega)\, d\omega = -\frac{1}{\pi} \varphi(\theta). \tag{3}$$

Wir setzen $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega)\, d\omega = c$ und erhalten somit

$$\sigma(\theta) + c = -\frac{1}{\pi} \varphi(\theta).$$

Durch Integration ergibt sich

$$c = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)\, d\omega.$$

Damit finden wir $\sigma(\theta) = -\frac{1}{\pi} \varphi(\theta) - c$ und folglich

$$u(x) = -\int_\Gamma \left[\frac{1}{\pi} \varphi(\omega) + c\right] \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r}\, d_\xi \Gamma =$$

$$= -\frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r}\, d\omega - c \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r}\, d_\xi \Gamma.$$

Da der Punkt x innerhalb von Γ liegt, so erhalten wir nach der Formel (13.6)

$$u(x) = -\frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r}\, d\omega + 2\pi c = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[2R \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} - 1\right] \varphi(\omega)\, d\omega.$$

Des weiteren gilt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} [(\xi_1 - x_1) \cos(\nu, \xi_1) + (\xi_2 - x_2) \cos(\nu, \xi_2)] =$$

$$= -\frac{1}{r^2 R} [(\xi_1 - x_1)\, \xi_1 + (\xi_2 - x_2)\, \xi_2] = -\frac{R^2 - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}{r^2 R}.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$r^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 = R^2 + \varrho^2 - 2\,(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\,,$$
$$\varrho^2 = x_1^2 + x_2^2$$

ergibt sich

$$-\left[2\,R\,\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} - 1\right] = \frac{R^2 - \varrho^2}{r^2}\,,$$

und damit gilt

$$u(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\,\frac{R^2 - \varrho^2}{r^2}\,d\omega\,. \tag{4}$$

Wir sind somit zum Poissonschen Integral für den Kreis gelangt.

Die Gleichung des Problems N_i hat für den Kreis die Gestalt

$$\mu(\theta) - \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\,\psi(\theta)\,. \tag{5}$$

Setzen wir hier $\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\omega)\,d\omega = c_1$, dann finden wir

$$\mu(\theta) - c_1 = \frac{1}{\pi}\,\psi(\theta)\,.$$

Die Integration der letzten Gleichung führt auf die bereits bekannte notwendige Lösbarkeitsbedingung

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\,d\theta = 0\,; \tag{6}$$

die Konstante c_1 ist beliebig wählbar. Wenn die Bedingung (6) erfüllt ist, dann ist die Lösung der Gleichung (5) von der Form

$$\mu(\theta) = \frac{1}{\pi}\,\psi(\theta) + c_1\,;$$

die Lösung des Problems N_i wird durch die Formel

$$u(x) = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\omega)\ln\frac{1}{r}\,d\omega + c_1\,R\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{r}\,d\omega$$

geliefert. Das zweite Integral ist, wie man leicht nachweist, eine Konstante, und wir gelangen folglich zu der Dinischen Formel

$$u(x) = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\omega)\ln\frac{1}{r}\,d\omega + C\,, \qquad C = \text{const.}$$

KAPITEL 19

DAS PROBLEM DER RICHTUNGSABLEITUNG

§ 1. Aufgabenstellung

Die im vorangegangenen Kapitel betrachteten Randwertaufgaben besaßen „FREDHOLMsche" Eigenschaften: Diese Probleme hatten entweder eine und nur eine Lösung (so die Probleme D_i und D_e sowie das Problem N_e im Falle $m > 2$), oder es galt nicht der Eindeutigkeitssatz und das homogene Problem besaß linear unabhängige Lösungen — dann war die Anzahl dieser Lösungen endlich, und das inhomogene Problem war dann und nur dann lösbar, wenn die gegebene Randfunktion ebenso vielen Orthogonalitätsbedingungen genügte (so das Problem N_i sowie das Problem N_e im Falle $m = 2$). Im vorliegenden Kapitel werden wir eine neue Randwertaufgabe betrachten, die im allgemeinen kein FREDHOLMsches Problem darstellt. Es handelt sich dabei um das Problem der Richtungsableitung.

Im m-dimensionalen euklidischen Raum E_m betrachten wir ein Gebiet Ω, von dem wir der Bestimmtheit halber annehmen wollen, daß es endlich ist und sein Rand Γ eine reguläre Fläche darstellt.

Wir betrachten jetzt eine gewisse Umgebung der Fläche Γ. Jedem Punkt x' dieser Umgebung ordnen wir eine gewisse Richtung $\lambda = \lambda(x')$ zu; dabei wollen wir voraussetzen, daß $\lambda(x')$ eine stetige Funktion von x' ist. Wir stellen folgendes Problem: Gesucht ist im Gebiet Ω eine Lösung der elliptischen Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + C\,u = f(x)\,, \tag{1}$$

die die Randbedingung

$$\lim_{x' \to x}\frac{\partial u(x')}{\partial \lambda} = \psi(x)\,, \qquad x \in \Gamma\,, \tag{2}$$

erfüllt.

Die Randwertaufgabe (1), (2) heißt *Problem der Richtungsableitung.*

Wenn auf der Fläche Γ die Richtungskosinus $\cos(\lambda, x_k)$ den Größen

$$A_{jk}\cos(\nu, x_j)$$

proportional sind, wobei ν die Normale an Γ bedeutet, dann geht das Problem der Richtungsableitung in das NEUMANNsche Problem über.

Das Problem der Richtungsableitung werden wir unter folgenden, äußerst speziellen Voraussetzungen lösen: Das Gebiet Ω ist das Kreisinnere

$$x_1^2 + x_2^2 < 1 \tag{3}$$

in der zweidimensionalen Ebene (im weiteren werden wir einfach von der „Ebene" sprechen), und die Gleichung (1) ist die homogene LAPLACE-Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0\,. \tag{4}$$

Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen

$$x_1 + i\,x_2 = z = \varrho\, e^{i\theta}\,, \qquad i = \sqrt{-1}\,;$$

wenn $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ein Punkt der Peripherie Γ des Kreises (3) ist, dann schreiben wir

$$\xi_1 + i\,\xi_2 = \zeta = e^{i\omega}\,.$$

Offensichtlich ist $d_\xi \Gamma = d\omega$, $d_x \Gamma = d\theta$.

Die Randbedingung (2) formen wir etwas um: Wir setzen $\cos(\lambda, x_1) = a(\theta)$, $\cos(\lambda, x_2) = b(\theta)$ und schreiben $\psi(\theta)$ an Stelle von $\psi(x)$. Dann nimmt die Randbedingung folgende Gestalt an (das Symbol für den Limes wollen wir hier weglassen):

$$a(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_\Gamma + b(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_\Gamma = \psi(\theta)\,. \tag{5}$$

Die Funktionen $a(\theta)$ und $b(\theta)$ sind nach Voraussetzung 2π-periodisch und stetig, und zwischen ihnen besteht die Beziehung

$$a^2(\theta) + b^2(\theta) = 1\,. \tag{6}$$

Im weiteren setzen wir voraus, daß diese Funktionen nach θ stetig differenzierbar sind.

§ 2. Der HILBERTsche Operator

Wir betrachten die Menge M der 2π-periodischen und auf $[-\pi, \pi]$ absolut stetigen Funktionen, die auf diesem Segment eine quadratisch summierbare Ableitung besitzen. Es sei $\varphi(\theta) \in M$. Wir entwickeln die Funktion $\varphi(\theta)$ in eine FOURIER-Reihe

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{in\theta}\,. \tag{1}$$

Wie man leicht sieht, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|\,, \tag{2}$$

und die Reihe (1) konvergiert folglich absolut und gleichmäßig. In der Tat, für $n \neq 0$ gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)\, e^{-in\omega}\, d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\varphi(\omega)\,\frac{e^{-in\omega}}{i\,n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi\, i\, n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\omega)\, e^{-in\omega}\, d\omega = \frac{\alpha_n}{i\,n}, \tag{3}$$

wobei

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\omega)\, e^{-in\omega}\, d\omega$$

den n-ten Fourier-Koeffizienten der Ableitung $\varphi'(\omega)$ bedeutet. Die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \tag{4}$$

konvergiert auf Grund der Besselschen Ungleichung, und aus der Ungleichung

$$|a_n| = \left|\frac{\alpha_n}{n}\right| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |\alpha_n|^2\right)$$

ergibt sich die Konvergenz der Reihe (2).

Auf der Menge M definieren wir jetzt auf folgende Weise einen linearen Operator P: Wenn die Funktion $\varphi \in M$ die Fourier-Entwicklung (1) besitzt, dann setzen wir

$$(P\varphi)(\theta) = i \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{in\theta} - i \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n\, e^{in\theta}. \tag{5}$$

Der Operator P heißt *Hilbertscher Operator*.

Wenn die Funktion $\varphi(\theta)$ reell ist, dann ist $(P\varphi)(\theta)$ ebenfalls eine reelle Funktion. In der Tat, in diesem Fall ist $a_{-n} = \overline{a_n}$ und folglich gilt

$$-\,i\, a_{-n}\, e^{-in\theta} = \overline{i\, a_n\, e^{in\theta}}.$$

Lemma 19.2.1. *Aus $\varphi \in M$ folgt $P\varphi \in M$.*

Beweis. Wir betrachten die Reihe

$$i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, e^{in\theta} - i \sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha_n\, e^{in\theta}, \tag{6}$$

wobei die Koeffizienten α_n durch die Beziehung (3) definiert werden. Wegen der Konvergenz der Reihe (4) konvergiert die Reihe (6) in der Metrik des Raumes $L_2(-\pi, \pi)$, und ihre Summe, die wir mit $\sigma(\theta)$ bezeichnen wollen, ist eine quadratisch summierbare Funktion auf dem Segment $[-\pi, \pi]$. Indem wir die Reihe (6) gliedweise integrieren, erhalten wir, bis auf eine additive Konstante, die Reihe (5).

Somit ergibt sich

$$(P\,\varphi)(\theta) = \int\limits_0^\theta \sigma(\omega)\,d\omega + C\,, \qquad C = \text{const};$$

die Funktion $(P\,\varphi)(\theta)$ ist folglich absolut stetig, und ihre Ableitung $\frac{d}{d\theta}(P\,\varphi)(\theta) = \sigma(\theta)$ ist quadratisch summierbar. Da die Glieder der Reihe (5) $2\,\pi$-periodisch sind, so ist auch die Funktion $(P\,\varphi)(\theta)$ $2\,\pi$-periodisch. Das Lemma ist damit bewiesen.

Lemma 19.2.2. *Es gilt die Formel*

$$(P^2\varphi)(\theta) = -\,\varphi(\theta) + \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)\,d\omega\,. \tag{7}$$

Beweis. Es sei $\varphi \in M$. Nach dem vorangegangenen Lemma ist dann $P\,\varphi \in M$, und folglich läßt sich auf die Funktion $P\,\varphi$ der Operator P anwenden. Nach der Formel (5) erhalten wir

$$(P^2\,\varphi)(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{i\,n\,\theta} - \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n\, e^{i\,n\,\theta} =$$

$$= -\,\varphi(\theta) + a_0 = -\,\varphi(\theta) + \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\,d\omega\,,$$

was zu beweisen war.

Es sei jetzt $F(z) = U(x_1, x_2) + i\,V(x_1, x_2)$ eine im Kreis $|z| < 1$ holomorphe Funktion, die im abgeschlossenen Kreis $|z| \leqq 1$ stetig ist. Wir nehmen an, daß der Wert dieser Funktion auf der Kreisperipherie $|z| = 1$ ein Element der Menge M ergibt,

$$F(e^{i\,\theta}) \in M\,, \tag{8}$$

und $F(0)$ eine reelle Größe ist:

$$\operatorname{Im} F(0) = V(0, 0) = 0\,. \tag{9}$$

Aus der Inklusion (8) folgt, daß die TAYLOR-Reihe der Funktion $F(z)$ im abgeschlossenen Kreis $|z| \leqq 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert. In der Tat, sei

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, z^n\,. \tag{10}$$

Die Koeffizienten A_n lassen sich nach der bekannten Formel

$$A_n = \frac{1}{2\,\pi\, i}\int\limits_{\Gamma_\varrho} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\varrho\, e^{-i\,\omega})\,\varrho^{-n}\, e^{-i\,n\,\omega}\,d\omega$$

bestimmen; dabei bedeutet Γ_ϱ die Kreisperipherie $|z| = \varrho < 1$.

Für $0 < \varrho \leqq 1$ ist der Integrand als Funktion der zwei Veränderlichen ϱ und ω stetig. Folglich können wir für $\varrho \to 1$ den Grenzübergang unter dem Integral ausführen und erhalten als Ergebnis

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\omega})\, e^{-in\omega}\, d\omega\,.$$

Indem wir die am Anfang dieses Paragraphen benutzten Überlegungen wiederholen, überzeugen wir uns davon, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$ konvergiert und folglich die Reihe (10) für $|z| \leqq 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Wir bemerken ferner, daß der Koeffizient A_0 reell ist. Wenn wir $F(e^{i\theta}) = \varphi(\theta) + i\,\chi(\theta)$ setzen, dann ergibt sich

$$\varphi(\theta) = U(x_1, x_2)|_{z=e^{i\theta}}\,, \qquad \chi(\theta) = V(x_1, x_2)|_{z=e^{i\theta}}\,.$$

Offensichtlich ist $\varphi \in M$ und $\chi \in M$. Dabei gilt

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}\,[F(e^{i\theta}) + \overline{F(e^{i\theta})}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{in\theta} \tag{11}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} A_n\,, & n > 0\,, \\ A_0\,, & n = 0\,, \\ \frac{1}{2} \bar{A}_{-n}\,, & n < 0\,, \end{cases} \tag{12}$$

und

$$\chi(\theta) = \frac{1}{2i}\,[F(e^{i\theta}) - \overline{F(e^{i\theta})}] =$$

$$= -\,i \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{in\theta} + i \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n\, e^{in\theta} = -\,(P\,\varphi)(\theta)\,. \tag{13}$$

In der Formel (13) kommt eine äußerst wichtige Eigenschaft des Hilbertschen Operators zum Ausdruck, die wir im folgenden Satz formulieren wollen.

Satz 19.2.1. *Die im Kreis $|z| < 1$ harmonische Funktion $U(x_1, x_2)$ nehme auf der Kreisperipherie $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$, den Wert $\varphi(\theta) \in M$ an. $V(x_1, x_2)$ sei die zu $U(x_1, x_2)$ konjugierte harmonische Funktion, die für $z = 0$ verschwindet. Dann gilt*

$$V(x_1, x_2)|_{z=e^{i\theta}} = -\,(P\,\varphi)(\theta)\,. \tag{14}$$

Als Folgerung ergeben sich aus dem soeben formulierten Satz folgende zwei Eigenschaften des Hilbertschen Operators.

1. Wenn $\varphi \in M$ ist, dann stellt die Funktion

$$\varphi(\theta) - i(P\,\varphi)(\theta) \tag{15}$$

den Randwert für $z = e^{i\theta}$ einer im Kreis $|z| < 1$ holomorphen Funktion $f^+(z)$ dar. Dabei ist $f^+(0)$ ein reeller Wert, wenn die Funktion $\varphi(\theta)$ reell ist.

In der Tat, wenn die Funktion $\varphi(\theta)$ durch die Reihe (1) dargestellt wird, dann gilt

$$\varphi(\theta) - i(P\varphi)(\theta) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Die Summe dieser Reihe ist der Wert der Funktion

$$f^+(z) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{16}$$

für $z = e^{i\theta}$. Offensichtlich ist die Funktion (16) im Kreis $|z| < 1$ holomorph. Ist nun $\varphi(\theta)$ eine reelle Funktion, dann ist auch die Zahl

$$f^+(0) = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)\, d\omega$$

reell.

2. Unter derselben Voraussetzung $\varphi \in M$ stellt die Funktion

$$\varphi(\theta) + i(P\varphi)(\theta) \tag{17}$$

den Randwert für $z = e^{i\theta}$ einer im Außengebiet $|z| > 1$ des Kreises holomorphen Funktion $f^-(z)$ dar; dabei gilt

$$f^-(\infty) = f^+(0). \tag{18}$$

In der Tat, die Funktion (17) läßt sich in die Reihe

$$\varphi(\theta) + i(P\varphi)(\theta) = a_0 + 2\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n e^{in\theta}$$

entwickeln. Die Summe der letzten Reihe ist der Wert der im Gebiet $|z| > 1$ holomorphen Funktion

$$f^-(z) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \tag{19}$$

auf dem Einheitskreis. Dabei ist $f^-(\infty) = a_0 = f^+(0)$.

Wir erwähnen schließlich noch die folgenden Beziehungen, die sich unmittelbar aus den oben bewiesenen Formeln ergeben:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \frac{1}{2}[f^+(z) + f^-(z)], \\ (P\varphi)(\theta) &= \frac{i}{2}[f^+(z) - f^-(z)], \end{aligned} \tag{20}$$

dabei ist $z = e^{i\theta}$.

Im weiteren werden mit hochgestellten Indizes + und − stets solche Funktionen bezeichnet, die entsprechend innerhalb bzw. außerhalb des Einheitskreises holomorph sind.

Bemerkung 1. Die Menge M läßt sich leicht in einen vollständigen normierten Raum verwandeln: Wenn die Funktion $\varphi \in M$ durch die Reihe (1) dargestellt wird, dann setzen wir

$$\|\varphi\| = |\alpha_0| + \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

wobei die α_n durch die Formel (3) definiert werden.

Offensichtlich ist in diesem Raum die Norm des HILBERTschen Operators gleich Eins.

Bemerkung 2. Die Norm des HILBERTschen Operators ist auch im Raum $L_2(-\pi, \pi)$ gleich Eins, wenn man den Operator auf diesem Raum durch dieselben Formeln (1) und (5) definiert. Die Beschränktheit des HILBERTschen Operators läßt sich auch im Raum $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, beweisen.

Bemerkung 3. Der HILBERTsche Operator läßt sich als sogenanntes *singuläres Integral* darstellen:

$$(P\,\varphi)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) \cot \frac{\omega - \theta}{2}\, d\omega =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\theta-\varepsilon} \varphi(\omega) \cot \frac{\omega - \theta}{2}\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\varepsilon}^{\pi} \varphi(\omega) \cot \frac{\omega - \theta}{2}\, d\omega \right\}. \quad (21)$$

Die Formel (21) verdeutlicht den Zusammenhang zwischen dem HILBERTschen Operator und der Theorie der *singulären Integralgleichungen*, die in der modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle spielen. Eine ausführliche Darlegung der Theorie der singulären Integralgleichungen findet man in [14] und [12].

§ 3. Gleichungen mit dem HILBERTschen Operator

Wir betrachten die Gleichung

$$a(\theta)\,\varphi(\theta) + b(\theta)\,(P\,\varphi)(\theta) = g(\theta)\,. \quad (1)$$

Dabei sind $a(\theta)$, $b(\theta)$, $g(\theta)$ vorgegebene und $\varphi(\theta)$ ist eine gesuchte Funktion der Klasse M. Wir setzen voraus, daß die Funktionen $a(\theta)$ und $b(\theta)$ 2π-periodisch und stetig differenzierbar sind.

Gleichung (1)[1]) werden wir unter der Voraussetzung lösen, daß die Koeffizienten $a(\theta)$ und $b(\theta)$ die folgende Ungleichung erfüllen:

$$a^2(\theta) + b^2(\theta) \neq 0\,, \qquad -\pi \leqq \theta \leqq \pi\,. \quad (2)$$

Unter Benutzung der Formeln (2.20) läßt sich die Gleichung (1) auf die Gestalt

$$f^+(z) + \frac{a(\theta) - i\,b(\theta)}{a(\theta) + i\,b(\theta)} f^-(z) = g_1(\theta)\,, \qquad z = e^{i\theta} \quad (3)$$

bringen; dabei ist $g_1(\theta) = \dfrac{2\,g(\theta)}{a(\theta) + i\,b(\theta)}$. Die Eigenschaften der Funktionen $f^+(z)$ und $f^-(z)$ sind im vorangegangenen Paragraphen beschrieben worden.

---

[1]) Die Gleichung (1) gehört zur Klasse der singulären Integralgleichungen, die am Schluß des vorhergehenden Paragraphen genannt wurden.

Die Funktion $\frac{a(\theta) - i\,b(\theta)}{a(\theta) + i\,b(\theta)}$ ist stetig und 2π-periodisch; folglich ändert sich das Argument dieser Funktion um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 2π, wenn θ das Intervall $[-\pi, \pi]$ von links nach rechts durchläuft. Es gilt also

$$\int_{-\pi}^{\pi} d \arg \frac{a(\theta) - i\,b(\theta)}{a(\theta) + i\,b(\theta)} = 2\,\varkappa\,\pi\,, \tag{4}$$

wobei $\varkappa$ eine gewisse ganze Zahl ist.

Wir setzen

$$\alpha(\theta) = \ln\left[e^{-i\varkappa\theta}\,\frac{a(\theta) - i\,b(\theta)}{a(\theta) + i\,b(\theta)}\right]. \tag{5}$$

Aus der Definition der Zahl $\varkappa$ folgt, daß die Funktion $\alpha(\theta)$ 2π-periodisch ist: $\alpha(-\pi) = \alpha(\pi)$; offensichtlich ist diese Funktion, ebenso wie die Funktionen $a(\theta)$ und $b(\theta)$, stetig differenzierbar. Dann ist aber $\alpha \in M$ und somit auch $P\alpha \in M$.

Wir konstruieren jetzt Funktionen $\beta^+(z)$ und $\beta^-(z)$, die in den Gebieten $|z| < 1$ bzw. $|z| > 1$ holomorph sind und auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ die Werte

$$\begin{aligned} \beta^+(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\,[\alpha(\theta) - i(P\alpha)(\theta)]\,, \\ \beta^-(e^{i\theta}) &= -\frac{1}{2}\,[\alpha(\theta) + i(P\alpha)(\theta)] \end{aligned} \tag{6}$$

annehmen.

Wie man aus den Formeln (2.16) und (2.19) ersieht, konvergiert die TAYLOR-Reihe der Funktion $\beta^+(z)$ im abgeschlossenen Kreis $|z| \leqq 1$ absolut und gleichmäßig, und die LAURENT-Reihe der Funktion $\beta^-(z)$ konvergiert absolut und gleichmäßig im abgeschlossenen Gebiet $|z| \geqq 1$. Daraus folgt, daß diese Funktionen beschränkt und folglich die Funktionen $e^{\pm\beta^+(z)}$ und $e^{\pm\beta^-(z)}$ in den entsprechenden abgeschlossenen Gebieten beschränkt und verschieden von Null sind.

Aus den Formeln (5) und (6) ergibt sich

$$\frac{a(\theta) - i\,b(\theta)}{a(\theta) + i\,b(\theta)} = z^{\varkappa}\,e^{\beta^+(z) - \beta^-(z)}\,, \qquad z = e^{i\theta}\,.$$

Wir setzen diesen Ausdruck in Gleichung (3) ein und multiplizieren danach beide Seiten dieser Gleichung mit $e^{-\beta^+(z)}$. Führt man nun noch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f^+(z)\,e^{-\beta^+(z)} &= \Phi^+(z)\,, \\ f^-(z)\,e^{-\beta^-(z)} &= \Phi^-(z)\,, \\ g_1(\theta)\,e^{-\beta^+(e^{i\theta})} &= g_2(\theta) \end{aligned} \tag{7}$$

ein, dann nimmt Gleichung (3) die folgende einfache Gestalt an:

$$\Phi^+(z) + z^{\varkappa}\,\Phi^-(z) = g_2(\theta)\,, \qquad z = e^{i\theta}\,. \tag{8}$$

Die weitere Untersuchung hängt von dem Wert der ganzen Zahl $\varkappa$ ab.

1. $\varkappa = 0$. Gleichung (8) hat dann die Gestalt

$$\Phi^+(z) + \Phi^-(z) = g_2(\theta)\,, \quad z = e^{i\theta}\,. \tag{9}$$

Eine spezielle Lösung dieser Gleichung erhält man aus den Formeln

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\,[g_2(\theta) - i(P\,g_2)(\theta)]\,, \\ \Phi_1^-(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\,[g_2(\theta) + i(P\,g_2)(\theta)] \end{aligned} \tag{10}$$

durch analytische Fortsetzung der Funktionen Φ_1^+ und Φ_1^- mit Hilfe der TAYLOR- bzw. der LAURENT-Reihe. Explizit kann man diese Lösung wie folgt angeben. Wir entwickeln die Funktion $g_2(\theta)$ in die FOURIER-Reihe

$$g_2(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\,e^{in\theta}\,. \tag{11}$$

Dann ergibt sich

$$\Phi_1^+(z) = \frac{1}{2}\,b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,z^n\,, \qquad \Phi_1^-(z) = \frac{1}{2}\,b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{z^n}\,. \tag{12}$$

Um die allgemeine Lösung der Gleichung (9) zu finden, betrachten wir die entsprechende homogene Gleichung

$$\Phi_0^+(z) + \Phi_0^-(z) = 0\,, \quad z = e^{i\theta}\,. \tag{13}$$

Auf Grund des RIEMANNschen Satzes über die analytische Fortsetzung durch eine Kurve [1]) ist jede der Funktionen $\Phi_0^+(z)$ und $-\Phi_0^-(z)$ die analytische Fortsetzung der anderen auf die gesamte z-Ebene. Aus dem Satz von LIOUVILLE folgt dann $\Phi_0^+(z) \equiv C$ und $\Phi_0^-(z) \equiv -\,C$, wobei C eine gewisse Konstante ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (9) hat folglich die Gestalt

$$\Phi^+(z) = \Phi_1^+(z) + C\,, \qquad \Phi^-(z) = \Phi_1^-(z) - C\,; \tag{14}$$

dabei bedeutet C eine beliebige Konstante und die Funktionen $\Phi_1^+(z)$, $\Phi_1^-(z)$ werden durch die Formeln (12) definiert.

Da man jetzt $\Phi^+(z)$ und $\Phi^-(z)$ kennt, so lassen sich die Funktionen $f^+(z)$ und $f^-(z)$ auf Grund der Formeln (7) bestimmen. Dabei hat man die Konstante C so zu wählen, daß die Gleichung (2.18) erfüllt ist. Aus Formel (6) ergibt sich leicht $\beta^-(\infty) = -\,\beta^+(0)$. Setzen wir jetzt $e^{\beta^+(0)} = \delta$, dann erhalten wir für C die Gleichung

$$C\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) = -\,\frac{b_0}{2}\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right). \tag{15}$$

Wenn $\delta \neq \pm\,i$ ist, dann sind die Konstante C und damit auch die Funktionen $f^+(z)$ und $f^-(z)$ eindeutig definiert. Die Gleichung (1) besitzt in diesem

---

[1]) Siehe z. B. W. I. SMIRNOW, Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III$_2$, 2. Auflage, Berlin 1959, § 24 (Übersetzung aus dem Russischen).

Fall eine und nur eine Lösung, und diese wird durch die erste der Formeln (2.20) gegeben:

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}[f^+(e^{i\theta}) + f^-(e^{i\theta})].$$

Ist hingegen $\delta = \pm i$, dann ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Gleichung (1):

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_2(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\omega)\, e^{-\beta^+(e^{i\omega})}}{a(\omega) + i\, b(\omega)}\, d\omega = 0\,. \tag{16}$$

Es ist auch offensichtlich, daß für $\delta = \pm i$ die homogene Gleichung

$$a(\theta)\,\varphi_0(\theta) + b(\theta)\,(P\,\varphi_0)(\theta) = 0 \tag{17}$$

genau eine linear unabhängige Lösung besitzt.

Der Fall $\varkappa = 0$ entspricht folglich der FREDHOLMschen Alternative: Entweder (für $\delta \neq \pm i$) die homogene Gleichung hat nur die triviale Lösung, und die inhomogene Gleichung ist stets lösbar, oder (für $\delta = \pm i$) die homogene Gleichung besitzt eine linear unabhängige Lösung, und die inhomogene Gleichung ist dann und nur dann lösbar, wenn ihre rechte Seite $g(\theta)$ *einer* Orthogonalitätsbedingung (16) genügt.

2. $\varkappa > 0$. Wir suchen eine solche Lösung der Gleichung (8), für die die LAURENT-Reihe der Funktion $\Phi^-(z)$ mit der Potenz $z^{-\varkappa}$ beginnt. Dann ist $\Psi^-(z) = z^\varkappa\,\Phi^-(z)$ eine im Außengebiet $|z| > 1$ des Kreises holomorphe Funktion. Setzen wir nun $\Phi^+(z) = \Psi^+(z)$, dann gelangen wir zu der Gleichung

$$\Psi^+(z) + \Psi^-(z) = g_2(\theta)\,, \qquad z = e^{i\theta}\,,$$

die mit Gleichung (9) identisch ist; folglich hat eine der gesuchten Lösungen der Gleichung (8) auf dem Einheitskreis $z = e^{i\theta}$ die Gestalt

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2}[g_2(\theta) - i(P\,g_2)(\theta)]\,, \\ \Phi_1^-(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2}[g_2(\theta) + i(P\,g_2)(\theta)]\,e^{-i\varkappa\theta}; \end{aligned} \tag{18}$$

innerhalb bzw. außerhalb des Kreises $|z| = 1$ wird diese Lösung durch folgende Reihen definiert:

$$\Phi_1^+(z) = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n\,,$$

$$\Phi_1^-(z) = \frac{b_0}{2z^\varkappa} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{-n}}{z^{n+\varkappa}}\,.$$

Die Lösung (18) ist jedoch nicht eindeutig. Wir überzeugen uns davon, indem wir die homogene Gleichung

$$\Phi_0^+(z) + z^\varkappa\,\Phi_0^-(z) = 0\,, \qquad z = e^{i\theta} \tag{19}$$

betrachten. Jede der Funktionen $\Phi_0^+(z)$ und $-z^\varkappa \Phi_0^-(z)$ ist die analytische Fortsetzung der anderen auf die gesamte endliche Ebene. Da die Funktion $\Phi_0^-(z)$ im Unendlichen beschränkt ist, so besitzt die Funktion $z^\varkappa \Phi_0^-(z)$ im Unendlichen einen Pol von höchstens $\varkappa$-ter Ordnung. Nach dem Satz von LIOUVILLE ist dann $z^\varkappa \Phi_0^-(z)$ ein Polynom vom Grade $\leqq \varkappa$; es sei

$$z^\varkappa \Phi_0^-(z) = -(c_0 + c_1 z + \cdots + c_\varkappa z^\varkappa) .$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_0^+(z) &= c_0 + c_1 z + \cdots + c_\varkappa z^\varkappa , \\ \Phi_0^-(z) &= -\left(\frac{c_0}{z^\varkappa} + \frac{c_1}{z^{\varkappa-1}} + \cdots + c_\varkappa\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Die Formeln (20) liefern die allgemeine Lösung der Gleichung (19). Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (8) wird durch die Formeln

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \Phi_1^+(z) + c_0 + c_1 z + \cdots + c_\varkappa z^\varkappa , \\ \Phi^-(z) &= \Phi_1^-(z) - \frac{c_0}{z^\varkappa} - \frac{c_1}{z^{\varkappa-1}} - \cdots - c_\varkappa \end{aligned} \tag{21}$$

dargestellt; dabei sind $\Phi_1^+(z)$ und $\Phi_1^-(z)$ durch die Gleichungen (18) definiert.

Die Funktionen $f^+(z)$ und $f^-(z)$ finden wir jetzt nach den Formeln (7); dabei müssen die willkürlichen Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_\varkappa$ die Bedingung (2.18) erfüllen. Wie man leicht sieht, führt diese Bedingung auf die Gleichung

$$c_0 \delta + \frac{c_\varkappa}{\delta} = -\frac{b_0 \delta}{2}, \qquad \delta = e^{\beta^+(0)} . \tag{22}$$

Mit Hilfe der Beziehung (22) läßt sich c_0 durch $c_\varkappa$ ausdrücken; folglich enthalten die Formeln (21) und damit auch die Lösung der Gleichung (1) $\varkappa$ willkürliche Konstanten. Daraus folgt, daß die inhomogene Gleichung (1) im Falle $\varkappa > 0$ bei beliebiger rechter Seite lösbar ist und eine unendliche Lösungsmenge besitzt, die von den willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_\varkappa$ abhängt. Die homogene Gleichung (17) besitzt genau $\varkappa$ linear unabhängige Lösungen.

Wie man sieht, entspricht der Fall $\varkappa > 0$ nicht der FREDHOLMschen Alternative; diese hat also im vorliegenden Fall keine Gültigkeit.

3. $\varkappa < 0$. Wir setzen $k = -\varkappa$, dann ist $k > 0$. Für die Gleichung (8) ergibt sich jetzt

$$\Phi^+(z) + z^{-k} \Phi^-(z) = g_2(\theta) , \qquad z = e^{i\theta} . \tag{23}$$

Die Funktion $\Psi^-(z) = z^{-k} \Phi^-(z)$ ist holomorph im Gebiet $|z| > 1$. Setzen wir nun $\Phi^+(z) = \Psi^+(z)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\Psi^+(z) + \Psi^-(z) = g_2(\theta) , \qquad z = e^{i\theta} .$$

Wie wir bereits gesehen haben, läßt sich die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch die Formeln

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{2} b_0 + C + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n , \qquad \Psi^-(z) = \frac{1}{2} b_0 - C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{z^n}$$

darstellen; letztere ergeben sich unmittelbar aus den Beziehungen (11), (12) und (14).

Offensichtlich ist $\Psi^-(\infty) = 0$ und folglich $C = \frac{1}{2} b_0$. Wir finden somit

$$\Phi^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n , \qquad \Phi^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{z^{n-k}} . \tag{24}$$

Da aber die Funktion $\Phi^-(z)$ im Unendlichen beschränkt sein muß, so liefern die Formeln (24) dann und nur dann eine Lösung der Gleichung (23), wenn in der Entwicklung (24) der Funktion $\Phi^-(z)$ keine positiven Potenzen von z auftreten. Daraus ergeben sich für die rechte Seite der Gleichung (1) $k - 1$ Orthogonalitätsbedingungen der Gestalt

$$b_{-n} = 0 , \qquad n = 1, 2, \ldots, k - 1$$

oder

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\omega)\, e^{in\omega - \beta^+(e^{i\omega})}}{a(\omega) + i\, b(\omega)}\, d\omega = 0 , \qquad n = 1, 2, \ldots, k - 1 . \tag{25}$$

Eine weitere Orthogonalitätsbedingung liefert die Beziehung (2.18):

$$b_0 \delta - \frac{b_{-k}}{\delta} = 0$$

oder

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\delta - \frac{e^{ik\omega}}{\delta}\right) g(\omega)\, d\omega = 0 . \tag{26}$$

Sind die Orthogonalitätsbedingungen (25) und (26) erfüllt, dann besitzt Gleichung (1) eine eindeutige Lösung; diese Lösung erhält man aus den Formeln (24), (7) und (2.20).

Offensichtlich hat im Fall $\varkappa < 0$ die FREDHOLMsche Alternative ebenfalls keine Gültigkeit.

Wir führen jetzt die folgende Definition ein. Ein gewisses Problem bestehe in der Lösung der Gleichung

$$A\, u = f , \tag{27}$$

wobei $u \in X$ und $f \in Y$ ist; dabei seien X, Y BANACH-Räume und A sei ein linearer abgeschlossener Operator von X in Y. Das vorliegende Problem heißt *normal auflösbar*, wenn für seine Lösbarkeit notwendig und hinreichend ist, daß die rechte Seite f gewissen Orthogonalitätsbedingungen, d. h. Bedingungen der Gestalt

$$(F_j, f) = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

genügt, wobei die F_j lineare und in der Norm des Raumes Y beschränkte Funktionale sind. Dabei sei auch der Fall nicht ausgenommen, wo die Anzahl dieser Orthogonalitätsbedingungen gleich Null ist — in diesem Fall ist ein normal auflösbares Problem bei beliebiger rechter Seite lösbar. Im weiteren werden wir auch von der normalen Auflösbarkeit der Gleichung (27) bzw. des Operators A sprechen.

Fast alle in den vorangegangenen Paragraphen betrachteten Probleme sind in entsprechend gewählten Paaren von Räumen normal auflösbar, so die Gleichungen mit vollstetigen Operatoren, die DIRICHLETschen und NEUMANNschen Probleme für die nicht entartete elliptische Gleichung im endlichen Gebiet bzw. für die homogene LAPLACE-Gleichung im endlichen oder unendlichen Gebiet. Wie im vorliegenden Paragraphen bewiesen wurde, ist die Gleichung (1) mit dem HILBERTschen Operator normal auflösbar, wenn die Bedingung (2) erfüllt ist.

Wir bemerken noch, ohne allerdings den Beweis anzugeben, daß die Gleichung (1) nicht normal auflösbar ist, wenn die Funktion $a^2(\theta) + b^2(\theta)$ endlich viele Nullstellen ganzzahliger Vielfachheiten besitzt. Ein anderes Beispiel eines nicht normal auflösbaren Problems ist das im Raum $L_2(\Omega)$ betrachtete DIRICHLETsche Problem $-\Delta u = f(x)$, $u|_\Gamma = 0$, wenn die endliche Fläche Γ ein unendliches Gebiet Ω berandet.

Es sei A ein normal auflösbarer Operator, $\alpha(A)$ bedeute die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung $A\,u = 0$ und $\beta(A)$ die Anzahl der für die Lösbarkeit der Gleichung (27) notwendigen und hinreichenden Orthogonalitätsbedingungen (28). Wir nehmen an, daß wenigstens eine der Zahlen $\alpha(A)$ oder $\beta(A)$ endlich sei. Dann heißt die Differenz $\alpha(A) - \beta(A)$ Index des Operators A bzw. des entsprechenden linearen Problems und wird mit $\operatorname{Ind} A$ bezeichnet:

$$\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \beta(A)\,.$$

Wenn T ein vollstetiger Operator und I der identische Operator ist, dann folgt aus der FREDHOLMschen Alternative $\operatorname{Ind}(I + T) = 0$. Es gilt auch allgemein: Wenn für ein gewisses Problem die FREDHOLMsche Alternative Gültigkeit hat, dann ist der Index dieses Problems gleich Null. Man überzeugt sich leicht davon, daß der Index der Gleichung (1) gleich $\varkappa$ ist; dabei wird die Bedingung (2) als erfüllt angesehen. Der Index der übrigen oben genannten normal auflösbaren Probleme ist gleich Null.

§ 4. Die Anzahl der Lösungen und der Index des Problems der Richtungsableitung in der zweidimensionalen Ebene

Wir kehren zum Problem der Richtungsableitung zurück, das im § 1 formuliert wurde: Gesucht sei eine Funktion $u(x) = u(x_1, x_2)$, die im Kreis $|z| < 1$, $z = x_1 + i\,x_2$, harmonisch ist und die Randbedingung

$$a(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{z=e^{i\theta}} + b(\theta)\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{z=e^{i\theta}} = \psi(\theta)\,, \tag{1}$$

$$a^2(\theta) + b^2(\theta) = 1 \tag{2}$$

erfüllt.

Dabei ist $a(\theta) = \cos(\lambda, x_1)$, $b(\theta) = \cos(\lambda, x_2)$. Wie auch im § 1 setzen wir voraus, daß die Funktionen $a(\theta)$ und $b(\theta)$ stetig differenzierbar sind und $\psi \in M$

ist; die Menge M wurde im § 2 erklärt. Wir suchen eine solche Lösung, daß $\varphi \in M$ mit

$$\varphi(\theta) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{z=e^{i\theta}} \tag{3}$$

gilt.

Wenn $u = \operatorname{Re}(w(z))$ und $v = \operatorname{Im}(w(z))$ ist, wobei $w(z)$ eine holomorphe Funktion bedeutet, dann ergibt sich

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - i\frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Daraus folgt, daß $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ und $-\frac{\partial u}{\partial x_2}$ konjugierte harmonische Funktionen sind. Setzen wir nun

$$\chi(\theta) = \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{z=e^{i\theta}}, \qquad l = \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{z=0}, \tag{4}$$

dann erhalten wir nach Satz 19.2.1

$$\chi(\theta) = (P\,\varphi)(\theta) + l. \tag{5}$$

Setzt man die Ausdrücke (3) und (5) in die Gleichung (1) ein, so nimmt diese folgende Gestalt an:

$$a(\theta)\,\varphi(\theta) + b(\theta)\,(P\,\varphi)(\theta) = \psi(\theta) - l\,b(\theta). \tag{6}$$

Wir berechnen jetzt den Index der Gleichung (6); es gilt

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\arg\frac{a(\theta) - i\,b(\theta)}{a(\theta) + i\,b(\theta)}$$

oder, wenn man die Beziehung (2) benutzt,

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\arg\,[a(\theta) - i\,b(\theta)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\arg e^{-i(\lambda,\,x_1)} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d(\lambda, x_1) = -\frac{[(\lambda, x_1)]_\Gamma}{\pi}; \tag{7}$$

dabei bedeutet das Symbol $[(\lambda, x_1)]_\Gamma$ den Zuwachs des Winkels (λ, x_1) bei einmaligem Umlaufen des Einheitskreises Γ in positiver Richtung. Wir bemerken, daß der Index der Gleichung (6) eine gerade Zahl ergibt.

Wir bestimmen jetzt die Anzahl der Lösungen sowie den Index des Problems (1), (2). Dazu müssen wir einige Fälle unterscheiden.

1. $\varkappa = 0$, $\delta \neq \pm i$. In diesem Fall hat die homogene Gleichung (6) nur die triviale Lösung, das homogene Problem (1), (2) besitzt zwei linear unabhängige Lösungen: Die eine Lösung entsteht infolge der willkürlichen Größe l, die andere dadurch, daß man zu der Lösung $u(x)$ eine beliebige additive Konstante hinzufügen kann, ohne dabei die Laplace-Gleichung oder die Randbedingung (1) zu verletzen. Die zuletzt erwähnte Lösung haben wir auch in den nach-

folgenden Fällen zu berücksichtigen. Orthogonalitätsbedingungen treten nicht auf, und der Index des Problems (1), (2) ist im vorliegenden Fall gleich 2.

2. $\varkappa = 0$, $\delta = \pm i$. Es liegen eine Orthogonalitätsbedingung — die Bedingung (3.16) — sowie eine linear unabhängige Lösung der homogenen Gleichung (6) vor. Wenn die Funktion $b(\theta)$ die Bedingung (3.16) erfüllt, dann ist die Größe l willkürlich wählbar; in diesem Fall besitzt das homogene Problem (1), (2) drei linear unabhängige Lösungen, und für die Lösbarkeit des inhomogenen Problems (1), (2) ist die Gültigkeit einer Orthogonalitätsbedingung notwendig und hinreichend. Der Index dieses Problems ist gleich 2. Wenn $b(\theta)$ der Bedingung (3.16) nicht genügt, dann ist aus dieser Bedingung die Größe l zu bestimmen; in diesem Fall ist dann die Orthogonalitätsbedingung erfüllt und braucht folglich nicht weiter berücksichtigt zu werden, das homogene Problem (1), (2) besitzt zwei nicht triviale Lösungen. Der Index des Problems (1), (2) ist wiederum gleich 2.

3. $\varkappa > 0$. Es treten keine Orthogonalitätsbedingungen auf; die homogene Gleichung (6) besitzt $\varkappa$ linear unabhängige Lösungen. Das homogene Problem (1), (2) besitzt $\varkappa + 2$ Lösungen — zwei Lösungen kommen ähnlich wie im Fall 1 hinzu. Der Index des Problems (1), (2) ist gleich $\varkappa + 2$.

4. $\varkappa < 0$. Die homogene Gleichung (6) besitzt nur die triviale Lösung, und für die inhomogene Gleichung (6) müssen die $-\varkappa$ Orthogonalitätsbedingungen (3.25) und (3.26) erfüllt sein. Genügt die Funktion $b(\theta)$ diesen Bedingungen, dann ist l beliebig wählbar und das homogene Problem (1), (2) besitzt zwei linear unabhängige Lösungen; der Index des Problems (1), (2) ist dann gleich $\varkappa + 2$. Erfüllt aber $b(\theta)$ nicht alle Orthogonalitätsbedingungen, dann ist aus diesen Bedingungen die Größe l zu bestimmen; in diesem Fall verringert sich die Anzahl der Orthogonalitätsbedingungen um 1 und ist folglich gleich $-\varkappa - 1$. Das homogene Problem (1), (2) besitzt dann nur eine nicht triviale Lösung, nämlich die Konstante, von der bereits im Fall 1 die Rede war. Der Index des Problems (1), (2) ist auch hier gleich $\varkappa + 2$.

Als Ergebnis der vorangegangenen Untersuchungen kann der folgende Satz formuliert werden.

Satz 19.4.1. *Der Index des Problems der Richtungsableitung für den Kreis ist gleich*

$$\varkappa + 2 = -\frac{[(\lambda, x_1)]_\Gamma}{\pi} + 2\,.$$

Beispiel. Beim NEUMANNschen Problem für den Kreis stimmt die Richtung λ mit der Richtung des Radiusvektors überein. Folglich gilt $(\lambda, x_1) = \theta$ und damit $[(\lambda, x_1)]_\Gamma = 2\pi$; der Index des NEUMANNschen Problems ist also gleich Null.

Bemerkung. Der Satz 19.4.1 gilt nicht nur für den Kreis, sondern für ein beliebiges Gebiet, das durch endlich viele geschlossene reguläre Kurven ohne gemeinsame Punkte berandet wird.

Für $m > 2$ gilt im m-dimensionalen Raum die folgende Behauptung: Ein Gebiet werde durch endlich viele geschlossene reguläre Flächen ohne gemeinsame Punkte berandet, und $\cos(\lambda, \xi_j)$ seien hinreichend glatte Funktionen (λ bedeutet das im § 1 eingeführte Richtungsfeld). Wenn die Richtung λ den Rand dieses Gebietes nirgends berührt, dann ist der Index des Problems der Richtungsableitung gleich Null.

Teil VI

Nicht stationäre Gleichungen

Im vorliegenden Teil werden Gleichungen vom parabolischen und hyperbolischen Typ studiert. Es werden — genauer gesagt — zwei Klassen von Gleichungen untersucht, die man als Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung und der Wellengleichung auf den Fall von Medien mit komplizierten physikalischen Eigenschaften (inhomogene und anisotrope Medien) im Raume beliebiger Dimension betrachten kann. Wie in der Wärmeleitungsgleichung, so bedeutet auch in der Wellengleichung eine der unabhängigen Veränderlichen die Zeit, die anderen sind Raumkoordinaten. In diesem Zusammenhang benutzen wir folgende Bezeichnungen, die sich von den Bezeichnungen der Teile IV und V etwas unterscheiden. Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen wird nicht mit m, sondern mit $m + 1$ bezeichnet; die ersten m Veränderlichen werden mit $x_1, x_2, \ldots, x_m$, die letzte Veränderliche mit t bezeichnet. Die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ werden als cartesische Koordinaten eines gewissen Punktes betrachtet, der dem m-dimensionalen euklidischen Raum E_m angehört. Die in den vorangegangenen Teilen verwendete Schreibweise für eine Summe werden wir beibehalten: Wenn in einem eingliedrigen Ausdruck ein variabler Index, der sich in den Grenzen von 1 bis m ändert, doppelt auftritt, so wird über diesen Index in den Grenzen von 1 bis m summiert.

Bisweilen werden wir der Einfachheit halber x_{m+1} statt t schreiben.

KAPITEL 20

DIE WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

§ 1. Die Wärmeleitungsgleichung und ihre Charakteristiken

Wir betrachten die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit $m + 1$ unabhängigen Veränderlichen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A_{jk}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} + A_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x, t) \, u = f(x, t), \quad A_{jk} = A_{kj} \,. \quad (1)$$

Die Koeffizientenmatrix des Hauptteils hat die Gestalt

$$\begin{Vmatrix} -A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1n} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & \dots & -A_{2n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_{n1} & -A_{n2} & \dots & -A_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Einer der Eigenwerte dieser Matrix ist gleich Null, die anderen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von den Eigenwerten der Koeffizientenmatrix $\|A_{jk}\|$. Wenn diese Eigenwerte alle das gleiche Vorzeichen haben, so gehört die Gleichung (1) zum Typ $(m, 0, 1)$ und ist folglich parabolisch. In diesem Falle nennen wir die Gleichung (1) *Wärmeleitungsgleichung*.

Hierbei ist wichtig, daß der in die Wärmeleitungsgleichung eingehende Differentialausdruck

$$-A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} + A_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0\,u \tag{2}$$

in den Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_m$ elliptisch ist.

Im folgenden setzen wir voraus, daß die Matrix der Koeffizienten A_{jk} positive Eigenwerte hat, d. h., daß diese Matrix positiv-definit ist.

Wir ermitteln nun die Charakteristiken der Gleichung (1). Wenn $\omega(x, t) = $ $= \text{const}$ die Gleichung einer charakteristischen Fläche ist, so (s. § 2, Kap. 10) genügt die Funktion ω der Gleichung

$$A_{jk}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_k} = 0\,.$$

Da aber die Matrix $\|A_{jk}\|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$ positiv-definit ist, so gilt notwendigerweise $\dfrac{\partial\omega}{\partial x_k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$; die Funktion ω hängt also nur von t ab, und die Gleichung der charakteristischen Fläche nimmt die Gestalt $\omega(t) = \text{const}$ an. Wenn auf einem gewissen Intervall die Beziehung $\omega'(t) = 0$ erfüllt ist, so ist ω auf diesem Intervall eine Konstante und die Gleichung $\omega = \text{const}$ definiert keine Fläche. Ist jedoch $\omega'(t) \not\equiv 0$, so kann man in einer Umgebung eines beliebigen Wertes t, für den $\omega'(t) \neq 0$ erfüllt ist, die Gleichung $\omega(t) = \text{const}$ nach t auflösen und findet

$$t = \text{const}\,. \tag{3}$$

Somit sind die Charakteristiken der Wärmeleitungsgleichung m-dimensionale Ebenen, auf denen die t-Achse senkrecht steht. Im weiteren betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung unter folgenden enger gefaßten Voraussetzungen.

1. Der elliptische Differentialausdruck (2) habe die Form

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \tag{4}$$

so daß die Wärmeleitungsgleichung die Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t) \tag{5}$$

annimmt. Gelegentlich werden wir voraussetzen, daß $f(x, t) \equiv 0$ ist. In diesem Falle betrachten wir die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0\,. \tag{6}$$

2. Die Koeffizienten A_{jk} hängen nicht von t ab und sind nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$ stetig differenzierbar.

3. Der elliptische Ausdruck (4) ist nicht entartet.

§ 2. Das Maximumprinzip

In der Ebene $t = 0$ (d. h. also im m-dimensionalen euklidischen Raum E_m) betrachten wir ein endliches Gebiet Ω mit dem Rand Γ. Wir konstruieren die Zylinderfläche mit der Leitlinie Γ, deren Erzeugenden zur t-Achse parallel sind. Den zwischen den Ebenen $t = 0$ und $t = T$ eingeschlossenen Teil dieser Fläche nennen wir B_T; hierbei ist T eine positive Konstante. Ferner bezeichnen wir mit Ω_T die Projektion des Gebietes Ω auf die Ebene $t = T$ und mit Q_T das Gebiet des Raumes $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ mit dem Rand $\Omega \cup B_T \cup \Omega_T$ (Abb. 36).

Wir führen folgende Bezeichnung ein: Wenn D eine gewisse Menge im Raum der Veränderlichen $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ ist, so werden wir die Klasse der Funktionen, die auf der Menge D stetige Ableitungen nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$ der Ordnung $\leqq p$ und stetige Ableitungen nach t der Ordnung $\leqq q$ haben, mit $C^{(p,q)}(D)$ bezeichnen.

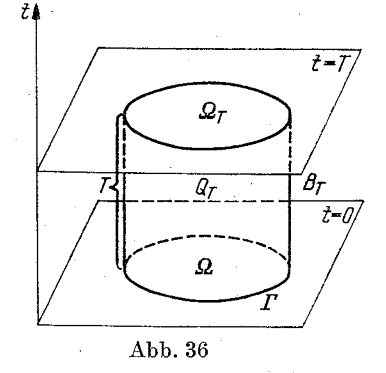


Abb. 36

Satz 20.2.1. *Die Funktion $u(x, t)$ gehöre dem Durchschnitt*

$$C(\bar{Q}_T) \cap C^{(2,1)}(Q_T \cup \Omega_T) \tag{1}$$

an und genüge in Q_T der homogenen Wärmeleitungsgleichung (1.6). *Dann nimmt die Funktion $u(x, t)$ im abgeschlossenen Gebiet $\bar{Q}_T$ sowohl ihren größten als auch ihren kleinsten Wert auf $\Omega \cup B_T$ an.*

Der Satz 20.2.1 heißt das *Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung.*

Beweis. Es genügt, den Satz für den Fall des Maximums zu beweisen: Wenn die im Satz genannte Funktion $u(x, t)$ in einem gewissen Punkt ihr Minimum erreicht, so nimmt in diesem Punkt die Funktion $-u(x, t)$ ihr Maximum an, und diese erfüllt ebenfalls die Bedingungen des Satzes.

Wir führen die Bezeichnung

$$M = \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} u(x, t)\,, \qquad \mu = \max_{(x,t)\in\Omega\cup B_T} u(x, t)$$

ein. Offensichtlich gilt $\mu \leqq M$. Der Satz behauptet, daß $\mu = M$ ist. Wir nehmen das Gegenteil an, d. h., es sei $\mu < M$. Dann nimmt die in $\overline{Q}_T$ stetige Funktion $u(x, t)$ ihr Maximum in einem gewissen Punkt (x_0, t_0) an, der entweder in Q_T oder auf Ω_T liegt:

$$u(x_0, t_0) = M\,, \qquad (x_0, t_0) \in Q \cup \Omega_T\,.$$

Für die weitere Beweisführung benötigen wir die Hilfsfunktion

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - \mu}{2\,T}\,(t_0 - t)\,. \tag{2}$$

Wenn $(x, t) \in \Omega \cup B_T$ ist, so gilt $t_0 - t \leqq t_0 \leqq T$ und folglich auch

$$v(x, t)|_{(x,\,t) \in \Omega \cup B_T} < \mu + \frac{M - \mu}{2} = \frac{M + \mu}{2} < M\,.$$

Andererseits gilt

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M\,.$$

Somit existiert außerhalb von $\Omega \cup B_T$ ein Punkt, in dem die Funktion v den Wert M annimmt, währenddessen die Werte von v auf $\Omega \cup B_T$ streng kleiner M sind. Daraus folgt, daß $v(x, t)$ auf $\overline{Q}_T$ das Maximum in einem Punkt annimmt, der entweder zu Ω_T oder zu Q_T gehört. Wir bezeichnen mit (x^0, t^0) den Punkt, in dem die Funktion $v(x, t)$ das Maximum annimmt. Zuerst nehmen wir an, daß $(x^0, t^0) \in Q_T$ ist. Bei beliebiger Wahl der orthogonalen Koordinatenachsen $O\,x_1, O\,x_2, \ldots, O\,x_m$ sind im Punkte (x^0, t^0) die notwendigen Bedingungen für das Maximum erfüllt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} \leqq 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{3}$$

Der Kürze halber bezeichnen wir mit L den Differentialausdruck auf der linken Seite der Wärmeleitungsgleichung (6). Wir bestimmen nun den Wert von $L\,v$ im Punkt (x^0, t^0):

$$L\,v|_{(x^0,\,t^0)} = \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_j}\,\frac{\partial v}{\partial x_k} - A_{jk}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\,\partial x_k}\right]_{(x^0,\,t^0)} = -\,A_{jk}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\,\partial x_k}\bigg|_{(x^0,\,t^0)}.$$

Nunmehr wählen wir die Richtung der Koordinatenachsen $O\,x_k$ derart, daß die Matrix $\|A_{jk}\|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$ im Punkte x^0 die Diagonalform annimmt; dies ist möglich, da die Matrix symmetrisch ist. Sie ist außerdem noch positiv-definit, und folglich haben im oben gewählten Koordinatensystem die Beziehungen

$$A_{jj}(x^0) > 0\,, \qquad A_{jk}(x^0) = 0\,, \qquad j \neq k$$

und

$$L\,v\bigg|_{(x^0,\,t^0)} = -\sum_{j=1}^{m} A_{jj}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\bigg|_{(x^0,\,t^0)} \geqq 0$$

Gültigkeit. Andererseits finden wir

$$L\,v = L\,u + \frac{M-\mu}{2\,T}\,L\,(t_0 - t) = -\frac{M-\mu}{2\,T} < 0\,,$$

und aus dem erhaltenen Widerspruch folgt, daß $(x^0, t^0) \notin Q_T$ ist. Sei jetzt $(x^0, t^0) \in \Omega_T$; dies bedeutet, daß $t^0 = T$, $x^0 \in \Omega$ gilt. Dann ist t^0 Randpunkt des Intervalls $(0, T)$ und x^0 innerer Punkt des Gebietes Ω. Die notwendigen Bedingungen für das Maximum im Punkte (x^0, t^0) haben die Gestalt

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geqq 0\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} \leqq 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Nach wie vor gilt

$$L\,v\Big|_{(x^0,\,t^0)} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{(x^0,\,t^0)} - \left[\sum_{j=1}^{m} A_{jj}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\right]_{(x^0,\,t^0)} \geqq 0\,.$$

Andererseits ist, wie auch oben, $L\,v < 0$. Dieser neue Widerspruch zeigt, daß $(x^0, t^0) \notin Q_T$.

Folglich liegt der Punkt (x^0, t^0), der der Vereinigung $Q_T \cup \Omega_T$ angehören soll, weder in Q_T noch in Ω_T. Aus diesem Widerspruch schließen wir, daß die Annahme $\mu < M$ falsch ist, mithin also $\mu = M$ gilt. Der Satz ist damit bewiesen.

Aus der Beweisführung ergibt sich, daß der Beweis für den Fall des Maximums auch dann seine Gültigkeit behält, wenn die Gleichung $L\,u = 0$ durch die Ungleichung $L\,u \leqq 0$ ersetzt wird. Deshalb gilt das folgende verschärfte Maximumprinzip:

Satz 20.2.2. *Die Funktion $u(x, t)$ gehöre dem Durchschnitt* (1) *an. Wenn $L\,u \leqq 0$ überall in Q ist, so nimmt die Funktion $u(x, t)$ ihr Maximum auf $\Omega \cup B_T$ an. Wenn aber $L\,u \geqq 0$ überall in Q ist, so nimmt die Funktion $u(x, t)$ ihr Minimum auf $\Omega \cup B_T$ an.*

§ 3. Das CAUCHYsche Problem und die gemischte Aufgabe

In § 2, Kap. 10, wurde gezeigt, daß man für die Wärmeleitungsgleichung nur einen der CAUCHYschen Anfangswerte vorzugeben braucht. Das CAUCHYsche Problem für die Wärmeleitungsgleichung (1.5) wird deshalb wie folgt gestellt: Es ist die Lösung dieser Gleichung für beliebige $x \in E_m$ und beliebiges $t > 0$ zu finden, wenn der Wert dieser Lösung für $t = 0$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)\,, \qquad x \in E_m \tag{1}$$

bekannt ist.

Das CAUCHYsche Problem gestattet eine einfache physikalische Interpretation. Nehmen wir an, daß das wärmeleitende Medium (welches im allgemeinen inhomogen und anisotrop ist) den ganzen Raum ausfüllt. Weiter nehmen wir an, daß in diesem Medium Wärmequellen von der Intensität (bei geeigneter Wahl der Maßeinheiten) $f(x, t)$ verteilt sind; die Intensität $f(x, t)$ wird als be-

kannt vorausgesetzt. Schließlich sei zum Zeitpunkt $t = 0$ die Temperatur des Mediums in jedem Punkt bekannt. Das CAUCHYsche Problem besteht darin, die Temperatur in einem beliebigen Punkt des Mediums zu einem beliebigen Zeitpunkt, der auf den Anfangszeitpunkt folgt, zu bestimmen.

Eine wichtige Rolle spielen die sogenannten gemischten Aufgaben, die wie folgt formuliert werden.

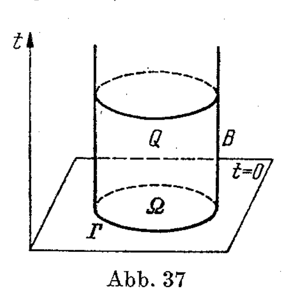


Abb. 37

Es sei Ω ein Gebiet des euklidischen Raumes E_m (Abb. 37), Γ sei sein Rand und B die Zylinderfläche mit der Leitlinie Γ, deren Erzeugenden zur t-Achse parallel sind; genauer gesagt, bezeichnen wir mit B den Teil dieser Fläche, für den $t > 0$ gilt. Die gemischte Aufgabe für die Gleichung (1.5) wird folgendermaßen gestellt: Gesucht ist die Lösung dieser Gleichung, die im halbbeschränkten Gebiet des Raumes der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ mit dem Rand $\Omega \cup B$ definiert ist; für $t = 0$ soll diese Lösung der CAUCHYschen Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = \varphi(x)\,, \qquad x \in \Omega \tag{2}$$

und auf der Zylinderfläche B dieser oder jener Randbedingung genügen.

Verschiedene Arten von Randbedingungen führen zu verschiedenen gemischten Aufgaben.

Von größtem Interesse sind die folgenden drei Typen von Randbedingungen:

1. die Randbedingung der ersten Randwertaufgabe

$$u|_B = \psi(x, t)\,; \tag{3}$$

2. die Randbedingung der zweiten Randwertaufgabe

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_j)\right]_B = \chi(x, t)\,; \tag{4}$$

3. die Randbedingung der dritten Randwertaufgabe

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_j) + \sigma(x, t)\,u\right]_B = \omega(x, t)\,. \tag{5}$$

In den Bedingungen (3) bis (5) sind ψ, χ, ω, σ auf B vorgegebene und etwa stetige Funktionen; n ist die Normale zu Γ im Punkt x.

Die hier aufgeführten gemischten Aufgaben gestatten eine physikalische Interpretation. In allen drei Fällen geht es um ein wärmeleitendes Medium, das im Raum ein Gebiet Ω ausfüllt. In diesem Medium sind Wärmequellen von der gegebenen Intensität $f(x, t)$ verteilt; außerdem ist die Temperatur in jedem Punkt des Mediums zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Ferner wird eine gewisse Information über das Zusammenwirken des wärmeleitenden Mediums mit dem dieses umgebenden Medium als bekannt vorausgesetzt. Dieses Zusammenwirken wird durch die Oberfläche Γ verwirklicht; die Information darüber wird in Gestalt einer Randbedingung formuliert.

Die Bedingung (3) bedeutet, daß die Temperatur in jedem Punkt des Randes Γ zu jedem beliebigen Zeitpunkt bekannt ist, der auf den Anfangszeitpunkt folgt. Eine solche Information kann man im Prinzip dann erhalten, wenn der Rand des wärmeleitenden Mediums für Beobachtungen zugängig ist.

Die linke Seite der Gleichung (4) ist der Intensität des Wärmeflusses durch eine kleine Umgebung des Punktes $x \in \Gamma$ zum Zeitpunkt t proportional. Somit bedeutet die Bedingung der zweiten Randwertaufgabe, daß in jedem Zeitpunkt, der auf den Anfangszeitpunkt folgt, der Wärmefluß durch den Rand des wärmeleitenden Mediums bekannt ist.

In der Bedingung (5) der dritten Randwertaufgabe ist die Funktion $\omega(x, t)$ der Temperatur des umgebenden Mediums im Punkt x zum Zeitpunkt t proportional; diese Bedingung beschreibt den Prozeß des Wärmeaustausches mit dem umgebenden Medium unter der Voraussetzung, daß die Temperatur des umgebenden Mediums bekannt ist.

Die physikalische Seite der Aufgaben, die mit der Wärmeleitungsgleichung in Zusammenhang stehen, ist ausführlicher in [8] beleuchtet.

Im weiteren werden wir nur eine der gemischten Aufgaben betrachten, und zwar die erste [Randbedingung (3)].

§ 4. Eindeutigkeitssätze

Satz 20.4.1. *Die gemischte Aufgabe für die Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t) \tag{1}$$

hat unter den Anfangs- und Randbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi(x)\,, \qquad x \in \Omega; \qquad u|_B = \psi(x, t) \tag{2}$$

in der Klasse

$$C(\bar{\Omega}\times[0, \infty)) \cap C^{(2,1)}(\Omega\times(0, \infty)) \tag{3}$$

höchstens eine Lösung.

Beweis. Wir nehmen an, daß zwei Lösungen der Aufgabe (1), (2) existieren. Die Differenz $w(x, t)$ dieser Lösungen genügt der homogenen Wärmeleitungsgleichung (1.6) und gehört der Klasse (3) an. Nach dem Maximumprinzip nimmt die Funktion $w(x, t)$ sowohl ihren größten als auch ihren kleinsten Wert entweder in Ω oder auf der Zylinderfläche B an. Die Funktion w genügt aber noch den homogenen Anfangs- und Randbedingungen.

$$w|_{t=0} = 0\,, \qquad x \in \Omega; \qquad w|_B = 0\,.$$

Daraus folgt, daß sowohl der größte als auch der kleinste Wert der Funktion $w(x, t)$ gleich Null ist. Somit gilt in diesem Falle $w(x, t) \equiv 0$, und beide Lösungen der Aufgabe (1), (2) stimmen überein. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems untersuchen wir für den einfachsten Fall, wo $A_{jk} = \delta_{jk}$ ist, so daß der elliptische Ausdruck, der in die Wärmeleitungsgleichung eingeht, in den Laplace-Operator übergeht.

Satz 20.4.2. *Die Gleichung*

$$L\,u = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \tag{4}$$

besitzt in der Klasse

$$C\left(E_m \times [0, \infty)\right) \cap C^{(2,1)}\left(E_m \times (0, \infty)\right) \tag{5}$$

höchstens eine beschränkte Lösung, die der Cauchy-*Bedingung*

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

mit der gegebenen Funktion $\varphi(x)$ genügt.

Beweis. Wenn zwei derartige Lösungen existieren, so genügt ihre Differenz $\omega(x, t)$ dem homogenen Cauchyschen Problem

$$L\,w = \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0\,, \tag{6}$$

$$w|_{t=0} = 0 \tag{7}$$

und gehört der Klasse (5) an. Sie ist beschränkt als Differenz zweier beschränkter Funktionen; möge $|w(x, t)| \leq M$ sein. In der Ebene $t = 0$ (d. h. im euklidischen Raum E_m) betrachten wir die Kugel D_R mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung; die Kugeloberfläche dieser Kugel bezeichnen wir mit S_R. Nunmehr konstruieren wir die Zylinderfläche mit der Leitlinie S_R, deren Erzeugenden zur t-Achse parallel sind; den Teil der Zylinderfläche, auf dem $t > 0$ gilt, bezeichnen wir mit B. Das Gebiet des Raumes $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ mit dem Rand $D_R \cup B$ bezeichnen wir mit Q [1]).

In unsere Betrachtungen führen wir die Hilfsfunktion

$$v_R(x, t) = \frac{2\,M\,m}{R^2}\left(\frac{x^2}{2\,m} + t\right), \qquad x^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \tag{8}$$

ein. Man überzeugt sich leicht davon, daß die Funktion v_R der homogenen Wärmeleitungsgleichung genügt. Weiter gilt

$$v_R|_{t=0} = \frac{2\,M\,x^2}{R^2} \geqq 0\,;$$

aus der Gleichung (7) folgt

$$v_R|_{t=0} \geqq |w|\,|_{t=0}\,.$$

Schließlich hat noch die Beziehung

$$v_R|_B = v_R|_{x^2=R^2} \geqq M \geqq |w|\,|_B$$

Gültigkeit. Die letzten beiden Beziehungen bedeuten, daß

$$v_R|_{D_R \cup B} \geqq |w|\,|_{D_R \cup B}$$

gilt; folglich ist jede der Größen $v_R + w$ und $v_R - w$ auf $D_R \cup B$ nicht negativ. Außerdem erfüllt jede dieser Größen die Gleichung (6). Nach dem Maximum-

[1]) Die hier beschriebene Konstruktion entspricht der Abb. 37 (S. 350) für $\Omega = D_R$.

prinzip nimmt dann sowohl die Summe $v_R + w$ als auch die Differenz $v_R - w$ im abgeschlossenen Gebiet $\overline{Q}_T$, in dem $x \in \overline{\Omega}$, $0 \leqq t \leqq T$, $T = \text{const}$ ist (Abb. 36), ihr Minimum auf $D_R \cup B$ an; außerdem sind diese Minima nicht negativ.

Daraus folgt die Gültigkeit von

$$v_R + w \geqq 0\,, \quad v_R - w \geqq 0\,, \quad x^2 \leqq R^2\,, \quad t \geqq 0\,.$$

Somit wird für $x^2 \leqq R^2$, $t \geqq 0$ die Ungleichung $-v_R \leqq w \leqq v_R$ oder, was dasselbe ist, die Ungleichung

$$|w(x, t)| \leqq \frac{2\,M\,m}{R^2}\left(\frac{x^2}{2\,m} + t\right)$$

erfüllt.

Wir fixieren beliebig x und t, weiterhin strebe $R \to \infty$. Aus der letzten Ungleichung folgt dann die Beziehung $|w(x, t)| \leqq 0$, d. h. $w(x, t) = 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 5. Abstrakte Funktionen einer reellen Veränderlichen

Wir sagen, daß auf einer Menge E der Zahlengeraden eine *abstrakte Funktion* $u(t)$ mit Werten im Raume X definiert ist, wenn jeder Zahl $t \in E$ nach einer gewissen Vorschrift ein und nur ein Element $u(t) \in X$ zugeordnet wird. Im folgenden werden wir voraussetzen, daß der Raum X ein BANACH-Raum ist.

Im BANACH-Raum existieren zwei Arten von Konvergenz: die starke oder Normkonvergenz und die schwache Konvergenz. Dementsprechend kann man für abstrakte Funktionen einer reellen Veränderlichen den Begriff der starken und schwachen Stetigkeit, der starken und schwachen Ableitung usw. einführen. Unter Berücksichtigung der späteren Anwendungen beschränken wir uns auf die Betrachtung der starken Stetigkeit und der starken Ableitung; das Wort „starke“ werden wir im folgenden weglassen.

Eine abstrakte Funktion $u(t)$ ist im Punkt $t = t_0$ stetig, wenn

$$\lim_{t \to t_0} ||u(t) - u(t_0)||_X = 0$$

ist; sie ist stetig auf einer gewissen Menge von Werten t, wenn sie in jedem Punkt dieser Menge stetig ist.

Eine abstrakte Funktion $u(t)$ besitzt im Punkt t die Ableitung $u'(t)$, wenn

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u\,(t + h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\|_X = 0$$

ist. Eine Funktion, die in einem gewissen Punkt eine Ableitung besitzt, heißt, wie üblich, differenzierbar in diesem Punkt. Es ist offensichtlich, daß eine in einem gewissen Punkt differenzierbare Funktion in diesem Punkt stetig ist. Auf natürliche Weise werden auch die höheren Ableitungen einer abstrakten Funktion definiert.

Im weiteren spielt die Formel der Differentiation des Skalarproduktes eine wichtige Rolle: Wenn $u(t)$ und $v(t)$ abstrakte Funktionen mit Werten im HILBERT-Raum sind und wenn diese Funktionen im Punkt t differenzierbar sind, so gilt

$$\frac{d}{dt}\big(u(t), v(t)\big) = \big(u'(t), v(t)\big) + \big(u(t), v'(t)\big) . \tag{1}$$

In der Tat, wir erhalten

$$\frac{d}{dt}\big(u(t), v(t)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\big(u(t+h), v(t+h)\big) - \big(u(t), v(t)\big)\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}, v(t+h)\right) + \left(u(t), \frac{v(t+h)-v(t)}{h}\right)\right];$$

wenn wir zum Grenzwert unter dem Zeichen des Skalarproduktes übergehen, so finden wir die Formel (1).

Auf natürliche Weise wird auch der Begriff des Integrals einer abstrakten Funktion eingeführt.

Weiter unten werden wir uns folgender Bezeichnungen bedienen. Wir betrachten abstrakte Funktionen, deren Werte einer gewissen Klasse von Objekten $\mathfrak{K}$ angehören, und diese Funktionen mögen auf der Menge E von Werten der Veränderlichen t stetig sein. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir mit $C(E; \mathfrak{K})$. Wenn die genannten Funktionen auf E $k$mal stetig differenzierbar sind, so werden wir die Menge dieser Funktionen mit $C^{(k)}(E, \mathfrak{K})$ bezeichnen.

§ 6. Die verallgemeinerte Lösung der gemischten Aufgabe

Wir betrachten die gemischte Aufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t), \qquad x \in \Omega , \qquad t > 0 \tag{1}$$

mit der homogenen Randbedingung

$$u|_B = 0 \tag{2}$$

und der im allgemeinen inhomogenen Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = \varphi(x) , \qquad x \in \Omega . \tag{3}$$

Das Gebiet Ω werden wir als endlich, seinen Rand Γ als stückweise glatt voraussetzen.

Wir nehmen an, daß die gesuchte Lösung $u(x, t)$ der Klasse $C\big(\bar{\Omega}\times[0, \infty)\big) \cap$ $\cap\, C^{(2,1)}\big(\bar{\Omega}\times(0, \infty)\big)$ angehört. Bei festem $t \geqq 0$ bedeutet die Bedingung (2), daß

$$u|_\Gamma = 0 \tag{4}$$

gilt, und man kann $u(x, t)$ bei festem t als Element des Definitionsbereiches $D(\mathfrak{A})$ des Operators $\mathfrak{A}$ des DIRICHLETschen Problems für den elliptischen Differentialausdruck

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \qquad x \in \Omega$$

auffassen. Um so mehr kann man es als Element des entsprechenden energetischen Raumes $H_{\mathfrak{A}}$ auffassen.

Die oben gestellte gemischte Aufgabe kann man auch anders formulieren, wenn man den Begriff der abstrakten Funktion benutzt. Die Funktion $f(x, t)$ betrachten wir als abstrakte Funktion $f(t)$ mit Werten in $L_2(\Omega)$, die Funktion $\varphi(x)$ als Element des Raumes $L_2(\Omega)$. Die gesuchte Funktion $u(x, t)$ fassen wir schließlich als abstrakte Funktion $u(t)$ mit Werten in $D(\mathfrak{A})$ auf; die Werte dieser Funktion sind folglich gleichzeitig Elemente der beiden Räume $L_2(\Omega)$ und $H_{\mathfrak{A}}$. Die Aufgabe (1)—(3) ist damit auf folgendes abstrakte CAUCHYsche Problem zurückgeführt worden:

Es ist die abstrakte gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{du}{dt} + \mathfrak{A}\, u = f(t)\,, \qquad t > 0 \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = \varphi \tag{6}$$

zu integrieren.

Nehmen wir an, daß die Gleichung (5), (6) eine Lösung besitzt. Wir wählen eine beliebige abstrakte Funktion $\eta(t)$ mit Werten in $H_{\mathfrak{A}}$ und multiplizieren beide Seiten der Gleichung (5) skalar (im Sinne der Metrik von $L_2(\Omega)$ mit $\eta(t)$. Unter Benutzung der Definition des energetischen Produkts erhalten wir

$$\left(\frac{du}{dt}, \eta\right) + [u, \eta] = (f, \eta)\ ; \tag{7}$$

das Symbol $\mathfrak{A}$ an dem energetischen Produkt oder an der Norm lassen wir hier und im folgenden weg.

Wenn umgekehrt $u \in C^{(1)}\big((0, \infty); D(\mathfrak{A})\big)$ gilt und diese Funktion die Gleichung (7) erfüllt, so genügt sie auch der Gleichung (5). In der Tat, wenn $u \in D(\mathfrak{A})$ ist, so gilt $[u, \eta] = (\mathfrak{A}\, u, \eta)$, und der Gleichung (7) kann man die Gestalt

$$\left(\frac{du}{dt} + \mathfrak{A}\, u - f, \eta\right) = 0\,, \qquad \forall\, \eta \in H_{\mathfrak{A}}$$

geben. Weil die Elemente des Raumes $H_{\mathfrak{A}}$ eine in $L_2(\Omega)$ dichte Menge bilden, finden wir

$$\frac{du}{dt} + \mathfrak{A}\, u - f = 0\,.$$

Die abstrakte Funktion $u(t)$ werden wir *verallgemeinerte Lösung der gemischten Aufgabe* (1)—(3) nennen, wenn sie folgende Forderungen erfüllt:

1. $u(t)$ gehört den Klassen $C\big([0, \infty); L_2(\Omega)\big)$, $C\big([0, \infty); H_{\mathfrak{A}}\big)$ und $C^{(1)}\big((0, \infty); L_2(\Omega)\big)$ gleichzeitig an, d. h., diese Funktion ist für $t \geqq 0$ stetig und für $t > 0$ stetig differenzierbar als abstrakte Funktion mit Werten in $L_2(\Omega)$; gleichzeitig ist sie für $t > 0$ stetig als abstrakte Funktion mit Werten in $H_{\mathfrak{A}}$;

2. $u(t)$ genügt der Gleichung (7) für beliebiges $t > 0$ und für eine beliebige abstrakte Funktion $\eta(t)$ mit Werten in $H_{\mathfrak{A}}$;

3. $u(t)$ genügt der Anfangsbedingung (6).

Die letzte Forderung ist in folgendem Sinne zu verstehen:

$$\lim_{t\to 0} \left\| u(t) - \varphi \right\|_{L_2(\Omega)} = 0 .$$

Aus dem oben Bewiesenen folgt, daß die verallgemeinerte Lösung $u(t)$ auch gewöhnliche Lösung ist, wenn für beliebiges $t > 0$ die Funktion $u(t)$ Element von $D(\mathfrak{A})$ ist und wenn $u(x, t) \underset{t\to 0}{\to} \varphi(x)$ nicht nur in der Metrik von $L_2(\Omega)$, sondern auch noch gleichmäßig konvergiert.

Satz 20.6.1. *Die verallgemeinerte Lösung der gemischten Aufgabe für die Wärmeleitungsgleichung ist eindeutig.*

Beweis. Es mögen zwei Funktionen existieren, die der Gleichung (7) und der Anfangsbedingung (6) genügen. Ihre Differenz, die wir mit $w(t)$ bezeichnen, genügt der Gleichung

$$\left(\frac{dw}{dt}, \eta\right) + [w, \eta] = 0 \tag{8}$$

und der Anfangsbedingung

$$w|_{t=0} = 0 . \tag{9}$$

Nachdem wir in der Gleichung (8) $\eta = w$ gesetzt haben, erhalten wir unter Benutzung der Formel (5.1) die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + 2 \,|w|^2 = 0 .$$

Daraus ist ersichtlich, daß $\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 \leqq 0$ ist; folglich nimmt die reelle Funktion $\|w(t)\|^2$ bei wachsendem t nicht zu. Aber nach der Beziehung (9) finden wir $\|w(0)\|^2 = 0$. Daraus ergibt sich $\|w(t)\|^2 = 0$ für $t > 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

KAPITEL 21

DIE WELLENGLEICHUNG

§ 1. Der Begriff der Wellengleichung

Wellengleichung nennt man eine Gleichung zweiter Ordnung der Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_{jk}(x, t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} + A_k(x, t)\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x, t)\,u = f(x, t)\,, \tag{1}$$

für die die Matrix der Koeffizienten A_{jk} positiv-definit ist. Die Koeffizientenmatrix des Hauptteils der Gleichung (1) hat die Gestalt

$$\left\|\begin{matrix} -A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1m} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & \dots & -A_{2m} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_{m1} & -A_{m2} & \dots & -A_{mm} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix}\right\|. \tag{2}$$

Einer der Eigenwerte der Matrix (2) ist gleich 1, die anderen stimmen mit den Eigenwerten der Matrix $-\,\|A_{jk}\|$ überein und sind folglich negativ. Daraus folgt, daß die Wellengleichung zum Typ $(m, 1, 0)$, d. h. zum hyperbolischen Typ gehört.

Die Charakteristikengleichung der Wellengleichung hat die Gestalt

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - A_{jk}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_k} = 0\,. \tag{3}$$

Gleichung (1) besitzt wie jede andere hyperbolische Gleichung auch reelle Charakteristiken. Wie man leicht nachweisen kann, genügt die Funktion $\omega(x, t) \equiv t$ nicht der Gleichung (3). Deshalb sind die Ebenen $t = \text{const}$ keine charakteristischen Flächen der Wellengleichung, und man kann folglich für $t = \text{const}$ beide CAUCHYschen Anfangswerte vorgeben.

Wir betrachten weiter unten die etwas speziellere Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t)\,. \tag{4}$$

Physikalisch gesehen beschreibt die Gleichung (4) kleine Schwingungen eines Mediums unter Einwirkung stetig verteilter Quellen, deren Intensität der Größe $f(x, t)$ proportional ist. Im allgemeinen Fall ist das schwingende Medium inhomogen und anisotrop, und seine physikalischen Eigenschaften ändern sich mit

der Zeit. Wenn die Eigenschaften des Mediums in der Zeit unveränderlich sind, dann hängen die Koeffizienten A_{jk} nicht von t ab. *Im weiteren werden wir nur diesen Fall betrachten.* Wenn das Medium homogen ist, so gilt $A_{jk} = \text{const}$. In diesem Fall kann man die Matrix $\|A_{jk}\|$ durch eine geeignete affine Koordinatentransformation in die Einheitsmatrix überführen. Wir erhalten dann die einfachste Gestalt einer Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t) . \tag{5}$$

Für physikalische Anwendungen ist die etwas kompliziertere Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t) , \quad a^2 = \text{const} , \tag{6}$$

von großem Interesse.

Wir weisen darauf hin, daß die Gleichung (6) die Gestalt (5) annimmt, wenn man die Zeiteinheit ändert, d. h., wenn man die Transformation $t' = a\,t$ vornimmt.

Wie bereits bemerkt, nehmen wir an, daß in Gleichung (4) die Koeffizienten A_{jk} nicht von der Zeit abhängen. Außerdem setzen wir voraus, daß diese Koeffizienten stetig differenzierbar sind und die Matrix $\|A_{jk}\|$ nicht entartet.

§ 2. Die gemischte Aufgabe und ihre verallgemeinerte Lösung

Die Problemstellung der gemischten Aufgabe für die Wellengleichung ist mit der der gemischten Aufgabe für die Wärmeleitungsgleichung eng verwandt.

Wir formulieren diese Aufgabe ausführlicher. In der Ebene $t = 0$ (d. h. im Raume E_m) ist ein endliches Gebiet Ω mit dem stückweise glatten Rand Γ gegeben. Im Gebiet Q der Abb. 37 (Seite 350) ist die Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t) \tag{1}$$

zu ermitteln, die den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x) \,, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{2}$$

und einer der unten aufgezählten Randbedingungen genügt:

$$u|_B = \psi(x, t) \tag{3}$$

(erste Aufgabe);

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_j)\right]_B = \chi(x, t) \tag{4}$$

(zweite Aufgabe);

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_j) + \sigma(x, t)\, u\right]_B = \omega(x, t) \tag{5}$$

(dritte Aufgabe). Es sind natürlich auch andere Arten von Randbedingungen möglich.

Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall der ersten Aufgabe mit der homogenen Randbedingung

$$u|_B = 0 \,. \tag{6}$$

Wie für die Wärmeleitungsgleichung kann man die gemischte Aufgabe für die Wellengleichung ebenfalls in Operatorform formulieren. Vorläufig nehmen wir an, daß die Lösung $u(x, t)$ der gemischten Aufgabe der Klasse

$$C\left(\overline{\Omega} \times [0, \infty)\right) \cap C^{(2,2)}\left(\overline{\Omega} \times (0, \infty)\right)$$

angehört. Dann kann man diese Lösung als abstrakte Funktion $u(t)$ mit Werten in $D(\mathfrak{A})$ auffassen, wobei $\mathfrak{A}$ der Operator des Dirichletschen Problems ist; diese Funktion hat zwei stetige Ableitungen im Intervall $(0, \infty)$. Die Funktion $f(x, t)$ betrachten wir als abstrakte Funktion mit Werten in $L_2(\Omega)$. Schließlich nehmen wir an, daß die Funktion $\varphi_0(x)$ ein Element φ_0 des energetischen Raumes $H_{\mathfrak{A}}$ und die Funktion $\varphi_1(x)$ ein Element φ_1 des Raumes $L_2(\Omega)$ ist. Jetzt kann man die gemischte Aufgabe für die Gleichung (1) mit den Anfangsbedingungen (2) und der Randbedingung (6) als Cauchysches Problem für die abstrakte gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \mathfrak{A}\, u = f(t) \tag{7}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = \varphi_0 \,, \qquad u'(0) = \varphi_1 \tag{8}$$

auffassen.

Es sei $\eta(t)$ eine beliebige Funktion, die dem Durchschnitt

$$K = C\big((0, \infty);\; H_{\mathfrak{A}}\big) \cap C^{(1)}\big((0, \infty);\; L_2(\Omega)\big) \tag{9}$$

angehört. Beide Seiten der Gleichung (7) multiplizieren wir skalar (in der Metrik von $L_2(\Omega)$) mit der Funktion $\eta(t)$

$$\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \eta(t)\right) + \big(\mathfrak{A}u(t), \eta(t)\big) = \big(f(t), \eta(t)\big)$$

und erhalten dann[1])

$$\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \eta(t)\right) + [u(t), \eta(t)] = \big(f(t), \eta(t)\big)\,, \qquad \eta \in K\,. \tag{10}$$

Die Identität (10) könnte für die Definition der verallgemeinerten Lösung benutzt werden. Dies ist jedoch nicht zweckmäßig, da eine solche verallgemeinerte Lösung eine zweite Ableitung nach t besitzen müßte. Deshalb verfahren wir folgendermaßen. Wir wählen einen beliebigen Zeitpunkt $T > 0$ und fordern, daß $\eta(T) = 0$ ist. Nunmehr integrieren wir beide Seiten der

[1]) Das Symbol $\mathfrak{A}$ an dem energetischen Produkt oder an der Norm lassen wir hier und im folgenden weg.

Beziehung (10) nach t über das Intervall $(0, T)$. Nach der Formel (5.1) von Kap. 20 gilt die Beziehung

$$\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \eta(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{du(t)}{dt}, \eta(t)\right) - \left(\frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right).$$

Unter Benutzung der Gleichungen $\eta(T) = 0$ und $u'(0) = \varphi_1$ finden wir

$$-\int_0^T \left(\frac{du(t)}{dt} \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt - (\varphi_1, \eta(0)) = \int_0^T (f(t), \eta(t))\, dt\,, \quad \eta \in K_T\,. \tag{11}$$

Mit K_T bezeichnen wir hier die Klasse der Funktionen $\eta(t) \in K$ mit $\eta(T) = 0$. Beziehung (11) benutzen wir nun, um den Begriff der verallgemeinerten Lösung einzuführen.

Wir nennen die abstrakte Funktion $u(t)$ *verallgemeinerte Lösung* der gemischten Aufgabe (1), (2), (6), wenn gilt:

1. $u \in K$;
2. $u(0) = \varphi_0$, wobei diese Gleichheit in folgendem Sinne zu verstehen ist:

$$\lim_{t\to 0} |u(t) - \varphi_0| = 0;$$

3. $u(t)$ genügt der Beziehung (11), in der $\eta(t)$ eine beliebige Funktion der Klasse K_T ist.

Man überzeugt sich leicht davon, daß eine dem Durchschnitt

$$C^{(1)}([0, \infty); D(\mathfrak{A})) \cap C^{(2)}((0, \infty); D(\mathfrak{A}))$$

angehörende verallgemeinerte Lösung auch eine gewöhnliche Lösung der gemischten Aufgabe für die Wellengleichung ist.

Satz 21.2.1. *Die gemischte Aufgabe für die Wellengleichung hat höchstens eine verallgemeinerte Lösung.*

Beweis. Die Differenz $w(t)$ zweier verallgemeinerter Lösungen ein und derselben gemischten Aufgabe für die Wellengleichung (1) ist ein Element der Klasse K, das der Beziehung

$$-\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt + \int_0^T [w(t), \eta(t)]\, dt = 0\,, \quad \forall \eta \in K_T \tag{12}$$

und der Anfangsbedingung

$$w(0) = 0 \tag{13}$$

genügt. In der Beziehung (12) setzen wir

$$\eta(t) = \int_t^T w(\tau)\, d\tau\,. \tag{14}$$

Dies ist möglich, weil dabei offensichtlich $\eta \in K_T$ gilt. Aus Formel (14) folgt $w(t) = -\dfrac{d\eta(t)}{dt}$, und wir erhalten

$$\int_0^T \left(\frac{d^2\eta(t)}{dt^2}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt - \int_0^T \left[\frac{d\eta(t)}{dt}, \eta(t)\right] dt = 0. \tag{15}$$

Weiter ergibt sich

$$\left(\frac{d^2\eta(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\eta(t)}{dt}\right\|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\,||w(t)||^2\,,$$

$$\left[\frac{d\eta(t)}{dt}, \eta(t)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}[\eta(t)\,,\,\eta(t)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left|\eta(t)\right|^2.$$

Wenn wir diese Ausdrücke in (15) einsetzen, so finden wir

$$||w(T)||^2 - ||w(0)||^2 - |\eta(T)|^2 + |\eta(0)|^2 = 0\,.$$

Aus $w(0) = 0$, $\eta(T) = 0$ folgt dann die Gültigkeit der Beziehung

$$||w(T)||^2 + |\eta(0)|^2 = 0\,.$$

Somit gilt $w(T) = 0$. Da T beliebig gewählt worden war, ist die Behauptung bewiesen.

§ 3. Die Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten. Das Cauchysche Problem. Der charakteristische Kegel

Im vorliegenden Kapitel betrachten wir im weiteren die Wellengleichung in ihrer einfachsten Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t)\,. \tag{1}$$

Wie wir im Paragraphen 1 gefunden haben, ist die Fläche $t = 0$ für die Gleichung (1) keine charakteristische Fläche. Das Cauchysche Problem für diese Gleichung wird wie folgt gestellt: Für beliebiges $x \in E_m$ und beliebiges $t > 0$ ist die Lösung der Gleichung (1) zu ermitteln, die den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x)\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{2}$$

genügt.

Ein wichtiges Instrument für die Untersuchung und die Lösung des Cauchyschen Problems für die Wellengleichung ist der sogenannte *charakteristische Kegel.*

Wir nehmen einen gewissen Punkt (x_0, t_0) und betrachten die durch die Gleichung

$$t_0 - t = r\,, \qquad r = |x - x_0| \tag{3}$$

definierte Fläche. Es ist der untere Mantel des Doppelkegels mit der Spitze im Punkte (x_0, t_0), dessen Achse zur t-Achse parallel ist. Man erkennt leicht, daß die Fläche (3) eine charakteristische Fläche für die Wellengleichung (1) ist. In der Tat, wenn wir $\omega(x, t) = t_0 - t - r$ setzen, so können wir die Gleichung (3) in der Gestalt $\omega(x, t) = 0$ schreiben. Die Charakteristikengleichung für die Gleichung (1) hat die Gestalt

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = 0\,. \tag{4}$$

Im gegebenen Falle erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -1 \, , \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = - \frac{\partial r}{\partial x_k} = - \frac{x_k - x_{k0}}{r} \, ,$$

wobei x_{k0} die k-te Koordinate des Punktes x_0 ist. Nunmehr ergibt sich offenbar

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 = 1 - \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k0})^2 = 0 \, .$$

Der Kegel (3) heißt *charakteristischer Kegel* der Wellengleichung.

Wir ermitteln jetzt die Richtung der äußeren Normalen n des charakteristischen Kegels (Abb. 38). Die äußere Normale bildet mit der t-Achse einen spitzen Winkel, und der Kosinus dieses Winkels ist positiv. Eine bekannte Formel aus der Differentialgeometrie liefert

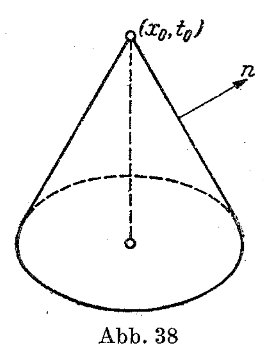


Abb. 38

$$\cos (n, t) = - \frac{\frac{\partial \omega}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \, . \qquad (5)$$

Daraus folgt noch eine weitere Beziehung:

$$\sum_{k=1}^{m} \cos^2 (n, x_k) = 1 - \cos^2 (n, t) = \frac{1}{2} \, . \qquad (6)$$

§ 4. Der Eindeutigkeitssatz für das Cauchysche Problem. Das Abhängigkeitsgebiet.

Satz 21.4.1. *In einer gewissen abgeschlossenen Kugel* $|x - x_0|^2 \leqq t_0^2$ *des Raumes* E_m *mögen die Anfangswerte zweier* Cauchy*scher Probleme für die Wellengleichung* (3.1) *zusammenfallen. Wenn beide Probleme Lösungen besitzen, die zusammen mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sind, dann stimmen diese Lösungen für* $t > 0$ *im Inneren und auf dem Rand des charakteristischen Kegels mit der Spitze in* (x_0, t_0) *überein.*

Beweis. Die Differenz $w(x, t)$ der Lösungen der beiden im Satz erwähnten Cauchyschen Probleme genügt der homogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0 \qquad (1)$$

sowie Anfangsbedingungen der Gestalt

$$w|_{t=0} = 0 \, , \qquad \left.\frac{\partial \omega}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \, , \qquad |x - x_0| \leqq t_0 \, . \qquad (2)$$

Die Werte von $w|_{t=0}$ und $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}$ außerhalb der Kugel $|x - x_0|^2 \leqq t_0^2$ sind für die weiteren Überlegungen nicht von Interesse.

Wir betrachten das Gebiet D des Raumes $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, das durch die Ebene $t = 0$ und den charakteristischen Kegel $t_0 - t = |x - x_0|$ begrenzt wird (Abb. 39). Innerhalb oder auf dem Rand dieses Gebietes fixieren wir einen beliebigen Punkt $(\tilde{x}, \tilde{t})$ und konstruieren einen neuen charakteristischen Kegel $\tilde{t} - t = |\tilde{x} - x|$. Mit $\tilde{D}$ bezeichnen wir das durch die Ebene $t = 0$ und den neuen Kegel begrenzte Gebiet. Der Wichtigkeit halber sei bemerkt, daß das Gebiet $\tilde{D}$ in der Ebene $t = 0$ durch die Kugel $|x - \tilde{x}|^2 \leqq \tilde{t}^2$ begrenzt wird, die ein Teil der ursprünglichen Kugel $|x - x_0|^2 \leqq t_0^2$ ist. Daraus folgt für die neue Kugel die Gültigkeit der Beziehungen (2).

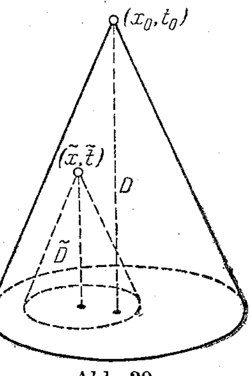


Abb. 39

Beide Seiten der Gleichung (1) multiplizieren wir mit $\frac{\partial w}{\partial t}$ und integrieren das Ergebnis über das Gebiet $\tilde{D}$. Unter Benutzung der offensichtlichen Identitäten

$$\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2$$

sowie des GAUSSschen Integralsatzes erhalten wir

$$\int\limits_{\tilde{D}} \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w\right) dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{S\cup K}\left\{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2\right]\cos(n, t) - \right.$$
$$\left. - 2\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(n, x_k)\right\} dS = 0\,. \tag{3}$$

Mit S bezeichnen wir hier die Kugel $|x - \tilde{x}| \leqq \tilde{t}$, mit K den charakteristischen Kegel $\tilde{t} - t = |x - \tilde{x}|$ und mit dS das Flächenelement auf dem Rand $S \cup K$ des Gebietes $\tilde{D}$. Infolge der Bedingungen (2) sind in der Kugel S die Gleichungen $\frac{\partial w}{\partial t} \equiv 0$ und $w \equiv 0$ erfüllt. Wird die letzte Gleichung nach x_k differenziert, so erhält man außerdem noch $\frac{\partial w}{\partial x_k} \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Im mittleren Glied der Gleichung (3) verschwindet das Integral über S, und es ergibt sich die einfachere Gleichung

$$\int\limits_K \left\{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2\right]\cos(n, t) - 2\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(n, x_k)\right\} dS = 0\,.$$

Wir mutliplizieren nun beide Seiten der letzten Gleichung mit der Konstanten $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(n, t)$ und schreiben diese unter das Integralzeichen. Unter Benutzung der Beziehung (3.6) finden wir

$$\int\limits_K \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial w}{\partial t}\cos(n, x_k) - \frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(n, t)\right]^2 dS = 0\,.$$

Hieraus folgt die Gültigkeit von

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cos(n, x_k) - \frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(n, t) \equiv 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

auf dem Kegel K; somit gilt

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} : \cos(n, x_1) = \cdots = \frac{\partial w}{\partial x_m} : \cos(n, x_m) = \frac{\partial w}{\partial t} : \cos(n, t)\,.$$

Diese Gleichungen bedeuten, daß auf dem Kegel K der Vektor grad w zur Normalen parallel ist.

Es sei (x, t) ein beliebiger Punkt auf dem Kegel K und l eine Erzeugende, die durch (x, t) hindurchgeht. Offensichtlich steht der Vektor grad w senkrecht auf l. In diesem Falle gilt

$$\frac{\partial w}{\partial l} = \mathrm{Pr}_l \operatorname{grad} w = 0\,.$$

Folglich ist $w = \text{const}$ längs jeder beliebigen Erzeugenden des Kegels K. Insbesondere fällt der Wert von w in der Spitze $(\tilde{x}, \tilde{t})$ mit dem Wert von w in dem Punkt der Erzeugenden zusammen, der in der Ebene $t = 0$ liegt. Nach den Bedingungen (2) ist in diesem Punkt $w = 0$. Daraus folgt $w(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0$. Da der Punkt $(\tilde{x}, \tilde{t})$ in $\overline{D}$ beliebig gewählt worden war, ergibt sich $w(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \overline{D}$. Somit ist der Satz bewiesen.

Der Satz 21.4.1 bleibt auch dann richtig, wenn zwei Wellengleichungen der Gestalt (1) betrachtet werden, deren rechte Seiten im Gebiet D übereinstimmen.

Es sei $u(x, t)$ die Lösung des Cauchyschen Problems für die Gleichung (1); die rechte Seite $f(x, t)$ dieser Gleichung sei fest. Wie aus dem Satz des vorliegenden Paragraphen hervorgeht, wird der Wert der Funktion u in einem beliebigen Punkt (x_0, t_0) allein durch die Werte der Anfangsfunktionen in der Kugel $|x - x_0| \leqq t_0$ bestimmt. Diese Kugel wird das *Abhängigkeitsgebiet* für den Punkt (x_0, t_0) genannt.

Wenn man statt der Gleichung (1) die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

betrachtet, dann ist die Kugel $|x - x_0| \leqq a\, t_0$ das Abhängigkeitsgebiet für den Punkt (x_0, t_0).

§ 5. Die Erscheinung der Wellenausbreitung

Aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Eindeutigkeitssatz ergeben sich einige Folgerungen physikalischen Charakters, die wir hier kurz streifen wollen.

Wir betrachten die homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0\,, \qquad a = \text{const}\,, \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x)\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)\,, \qquad x \in E_m\,. \tag{2}$$

Wir nehmen an, daß die Anfangswerte $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ außerhalb eines gewissen endlichen Gebietes $D \subset E_m$ verschwinden (Abb. 40); im Inneren dieses Gebietes werden die Anfangswerte im allgemeinen als von Null verschieden vorausgesetzt. Weiter nehmen wir an, daß das hier gestellte CAUCHYsche Problem lösbar ist. Wir fixieren einen beliebigen Punkt $x_0 \in E_m$, der außerhalb des Gebietes D liegt. Im Anfangsmoment ist, wie aus den Anfangsbedingungen ersichtlich, der Wert von u im Punkt x_0 gleich Null; in diesem Moment befindet sich der Punkt x_0 im Ruhezustand. Nun betrachten wir einen zum Anfangsmoment genügend nahen Zeitpunkt t_0, und zwar sei

$$t_0 < \frac{\delta}{a}\,,$$

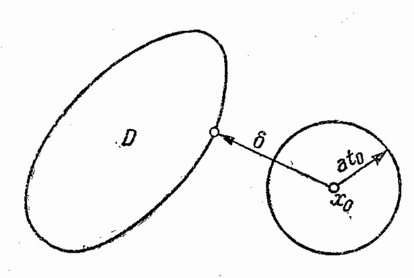


Abb. 40

wobei δ die kürzeste Entfernung des Punktes x_0 zum Rand des Gebietes D ist. Das Abhängigkeitsgebiet für den Punkt x_0 zum Zeitpunkt t_0 — die Kugel vom Radius $a\,t_0$ mit dem Mittelpunkt in x_0 — und das Gebiet D sind durchschnittsfremd. In diesem Falle verschwinden also die Anfangswerte im Abhängigkeitsgebiet des Punktes x_0. Nach dem Satz des vorigen Paragraphen ist $u(x_0, t_0) = 0$, und der Punkt x_0 verbleibt zum Zeitpunkt t_0 im Ruhezustand, solange $t_0 < \frac{\delta}{a}$ gilt.

Es sei nun $t_0 > \frac{\delta}{a}$. Der Durchschnitt des Abhängigkeitsgebietes mit dem Gebiet D ist nicht leer (in Abb. 41 ist dieser Durchschnitt schraffiert dargestellt); in diesem Gebiet sind die Anfangswerte von Null verschieden, und es gilt im allgemeinen $u(x_0, t_0) \neq 0$. Somit kann man den Zeitpunkt $t_0 = \frac{\delta}{a}$ als den Zeitpunkt ansehen, in dem die Erregung den Punkt x_0 erreicht. Bis zu diesem Zeitpunkt befindet sich der erwähnte Punkt im Ruhezustand, nach diesem im Zustand der Erregung.

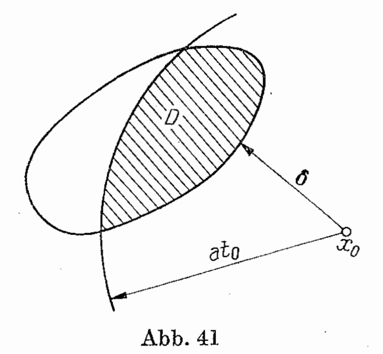


Abb. 41

Ohne große Schwierigkeiten kann man auch auf folgende Frage antworten: Welche Gebiete befinden sich zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0 im Zustand der Ruhe bzw. der Erregung?

Sei Γ der Rand des Gebietes D, in dem die Erregung im Anfangsmoment hervorgerufen wurde. Um jeden Punkt des Randes Γ beschreiben wir eine Kugel

mit dem Radius $a\,t_0$. Die Einhüllende Γ_{t_0} dieser Kugeln (genauer gesagt, der geometrische Ort aller Punkte, die außerhalb D liegen und deren Abstand zu Γ $a\,t_0$ beträgt) grenzt das sich im Ruhezustand befindliche Gebiet von dem Gebiet ab, dessen Punkte sich im allgemeinen im Zustand der Erregung befinden (Abb. 42). Die Fläche Γ_{t_0} nennt man *vordere Wellenfront*. *Welle* nennt man den Prozeß der Erregungsausbreitung. Offensichtlich breitet sich die Erregung mit der Geschwindigkeit a in Richtung der Normalen von Γ aus.

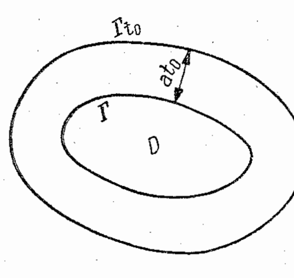


Abb. 42

Bemerkung. Wenn die Dimension des Raumes ungerade und größer Eins ist, dann wird im homogenen Medium unter gewissen Bedingungen die sogenannte *hintere Wellenfront* beobachtet: Die Erregung verschwindet in jedem Punkt nach einer gewissen Zeit. Wir kehren zu dieser Frage in Kap. 24 zurück.

§ 6. Die verallgemeinerte Lösung des Cauchyschen Problems

Die in § 3 formulierte Aufgabenstellung für das Cauchysche Problem der Wellengleichung setzt voraus, daß für die gesuchte Funktion wenigstens jene Ableitungen existieren, die in die Differentialgleichung eingehen. Unter bekannten Voraussetzungen tritt dieser Fall auch tatsächlich ein. S. L. Sobolew zeigte, daß die Lösung des Cauchyschen Problems für die homogene Wellengleichung zusammen mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich stetig ist, wenn der Anfangswert $\varphi_0(x)$ zusammen mit seinen Ableitungen bis zur Ordnung $\left[\frac{m}{2}\right] + 3$ einschließlich und die Funktion $\varphi_1(x)$ zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $\left[\frac{m}{2}\right] + 2$ einschließlich stetig sind. Wenn $m \geqq 5$ ist, dann können die erwähnten Anzahlen der existierenden Ableitungen für $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ im allgemeinen nicht verringert werden. Für $m = 1, 2, 3$ kann man diese Regularitätsforderungen für die Anfangsfunktionen abschwächen. So kann man sich leicht davon überzeugen, daß die Funktion[1])

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\,[\varphi_0\,(x + t) + \varphi_0\,(x - t)] \tag{1}$$

Lösung des Cauchyschen Problems für die Saitenschwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x)\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

ist.

Offenbar ist in diesem Fall die Lösung $u(x, t)$ zusammen mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig, wenn die zweite Ableitung $\varphi''(x)$ existiert. Aus physikalischen Betrachtungen folgt allerdings die Forderung nach der Existenz der zweiten Ableitung $\varphi''(x)$ nicht. In der Tat, die Bedingungen (3) bedeuten, daß die Saite im Anfangsmoment aus dem

[1]) Ausführlicher s. § 7, Kap. 24.

Gleichgewicht gebracht wurde, nachdem man ihr eine anfängliche Abweichung $\varphi_0(x)$, jedoch keine Anfangsgeschwindigkeit erteilt hatte. Die Graphik der Funktion $u = \varphi_0(x)$ gibt die Gestalt der Saite im Anfangsmoment wieder.

Nehmen wir an, daß die Graphik der Funktion $\varphi_0(x)$ durch den in Abb. 43 dargestellten Polygonzug gegeben wird. Diese Funktion besitzt in den drei Punkten $x = -1, 0, 1$ nicht einmal die ersten Ableitungen. Ungeachtet dessen ist die Aufgabenstellung über die Schwingungen der Saite mit einer derartigen anfänglichen Gestalt sinnvoll, und die Lösung dieser Aufgabe wird durch dieselbe Formel (1) gegeben: Die Gestalt der Saite zu Zeitpunkten, deren Abstände zum Anfangsmoment nicht allzu klein sind, wird in Abb. 44 veranschaulicht.

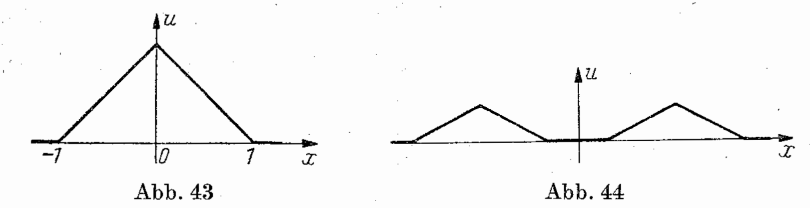


Abb. 43 Abb. 44

Offenbar existieren für die Funktion (1) in Werten der Veränderlichen, die durch die Beziehungen $x \pm t = -1, 0, 1$ verknüpft sind, weder die zweiten noch die ersten Ableitungen.

Es entsteht also die Notwendigkeit, die verallgemeinerte Lösung des CAUCHYschen Problems in die Betrachtung einzuführen. Mit derartigen Verallgemeinerungen sind wir bisher in diesem Buch nicht nur einmal in Berührung gekommen. Zunächst geben wir die Definition der *verallgemeinerten Lösung einer Differentialgleichung.*

Es sei L ein linearer Differentialausdruck, etwa zweiter Ordnung, und M der zu L formal adjungierte Differentialausdruck.

Die Funktion $u \in C^{(2)}(\Omega)$ genüge im endlichen Gebiet Ω der Gleichung

$$L u = f(x), \tag{4}$$

mit x ist hier die Gesamtheit aller unabhängigen Veränderlichen bezeichnet. Ferner gelte $\Phi(x) \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$ (§ 1, Kap. 2). Auf die Funktionen $u(x)$ und $\Phi(x)$ wenden wir die GREENsche Formel an (Formel (6.4) von Kap. 10). Dabei verschwindet das Integral über die Oberfläche, da die Funktion $\Phi(x)$ zusammen mit ihren Ableitungen auf dem Rand des Gebietes Ω gleich Null ist, und wir erhalten die Beziehung

$$\int_\Omega u\, M\, \Phi\, dx = \int_\Omega f\, \Phi\, dx, \qquad \forall\, \Phi \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega). \tag{5}$$

Man weist leicht nach, daß eine Funktion $u \in C^{(2)}(\Omega)$, die die Beziehung (5) erfüllt, auch der Gleichung (4) genügt.

Wir führen folgende Definition ein: *Die Funktion $u(x)$, die in Ω summierbar ist und der Gleichung* (5) *genügt, nennt man verallgemeinerte Lösung der Gleichung* (4).

Man überzeugt sich leicht davon, daß die in diesem Buch früher eingeführten Begriffe der verallgemeinerten Lösungen für verschiedene Aufgaben mit der eben gegebenen Definition in Einklang stehen. Entsprechend dieser Definition nennen wir die Funktion $u(x, t)$ verallgemeinerte Lösung der Wellengleichung

$$\Box\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t) \tag{6}$$

im Halbraum $t > 0$, wenn in jedem endlichen Gebiet D, das die Variablen $x_1, \ldots, x_m, t$ durchlaufen, diese Funktion summierbar ist und die Beziehung

$$\int_D u \,\Box\, \Phi\, dx\, dt = \int_D f\, \Phi\, dx\, dt, \qquad \Phi \in \mathfrak{M}^{(2)}(D) \tag{7}$$

erfüllt.

Jetzt führen wir den Begriff der verallgemeinerten Lösung für das CAUCHYsche Problem ein. Neben Gleichung (6) seien noch die Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x)\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{8}$$

gegeben.

Die Funktion $u(x, t)$ nennen wir verallgemeinerte Lösung des CAUCHYschen Problems (6), (8), wenn diese Funktion

1. verallgemeinerte Lösung der Gleichung (6) ist;
2. quadratisch summierbar ist und in jedem endlichen Gebiet, das die Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m, t$ durchlaufen, quadratisch summierbare verallgemeinerte erste Ableitungen besitzt;
3. in jedem endlichen Gebiet Ω, das die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, durchlaufen, der Grenzwertbeziehung

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\Omega} \left\{[u(x, t) - \varphi_0(x)]^2 + \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k}\right]^2 + \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \varphi_1(x)\right]^2\right\} dx = 0 \tag{9}$$

genügt.

In der hier gegebenen Definition muß man noch fordern, daß in jedem endlichen Gebiet $\Omega \subset E_m$ die Anfangswerte $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ quadratisch summierbar sind und die Funktion $\varphi_0(x)$ quadratisch summierbare verallgemeinerte erste Ableitungen besitzt.

Ausführlicher kann man über die verallgemeinerte Lösung der Wellengleichung in dem Buch von S. L. SOBOLEW [7] nachlesen. Die Definition der verallgemeinerten Lösung für eine Randwertaufgabe wurde in dem Buch von O. A. LADYSHENSKAJA [3] gegeben.

KAPITEL 22

DIE FOURIERSCHE METHODE

Ihrem Wesen nach ist die FOURIERsche Methode eine Lösungsmethode für gemischte Aufgaben und CAUCHYsche Probleme, die sich auf die Benutzung von Spektraleigenschaften des in die Gleichung eingehenden elliptischen Operators stützt. In den klassischen Arbeiten von FOURIER und seinen Nachfolgern wurde die FOURIERsche Methode mit der Trennung der Variablen in der Differentialgleichung in Zusammenhang gebracht; letztere Methode wurde in § 3, Kap. 15, benutzt. In diesem Kapitel wird auf der Grundlage der FOURIERschen Methode die Lösung der gemischten Aufgaben für die Wärmeleitungs- und Wellengleichung gegeben.

§ 1. Die FOURIERsche Methode für die Wärmeleitungsgleichung

Im vorliegenden Paragraphen wird eine Methode zur Konstruktion der verallgemeinerten Lösung für die gemischte Aufgabe der Wärmeleitungsgleichung gegeben; daraus erhalten wir als Folgerung den Beweis für die Existenz dieser Lösung. Der Begriff der verallgemeinerten Lösung und der Beweis ihrer Eindeutigkeit wurde in § 6, Kap. 20, gegeben. Wir erinnern, daß die verallgemeinerte Lösung im vorliegenden Fall eine abstrakte Funktion von t der Klasse

$$C([0, \infty);\ L_2(\Omega)) \cap C((0, \infty),\ H_{\mathfrak{A}}) \cap C^{(1)}((0, \infty);\ L_2(\Omega))$$

ist, die der Beziehung

$$\left(\frac{du(t)}{dt},\ \eta(t)\right) + [u(t), \eta(t)]_{\mathfrak{A}} = (f(t), \eta(t)) \tag{1}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(0) = \varphi \tag{2}$$

genügt.

Hierbei ist $\mathfrak{A}$ der Operator des DIRICHLETschen Problems (vgl. § 2, Kap. 14) für das endliche Gebiet $\Omega \subset E_m$ mit einem stückweise glatten Rand Γ; $\eta(t)$ ist eine beliebige abstrakte Funktion von t mit Werten im energetischen Raum $H_{\mathfrak{A}}$ und φ ein Element des Raumes $L_2(\Omega)$. Die Funktion $f(t)$ ist schließlich eine abstrakte Funktion von t mit Werten in $L_2(\Omega)$; wir nehmen an, daß sie zur Klasse $C^{(1)}([0, \infty); L_2(\Omega))$ gehört.

Es existiere die Lösung $u(t) = u(x, t)$ der Aufgabe (1), (2). Für beliebiges $t \geqq 0$ ist diese ein Element des Raumes $L_2(\Omega)$, und man kann sie nach jedem in $L_2(\Omega)$ vollständigen und orthonormierten System in eine FOURIER-Reihe entwickeln, d. h. also auch nach dem System der Eigenelemente des Operators $\mathfrak{A}$. Wir bezeichnen diese Elemente mit $u_n = u_n(x)$, die ihnen entsprechenden Eigenwerte mit λ_n. Wenn wir die Bezeichnung

$$\bigl(u(t), u_n\bigr) = c_n(t) \tag{3}$$

vornehmen, so ergibt sich

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, u_n \,. \tag{4}$$

Die Aufgabe wird somit auf die Berechnung der Koeffizienten $c_n(t)$ zurückgeführt. Dazu setzen wir in der Beziehung (1) $\eta(t) = u_k$. Das Element u_k hängt nicht von t ab, und nach der Formel (5.1) aus Kap. 20 finden wir

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \quad u_k\right) = \frac{d}{dt}\bigl((u(t), u_k\bigr) = c_k'(t)\,.$$

Nach Definition der (verallgemeinerten) Eigenfunktion (vgl. Formel (3.2), Kap. 6) gilt

$$[u(t), u_k] = \lambda_k\bigl(u(t), u_k\bigr) = \lambda_k\, c_k(t)\,.$$

Indem wir

$$\bigl(f(t), u_k\bigr) = f_k(t) \tag{5}$$

setzen, erhalten wir schließlich

$$c_k'(t) + \lambda_k\, c_k(t) = f_k(t)\,. \tag{6}$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit reellwertigen Funktionen: der gegebenen Funktion $f_k(t)$ und der gesuchten Funktion $c_k(t)$. Das allgemeine Integral dieser Gleichung hat die Gestalt

$$c_k(t) = e^{-\lambda_k t}\left[C_k + \int_0^t e^{\lambda_k \tau} f_k(\tau)\, d\tau\right], \qquad C_k = \text{const}\,.$$

Aus den Formeln (2) und (3) ergibt sich für die Gleichung (6) die Anfangsbedingung

$$c_k(0) = (\varphi, u_k)\,.$$

Daraus folgt $C_k = (\varphi, u_k)$ und

$$c_k(t) = (\varphi, u_k)\, e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau\,. \tag{7}$$

Es genügt jetzt (7) in die Formel (4) einzusetzen, und wir kommen zu folgendem Schluß: Wenn die gemischte Aufgabe (1), (2) für die Wärmeleitungsgleichung eine verallgemeinerte Lösung besitzt, so ist diese als Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t}\, u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau \tag{8}$$

darstellbar.

Daraus erhalten wir, nebenbei bemerkt, noch einmal die bereits in § 6, Kap. 20, bewiesene Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung.

§ 2. Die Begründung der Methode

Wir zeigen jetzt, daß die Reihe (1.8) wirklich die verallgemeinerte Lösung der Wärmeleitungsgleichung darstellt. Der Beweis wird auf die Überprüfung der unten formulierten Behauptungen zurückgeführt.

a) Die Reihe (1.8) konvergiert in der Metrik von $L_2(\Omega)$ gleichmäßig bezüglich t auf einem beliebigen Intervall $[0, T]$.

Beweis. Die Reihe (1.8) ist eine Orthogonalreihe in $L_2(\Omega)$. Es genügt also zu zeigen, daß auf dem Intervall $[0, T]$ die Reihe aus den Quadraten der Koeffizienten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{(\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right\}^2 \leqq$$

$$\leqq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)^2\, e^{-2\lambda_n t} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right\}^2 \tag{1}$$

gleichmäßig konvergiert.

Die abstrakte Funktion $f(t)$ ist für $t \geqq 0$ stetig; daraus folgt die Stetigkeit der Größe $||f(t)||$ auf dem Intervall $[0, T]$. Nunmehr zeigt man leicht, daß die zweite Reihe auf der rechten Seite in (1) gleichmäßig konvergiert. In der Tat, unter Benutzung der Cauchy-Bunjakowskischen Ungleichung ergibt sich

$$\left\{\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right\}^2 \leqq \int_0^t e^{-2\lambda_n(t-\tau)}\, d\tau \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{2\,\lambda_n} \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau < \frac{1}{2\,\lambda_n} \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau\,. \tag{2}$$

Indem wir hier die Größe λ_n durch ihren kleinsten Wert λ_1 ersetzen, finden wir für das allgemeine Glied der oben erwähnten Reihe die Abschätzung

$$\frac{1}{2\,\lambda_1} \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau\,.$$

Die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau) = ||f(\tau)||^2 \tag{3}$$

zeigt, daß die Reihe (3) mit nicht negativen stetigen Gliedern konvergiert und ihre Summe stetig ist. Nach einem bekannten Satz von Dini konvergiert die Reihe (3) gleichmäßig auf dem Intervall $[0, T]$ für beliebiges $T > 0$. Somit konvergiert auch die zweite Reihe auf der rechten Seite in (1).

Einfacher kann man die Konvergenz der ersten Reihe in (1) nachweisen. Es gilt

$$2\,(\varphi, u_n)^2\, e^{-2\lambda_k t} \leqq 2(\varphi, u_n)^2\,,$$

und die Reihe $2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)^2$ konvergiert nach der BESSELschen Ungleichung.

Aus dem Bewiesenen folgt für die Summe der Reihe (1.8) die Beziehung

$$u(x, t) = u(t) \in C\big([0, \infty)\,; L_2(\Omega)\big)\,.$$

b) Die Reihe (1.8) konvergiert in der Metrik von $H_{\mathfrak{A}}$ gleichmäßig bezüglich t auf einem beliebigen Intervall $[\bar{t}, T]$, wobei $0 < \bar{t} < T < \infty$ gilt.

Beweis. In der Metrik $H_{\mathfrak{A}}$ sind die Funktionen $\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ orthonormiert. Die Reihe (1.8) kann man in der Gestalt

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left\{(\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right\} \frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{4}$$

darstellen. Es genügt wiederum nachzuweisen, daß die Reihe aus den Quadraten der Koeffizienten gleichmäßig konvergiert. Die letzteren schätzen wir ab. Es gilt

$$\sqrt{\lambda_n}\; e^{-\lambda_n t} = \frac{1}{t\sqrt{\lambda_n}}\, \lambda_n\, t\, e^{-\lambda_n t} \leqq \frac{1}{\bar{t}\sqrt{\lambda_n}} \max z\, e^{-z} = \frac{1}{\bar{t}\, e \sqrt{\lambda_n}}\,. \tag{5}$$

Nunmehr finden wir

$$\lambda_n\, c_n^2(t) \leqq 2\, (\sqrt{\lambda_n}\; e^{-\lambda_n t})^2\, (\varphi, u_n)^2 + 2\, \lambda_n \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right)^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{2}{\bar{t}^2\, e^2\, \lambda_n} (\varphi, u_n)^2 + \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau\,; \tag{6}$$

dabei benutzten wir die Abschätzung (2). Die Reihe mit dem allgemeinen Glied (6) konvergiert gleichmäßig, und damit ist die Behauptung b) bewiesen. Aus ihr folgt die Beziehung

$$u(x, t) = u(t) \in C\big((0, \infty)\,; H_{\mathfrak{A}}\big)\,.$$

c) Die Reihe, die wir erhalten, indem wir die Reihe (1.8) nach t differenzieren, konvergiert in der Metrik von $L_2(\Omega)$ gleichmäßig nach t auf einem beliebigen Intervall $[\bar{t}, T]$, wobei $0 < \bar{t} < T < \infty$ gilt.

Beweis. Wenn wir die Reihe (1.8) nach t differenzieren, so erhalten wir die folgende Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{-\lambda_n(\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t} + f_n(t) - \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right\} u_n(x)$$

oder, wenn wir partiell integrieren, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{-\lambda_n(\varphi, u_n)\, e^{-\lambda_n t} + f_n(0)\, e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n'(\tau)\, d\tau\right\} u_n(x)\,. \tag{7}$$

Das ist ebenfalls eine Reihenentwicklung nach dem in $L_2(\Omega)$ vollständigen orthonormierten System $\{u_n(x)\}$. Wir schätzen nun ihre Koeffizienten ab. Nach der CAUCHYschen Ungleichung übersteigt in der Reihe (7) das Quadrat des zu $u_n(x)$ gehörenden Koeffizienten nicht die Größe

$$3\,(\lambda_n\, e^{-\lambda_n t})^2\,(\varphi, u_n)^2 + 3\, f_n^2(0)\, e^{-2\lambda_n t} + 3\left(\int\limits_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n'(\tau)\, d\tau\right)^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{3}{(\bar{t}\, e)^2}\,(\varphi, u_n)^2 + 3\, f_n^2(0) + \frac{3}{2\,\lambda_n}\int\limits_0^{\bar{t}} [f_n'(\tau)]^2\, d\tau\,. \qquad (8)$$

Aus den für die Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x, t)$ formulierten Voraussetzungen folgt, daß die Reihe mit dem allgemeinen Glied (8) konvergiert. Somit konvergiert die Reihe (7) in der Metrik von $L_2(\Omega)$ gleichmäßig auf dem Intervall $[\bar{t}, T]$. Die Behauptung c) ist bewiesen. Aus ihr folgt die Gültigkeit der Beziehung

$$u(x, t) = u(t) \in C^{(1)}\big((0, \infty)\,;\ L_2(\Omega)\big)\,.$$

d) Die Summe der Reihe (1.8) genügt der Anfangsbedingung (1.2).

Beweis. In der Tat, aus dem im Punkt a) Bewiesenem folgt, daß man in dieser Reihe für $t \to 0$ gliedweise zum Grenzwert übergehen kann. Deshalb gilt

$$\lim_{t\to 0} \|u(t) - \varphi\|_{L_2} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)\, u_n - \varphi\right\| = 0\,.$$

e) Die Summe der Reihe (1.8) erfüllt die Integralbeziehung (1.1).

Beweis. Es sei $\eta(t)$ eine beliebige abstrakte Funktion von t $(0 < t < \infty)$ mit Werten in $H_{\mathfrak{A}}$. Wir differenzieren beide Seiten der Reihe (1.8) nach t und multiplizieren das Ergebnis skalar (in der Metrik von $L_2(\Omega)$) mit $\eta(t)$:

$$\left(\frac{du\,(t)}{dt}, \eta(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)\,\big(u_n, \eta(t)\big)\,.$$

Wenn wir für $c_n'(t)$ den sich aus der Formel (1.6) ergebenden Wert einsetzen, finden wir

$$\left(\frac{du\,(t)}{dt}, \eta(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\big(u_n, \eta(t)\big) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, c_n(t)\,\big(u_n, \eta(t)\big) =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, u_n, \eta(t)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\,[u_n, \eta(t)] = \big(f(t), \eta(t)\big) -$$

$$- \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, u_n, \eta(t)\right] = \big(f(t), \eta(t)\big) - [u(t), \eta(t)]\,.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 3. Über die Existenz der klassischen Lösung. Ein Spezialfall

Nachdem unter ziemlich allgemeinen Bedingungen die Existenz der verallgemeinerten Lösung für die gemischte Aufgabe der Wärmeleitung bewiesen wurde, ist es an der Zeit, folgende Frage zu stellen: Welche Bedingungen hat man an die Vorgaben zu stellen, damit sich eine „klassische" Lösung ergibt; darunter verstehen wir, daß diese Lösung in $Q \cup B \cup \Omega$ (Abb. 37) stetig ist und in Q eine stetige erste Ableitung nach t sowie stetige zweite Ableitungen nach der Raumkoordinaten besitzt. Die Lösung dieser Frage geben wir für den einfachsten Fall an, wo $m = 1$, das Gebiet Ω das Intervall $(0, 1)$ der x-Achse ist und die Wärmeleitungsgleichung die Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

annimmt. Für die Anfangs- und die Randbedingung gilt dann

$$u(x, 0) = \varphi(x)\,, \qquad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{2}$$

und

$$u(0, t) = u(1, t) = 0\;; \tag{3}$$

die Lösung ist auf dem Halbstreifen (Abb. 45) definiert.

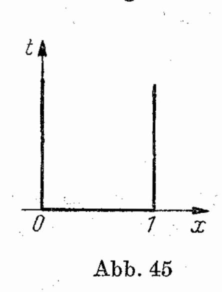


Abb. 45

Wenn die Lösung unserer Aufgabe im Halbstreifen $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq 0$ stetig ist, so muß notwendigerweise erst einmal $\varphi(x)$ stetig sein. Ferner muß die Funktion $u(x, t)$ in den Punkten $x = 0$, $t = 0$ und $x = 1$, $t = 0$ stetig sein. In jedem dieser Punkte kann man die Werte von $u(x, t)$ berechnen, wobei man sowohl von der Anfangsbedingung als auch von den Randbedingungen (3) ausgehen kann. Beide Möglichkeiten müssen ein und dasselbe Resultat liefern. Folglich muß die Funktion $\varphi(x)$ notwendigerweise den *Verträglichkeitsbedingungen*

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \tag{4}$$

genügen.

Jetzt können wir die Antwort auf die oben gestellte Frage formulieren: *Die verallgemeinerte Lösung der Aufgabe* (1)—(3) *ist auch klassische Lösung dieser Aufgabe, wenn der Anfangswert* $\varphi(x)$ *auf dem Intervall* $[0, 1]$ *absolut stetig ist, seine Ableitung* φ' *dem Raume* $L_2(0, 1)$ *angehört und die Verträglichkeitsbedingungen* (4) *erfüllt sind.*

Beweis. Im gegebenen Fall wirkt der Operator $\mathfrak{A}$ nach der Formel $\mathfrak{A}\,u = -\frac{d^2u}{dx^2}$ und ist auf den Funktionen der Klasse $C^{(2)}(0, 1)$ definiert, die für $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden. Aus den Formeln (8.3) und (8.4a) des Kap. 6 erhalten wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators $\mathfrak{A}$:

$$\lambda_n = n^2\pi^2\,, \qquad u_n(x) = \sqrt{2}\,\sin n\pi x\,.$$

Die Formel (1.8) liefert

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n \pi x , \tag{5}$$

wobei

$$b_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin n \pi x \, dx \tag{6}$$

gesetzt ist.

Wir zeigen zu Beginn, daß für $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq 0$ die Reihe (5) gleichmäßig konvergiert. Dazu integrieren wir das Integral (6) partiell. Unter Beachtung der Bedingung (4) ergibt sich $b_n = \frac{\beta_n}{n}$, wobei

$$\beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi'(x) \cos n \pi x \, dx$$

der n-te Fourier-Koeffizient der Funktion $\frac{\sqrt{2}}{\pi} \varphi'(x)$ ist, wenn wir diese nach dem orthonormierten System $\{\sqrt{2} \cos n \pi x\}$ in eine Reihe entwickeln. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ konvergiert; somit konvergiert nach der Ungleichung $|b_n| \leqq \frac{1}{2}\left(\beta_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| . \tag{7}$$

Nun stellt die Reihe (7) eine Majorante für die Reihe (5) dar, welche deshalb absolut und gleichmäßig konvergiert. Da die Glieder der Reihe (5) stetig sind, so ist die Summe dieser Reihe für $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq 0$ ebenfalls stetig.

Wir zeigen jetzt, daß die Funktion $u(x, t)$ als die Summe der Reihe (5) für $t > 0$ Ableitungen beliebiger Ordnung nach x und t besitzt. Dafür genügt es zu zeigen, daß die Reihe, die wir erhalten, indem wir die Reihe (5) beliebig oft nach t und x differenzieren, für $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq \bar{t}$ gleichmäßig konvergiert; dabei ist $\bar{t}$ eine beliebige positive Konstante. Indem wir die Reihe (5) p-mal nach x und q-mal nach t differenzieren, erhalten wir die Reihe

$$(-1)^q \sum_{n=1}^{\infty} n^{p+2q} \pi^{p+2q} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin\left(n \pi x + p \frac{\pi}{2}\right). \tag{8}$$

Die Fourier-Koeffizienten b_n sind offenbar beschränkt, und für die Reihe (8) ist die Reihe

$$C \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} e^{-n^2\pi^2 \bar{t}} , \quad C = \text{const} , \quad 2s \geqq p + 2q , \quad s = \text{const}$$

eine Majorante.

Weiter gilt

$$n^{2s}\, e^{-n^2\pi^2\bar{t}} < \frac{n^{2s}}{1 + n^2\pi^2\bar{t} + \cdots + \dfrac{n^{2s+2}}{(2s+2)!}(\pi^2\bar{t})^{2s+2}} < \frac{(2s+2)!}{(\pi^2\bar{t})^{2s+2}\, n^2},$$

und man kann somit die noch bessere Majorante

$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad C_1 = \text{const}$$

angeben, die offensichtlich konvergiert. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wie aus der Beweisführung ersichtlich ist, konnten wir die Existenz der Ableitungen beliebig hoher Ordnung für $t > 0$ unter der einzigen Voraussetzung nachweisen, daß $\varphi \in L(0, 1)$ ist. Die zusätzlichen Bedingungen, die der Funktion $\varphi(x)$ auferlegt wurden, benötigten wir nur für den Beweis der Stetigkeit der Lösung im Punkte $t = 0$.

§ 4. Die Fouriersche Methode für die Wellengleichung

Die verallgemeinerte Lösung $u(x, t) = u(t)$ der gemischten Aufgabe für die Wellengleichung (vgl. § 2, Kap. 21) ist eine abstrakte Funktion von t, die der Klasse K [Formel (2.9), Kap. 21] angehört und die die Beziehung

$$-\int_0^T \left(\frac{du(t)}{dt},\ \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt - \big(\varphi_1, \eta(0)\big) = \int_0^T \big(f(t), \eta(t)\big)\, dt\,, \quad \eta \in K_T\,, \tag{1}$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u(0) = \varphi_0 \tag{2}$$

erfüllt.

Dabei gilt $\varphi_0 \in H_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$. Wir setzen voraus, daß $f(t) = f(x, t)$ eine abstrakte Funktion der Klasse $C\big([0, \infty); L_2(\Omega)\big)$ ist. Die Bedingung (2) ist im Sinne des Grenzübergangs in der energetischen Metrik

$$\lim_{t\to 0} \left| u(t) - \varphi_0 \right| = 0$$

zu verstehen.

Wir nehmen an, daß die Lösung der Aufgabe (1), (2) existiert. Wir entwickeln sie in der Metrik von $L_2(\Omega)$ in eine Reihe nach dem System der Eigenelemente des Operators $\mathfrak{A}$:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, u_n\,, \qquad c_n(t) = \big(u(t), u_n\big)\,. \tag{3}$$

Dieselbe Reihe, geschrieben in der Gestalt

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\; c_n(t)\, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\,,$$

stellt die Reihenentwicklung der Lösung $u(t)$ in der Metrik von $H_{\mathfrak{A}}$ nach dem vollständigen orthonormierten System $\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ dar.

In der Beziehung (1) setzen wir $\eta(t) = (T - t)\, u_n$. Unter Benutzung von

$$[u(t), u_n] = \lambda_n(u(t), u_n) = \lambda_n\, c_n(t)$$

erhalten wir die folgende Gleichung für den unbekannten Koeffizienten $c_n(t)$:

$$\int_0^T c_n(t)\, dt - T(\varphi_1, u_n) + \lambda_n \int_0^T (T - t)\, c_n(t)\, dt = \int_0^T (T - t)\, f_n(t)\, dt\,, \tag{4}$$

wobei

$$f_n(t) = \big(f(t), u_n\big) \tag{5}$$

ist.

Gleichung (4) differenzieren wir nach T und schreiben statt T und t entsprechend t und τ:

$$c_n'(t) - (\varphi_1, u_n) + \lambda_n \int_0^t c_n(\tau)\, d\tau = \int_0^t f_n(\tau)\, d\tau\,. \tag{6}$$

Aus Gleichung (6) ersieht man, daß die zweite Ableitung $c_n''(t)$ existiert. Indem wir differenzieren, stellen wir fest, daß $c(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2 c_n(t)}{dt^2} + \lambda_n\, c_n(t) = f_n(t) \tag{7}$$

genügt; die Anfangsbedingungen für diese Gleichung

$$c_n(0) = (\varphi_0, u_n)\,, \qquad c_n'(0) = (\varphi_1, u_n) \tag{8}$$

erhalten wir aus den Beziehungen (2) und (6). Die Lösung dieser Aufgabe hat die Gestalt

$$c_n(t) = (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\; t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\; t + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau)\, f_n(\tau)\, d\tau\,. \tag{9}$$

Daraus ergibt sich

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\; t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\; t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau)\, f_n(\tau)\, d\tau \right\} u_n(x)\,. \tag{10}$$

Wenn also die verallgemeinerte Lösung der gemischten Aufgabe für die Wellengleichung existiert, so hat diese notwendigerweise die Gestalt (10). Wie auch für die Wärmeleitungsgleichung folgt daraus die Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung.

Die Formel (10) ist etwas unhandlich, deshalb führen wir ihre Begründung auf die folgende Weise durch. Die Funktionen $v(x, t)$ und $w(x, t)$ seien verallgemeinerte Lösungen folgender Aufgaben:
der homogenen Wellengleichung mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathfrak{A}\, v = 0\,, \qquad v|_{t=0} = \varphi_0\,, \qquad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \varphi_1 \tag{11}$$

bzw. der inhomogenen Wellengleichung mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \mathfrak{A}\, w = f(t)\,, \qquad w|_{t=0} = 0\,, \qquad \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = 0\,. \tag{12}$$

Dann gilt offensichtlich $u = v + w$. Die allgemeine Formel (10) liefert für v und w die Formeln

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{(\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\right\} u_n(x)\,, \tag{13}$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau)\, f_n(\tau)\, d\tau\,. \tag{14}$$

In den folgenden zwei Paragraphen führen wir die Begründung der FOURIERschen Methode für jede der Aufgaben (11) und (12) getrennt durch.

§ 5. Die Begründung der Methode für die homogene Gleichung

Wie auch im Falle der Wärmeleitungsgleichung (§ 3) wird die Begründung der FOURIERschen Methode auf die Überprüfung einiger Behauptungen zurückgeführt.

a) Die Reihe (4.13) konvergiert in der Metrik von $H_{\mathfrak{A}}$ gleichmäßig bezüglich t auf der ganzen Zahlengeraden.

B e w e i s. Wir schreiben die Reihe (4.13) in der Gestalt

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\sqrt{\lambda_n}\, (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\} \frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[\varphi_0\,, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right] \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\right\} \frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\,. \tag{1}$$

Diese Formel ist eine Reihenentwicklung nach dem in der Metrik von $H_{\mathfrak{A}}$ orthonormierten Funktionensystem $\left\{\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$. Es genügt somit die gleichmäßige Kon-

vergenz bezüglich t für die Reihe aus den Quadraten der Koeffizienten

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\cos\sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n)\sin\sqrt{\lambda_n}\, t\right\}^2 \tag{2}$$

nachzuweisen.

Die Summe dieser Reihe übersteigt nicht die Größe

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1, u_n)^2 .$$

Nach der BESSELschen Ungleichung konvergieren beide Reihen. Ihre Glieder hängen nicht von t ab, und nach einem Satz von WEIERSTRASS konvergiert die Reihe (2) gleichmäßig.

Daß die Reihe (4.13) gleichmäßig nach t in der Metrik von $L_2(\Omega)$ konvergiert, folgt unmittelbar aus der Ungleichung der positiven Definitheit [Ungleichung (3.3), Kap. 5)].

Aus der Behauptung dieses Punktes folgt außerdem noch

$$v(x, t) = v(t) \in C\big([0, \infty), H_{\mathfrak{A}}\big) .$$

Der Punkt a) ist somit bewiesen.

b) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{-\sqrt{\lambda_n}\,(\varphi_0, u_n)\sin\sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\, t\}\, u_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\, t\right\} u_n(x)\, , \tag{3}$$

die wir erhalten, wenn wir die Reihe (4.13) nach t differenzieren, konvergiert gleichmäßig bezüglich t in der Metrik von $L_2(\Omega)$.

Es genügt jetzt, die Ungleichung

$$\left\{-\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\, t + (\varphi_1, u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\, t\right\}^2 \leqq 2\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]^2 + 2\,(\varphi_1, u_n)^2$$

aufzuschreiben und sich genau wie im Punkte a) auf die BESSELsche Ungleichung und auf den Satz von WEIERSTRASS zu berufen.

Aus dem in Punkt a) und b) Bewiesenen ergibt sich

$$v(x, t) = v(t) \in C^{(1)}\big([0, \infty); L_2(\Omega)\big)\, ,$$

folglich gilt $v(t) \in K$.

c) Die Summe der Reihe (4.13) genügt den Anfangsbedingungen (4.11).

B e w e i s. Wie aus Punkt a) folgt, können wir in der Reihe (1) den Grenzübergang (in der Metrik von $H_{\mathfrak{A}}$) für $t \to 0$ gliedweise vollziehen. Folglich erhalten wir

$$\lim_{t\to 0}\left|v(t) - \varphi_0\right| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}} - \varphi_0\right\| = 0\, .$$

Nach dem im Punkt b) Bewiesenen ist die Summe der Reihe (3) gleich $\frac{dv(t)}{dt}$, und in dieser Reihe kann man ebenfalls für $t \to 0$ gliedweise zum Grenzwert übergehen, d. h.

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{dv(t)}{dt} - \varphi_1 \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, u_n)\, u_n - \varphi_1 \right\| = 0 .$$

d) Die Summe der Reihe (4.13) erfüllt die Gleichung

$$-\int_0^T \left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt - \big(\varphi_1, \eta(0)\big) = 0 ,$$

$$\forall\, \eta \in K_T , \tag{4}$$

die sich aus der Beziehung (4.1) für $f \equiv 0$ ergibt.

Beweis. Der Kürze halber bezeichnen wir die Koeffizienten der Reihe (4.13) mit

$$\gamma_n(t) = (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t .$$

Somit können wir

$$v(x, t) = v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t)\, u_n$$

schreiben.

Die Koeffizienten $\gamma_n(t)$ genügen der Differentialgleichung (4.7), wenn wir in dieser $f_n(t) \equiv 0$ setzen:

$$\gamma_n''(t) + \lambda_n \gamma_n(t) = 0 . \tag{5}$$

Es gilt

$$-\int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, \frac{d\eta}{dt} \right) dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \gamma_n'(t) \left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt .$$

Die gliedweise Integration ist gestattet, da die Reihe (3) gleichmäßig bezüglich t konvergiert. Wenn wir partiell integrieren, erhalten wir

$$-\int_0^T \gamma_n'(t) \left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt = \int_0^T \gamma_n''(t)\, \big(u_n, \eta(t)\big)\, dt - \gamma_n'(t)\, \big(u_n, \eta(t)\big)\Big|_{t=0}^{t=T} =$$

$$= \int_0^T \gamma_n''(t)\, \big(u_n, \eta(t)\big)\, dt + (\varphi_1, u_n)\, \big(u_n, \eta(0)\big) .$$

Daraus ergibt sich

$$-\int_0^T \left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \gamma_n''(t)\, \big(u_n, \eta(t)\big)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, u_n)\, \big(u_n, \eta(0)\big) .$$

Die PARSEVALsche Gleichung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, u_n) \big(u_n, \eta(0)\big) = \big(\varphi_1, \eta(0)\big) ,$$

und folglich gilt

$$-\int_0^T \left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n''(t) \big(u_n, \eta(t)\big)\, dt + \big(\varphi_1, \eta(0)\big) . \tag{6}$$

Somit ist

$$\int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \gamma_n(t)\, [u_n, \eta(t)]\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \lambda_n \gamma_n(t) \big(u_n, \eta(t)\big)\, dt . \tag{7}$$

Wenn man jetzt die Gleichungen (6) und (7) unter Benutzung der Gleichung (5) addiert, so erhält man die Beziehung (4).

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

§ 6. Die Begründung der Methode für homogene Anfangsbedingungen

Wir beweisen jetzt, daß die Summe der Reihe (4.14) die verallgemeinerte Lösung der Aufgabe (4.12) ist. Unter dieser Zielstellung zeigen wir, daß für die Reihe (4.14) alle Behauptungen a)—d) des vorangegangenen Paragraphen gelten, allerdings mit dem Unterschied, daß die gleichmäßige Konvergenz nicht auf der gesamten Zahlengeraden t vorliegt, sondern nur auf einem beliebigen Intervall $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} = \text{const} > 0$.

Für den Beweis der Bedingung a) genügt es zu überprüfen, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\, (t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\}^2 \tag{1}$$

auf dem Intervall $[0, \bar{t}]$ gleichmäßig konvergiert. Nach der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung finden wir

$$\left\{ \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\, (t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\}^2 \leqq \left\{ \int_0^t |f_n(t)|\, dt \right\}^2 \leqq \bar{t} \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau . \tag{2}$$

Die PARSEVALsche Gleichung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau) = ||f(\tau)||^2 . \tag{3}$$

Die Reihe (3) mit stetigen und nicht negativen Gliedern konvergiert gegen eine stetige Funktion. Nach einem Satz von DINI konvergiert die Reihe (3) gleichmäßig. Dann konvergiert aber auch die integrierte Reihe gleichmäßig. Aus der Ungleichung (2) folgt jetzt, daß die Reihe (1) ebenfalls gleichmäßig konvergiert.

Aus dem Bewiesenen ergibt sich, daß die Reihe (4.14) auf dem Intervall $[0, \bar{t}]$ in der Metrik von $L_2(\Omega)$ gleichmäßig konvergiert und außerdem $w(x, 0) = 0$ ist.

Wir wenden uns jetzt der Behauptung b) zu. Wenn wir die Reihe (4.14) formal nach t differenzieren, so erhalten wir die neue Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau .$$

Wir beweisen die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe in der Metrik von $L_2(\Omega)$, indem wir die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\}^2$$

auf dem Intervall $[0, \bar{t}]$ nachweisen. Dieser Beweis wird aber genau wie im Punkt a) geführt. Nunmehr ist klar, daß

$$\frac{dw(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau$$

und

$$\left. \frac{dw(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

gilt. Die Behauptungen des Punktes c) wurden gleichzeitig mit bewiesen.

Wir gehen nun zum Punkt d) über. Wir zeigen, daß $w(x, t)$ der Beziehung (4.1) genügt, welche im gegebenen Fall die Gestalt

$$-\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt + \int_0^T [w(t), \eta(t)]\, dt = \int_0^T \big(f(t), \eta(t)\big)\, dt , \qquad \eta \in K_T \tag{4}$$

annimmt. Es gilt

$$\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) \left\{ \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\} dt .$$

Das äußere Integral integrieren wir partiell:

$$\int_0^T \left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) \left\{ \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\} dt =$$

$$= \left[\big(u_n, \eta(t)\big) \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right]_{t=0}^{t=T} -$$

$$- \int_0^T \big(u_n, \eta(t)\big) \left\{ f_n(t) - \int_0^t \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n}\,(t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\} dt .$$

Der erste Summand auf der rechten Seite verschwindet, da $\eta(T) = 0$ ist. Unter Benutzung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, u_n = f(t)$$

und

$$\sqrt{\lambda_n}\, \big(u_n, \eta(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\, [u_n, \eta(t)]$$

ermitteln wir

$$\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt = -\int_0^T \big(f(t), \eta(t)\big)\, dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt\,.$$

Damit ist die Beziehung (4) bewiesen.

§ 7. Die Saitenschwingungsgleichung. Bedingungen für die Existenz der klassischen Lösung

Die Frage, unter welchen Bedingungen die verallgemeinerte Lösung der gemischten Aufgabe für die Wellengleichung gleichzeitig auch klassische Lösung ist, untersuchen wir nur für den einfachsten Fall der Saitenschwingungsgleichung[1])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad 0 \leqq x \leqq 1\,, \quad t \geqq 0\,. \tag{1}$$

Wir lösen diese Gleichung unter den Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \tag{2}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)\,. \tag{3}$$

Im vorliegenden Fall ist $\lambda_n = n^2 \pi^2$, $u_n(x) = \sqrt{2} \sin n \pi x$. Nach der allgemeinen Formel (4.13) hat die verallgemeinerte Lösung die Gestalt

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \pi t + \frac{b_n}{n \pi} \sin n \pi t\right) \sin n \pi x\,, \tag{4}$$

wobei

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 \varphi_0(x) \sin n \pi x\, dx\,, \\ b_n &= 2 \int_0^1 \varphi_1(x) \sin n \pi x\, dx \end{aligned} \tag{5}$$

ist.

---

1) Für den allgemeinen Fall sei auf [3] verwiesen.

Die Lösung (4) nennen wir klassisch, wenn sie für $0 \leqq x \leqq 1$, $t > 0$ zusammen mit ihren Ableitungen bis einschließlich zur zweiten Ordnung stetig ist. Das wird dann der Fall sein, wenn die Reihe (4) und die Reihen, die sich aus ihr durch einmalige bzw. zweimalige Differentation ergeben, gleichmäßig konvergieren.

Wir zeigen, daß eine derartige gleichmäßige Konvergenz auftritt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Funktionen

$$\varphi_0^{(k)}(x)\,, \qquad k = 0, 1, 2; \qquad \varphi_1^{(k)}(x)\,, \qquad k = 0, 1$$

sind auf dem Intervall $[0, 1]$ absolut stetig.

2. Es gilt

$$\varphi_0''' \in L_2(0, 1)\,, \qquad \varphi_1'' \in L_2(0, 1).$$

3. Die Verträglichkeitsbedingungen

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0\,, \qquad \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0\,, \qquad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(1) = 0 \tag{6}$$

sind erfüllt.

Wir bemerken, daß die Verträglichkeitsbedingungen notwendig sind, damit die Lösung (4) eine klassische Lösung ist. Die ersten beiden Bedingungen (6) folgen aus der Stetigkeit der Funktion $u(x, t)$ in den Punkten $x = 0$, $t = 0$ und $x = 1$, $t = 0$; die beiden mittleren Bedingungen (6) ergeben sich aus der Stetigkeit der Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ in denselben Punkten. Das dritte Paar von Bedingungen kann man wie folgt erhalten. Wir setzen in Gleichung (1) $t = 0$ und erhalten

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0} - \varphi_0''(x) = 0\,.$$

Wenn wir die Beziehung (2) differenzieren, so finden wir

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=1} = 0\,.$$

Setzen wir hier $t = 0$ und in der vorangegangenen Beziehung $x = 0$ und $x = 1$, so ergibt sich das dritte Paar der Bedingungen (6).

Durch partielle Integration formen wir die Formeln für die Koeffizienten a_n und b_n um:

$$a_n = -\left.\frac{2\,\varphi_0(x)\cos n\pi x}{n\pi}\right|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \varphi_0'(x)\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \varphi_0'(x)\cos n\pi x\,dx =$$

$$= \left.\frac{2\,\varphi_0'(x)\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right|_0^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \varphi_0''(x)\sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \varphi_0''(x)\sin n\pi x\,dx =$$

$$= \left.\frac{2\,\varphi_0''(x)\cos n\pi x}{n^3\pi^3}\right|_0^1 - \frac{2}{n^3\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos n\pi x\,dx = -\frac{2}{n^3\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos n\pi x\,dx\,.$$

Genauso findet man

$$b_n = -\frac{2}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \varphi_1''(x) \sin n \pi x \, dx \, .$$

Wenn wir die Bezeichnungen

$$\alpha_n = -\frac{2}{\pi^3} \int_0^1 \varphi_0'''(x) \cos n \pi x \, dx \, , \qquad \beta_n = -\frac{2}{\pi^3} \int_0^1 \varphi_1''(x) \sin n \pi x \, dx$$

einführen, erhalten wir

$$a_n = \frac{\alpha_n}{n^3} \, , \, b_n = \frac{\beta_n \pi}{n^2} \, .$$

Die Größen α_n und β_n sind die FOURIER-Koeffizienten der Funktionen $-\frac{\sqrt{2}}{\pi^3} \times \times \varphi_0'''(x)$ und $-\frac{\sqrt{2}}{\pi^3} \cdot \varphi_1''(x)$, die dem Raum $L_2(0, 1)$ angehören. Daraus folgt die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$. Die Formel (4) nimmt die Gestalt

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\alpha_n \cos n \pi t + \beta_n \sin n \pi t) \sin n \pi x \tag{7}$$

an. Für die Reihe (7) und die Reihen ihrer ersten und zweiten Ableitungen stellen die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^3} \, , \; C' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^2} \, , \; C'' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n} \, ,$$

$$C', \, C'' = \text{const}$$

Majoranten dar, die sämtlich konvergieren. Somit folgt, daß die Summe der Reihe (4) — die Funktion $u(x, t)$ — zusammen mit ihren Ableitungen bis einschließlich zur zweiten Ordnung stetig ist, was auch zu beweisen war.

KAPITEL 23

DAS CAUCHYSCHE PROBLEM FÜR DIE WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

§ 1. Einige Eigenschaften der FOURIER-Transformation

In diesem Paragraphen werden die einfachsten Eigenschaften der mehrdimensionalen FOURIER-Transformation dargelegt. Der Begriff der eindimensionalen FOURIER-Transformation und seine Haupteigenschaften werden als bekannt vorausgesetzt.

Wir betrachten eine Funktion $u \in L(E_m)$, d. h., es gilt

$$\int_{E_m} |u(x)|\, dx < \infty .$$

Die FOURIER-Transformation dieser Funktion definieren wir durch die Formel

$$(F\, u)(x) = \tilde{u}(x) = (2\,\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} e^{-i(x,y)}\, u(y)\, dy . \tag{1}$$

Mit (x, y) ist hier das Skalarprodukt

$$(x, y) = x_k\, y_k$$

im Raum E_m bezeichnet.

Die Funktion $\tilde{u}$ ist in jedem Punkt $x \in E_m$ definiert und stetig, da das Integral (1) absolut und gleichmäßig konvergiert.

Die mehrfache FOURIER-Transformation kann man erhalten, wenn man die eindimensionale FOURIER-Transformation sukzessiv anwendet: Wenn man die Funktionenfolge

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\,\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{-i x_m y_m}\, dy_m ,$$

$$u_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= (2\,\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, x_m)\, e^{-i\, m-1 y_{m-1}}\, dy_{m-1} =$$

$$= (2\,\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, y_m)\, e^{-i(x_{m-1} y_{m-1} + x_m y_m)}\, dy_{m-1}\, dy_m ,$$

. . . .

$$u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, x_m)\, e^{-i x_1 y_1}\, dy_1 =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, e^{-i(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m)}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_m \tag{2}$$

aufstellt, dann gilt offenbar $u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \tilde{u}(x)$.

Satz 23.1.1. *Wenn k eine natürliche Zahl und das Produkt $(1 + |x|^k)\, u(x)$ in E_m summierbar ist, dann besitzt die* FOURIER-*Transformierte der Funktion $u(x)$ überall in E_m stetige Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich.*

Beweis. Da $|u(x)| \leqq (1 + |x|^k)\, |u(x)|$ ist, so gehört die Funktion u dem Raume $L(E_m)$ an, und die FOURIER-Transformierte $\tilde{u}(x)$ existiert und ist in E_m stetig.

Wir differenzieren formal das Integral (1) l_1-mal nach $x_1, \ldots, l_m$-mal nach x_m; es sei

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_m = l \leqq k\,.$$

Wir erhalten das Integral

$$(-i)^l\, (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} y_1^{l_1}\, y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m}\, u(y)\, e^{-i(x,y)}\, dy\,.$$

Dieses Integral konvergiert absolut und gleichmäßig, da

$$|y_1^{l_1}\, y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m}| \leqq |y|^l$$

gilt. Folglich erhalten wir für hinreichend große $|y|$

$$|e^{-i(x,y)}\, y_1^{l_1}\, y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m}\, u(y)| \leqq |y|^l\, |u(y)| \leqq (1 + |y|^k)\, |u(y)|\,.$$

Die Majorante hängt nicht von x ab und ist summierbar. Deshalb ist die Differentation unter dem Integralzeichen gestattet

$$\frac{\partial^l \tilde{u}}{\partial y_1^{l_1}\, \partial y_2^{l_2} \ldots \partial y_m^{l_m}} = (-i)^l\, (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} y_1^{l_1}\, y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m}\, e^{-i(x,y)}\, u(y)\, dy\,, \tag{3}$$

und die Ableitungen, deren Ordnung k nicht übersteigt, sind stetig. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 23.1.2. *Die Funktion $u(x)$ sei in jedem beliebigen Punkt $x \in E_m$ k-mal stetig differenzierbar. Weiterhin sollen die Funktion $u(x)$ und sämtliche ihrer Ableitungen, deren Ordnung k nicht übersteigt, in E_m summierbar sein und im Unendlichen verschwinden. Dann gilt für hinreichend große Werte $|x|$ die Beziehung*

$$\tilde{u}(x) = (F\, u)(x) = O(|x|^{-k})\,.$$

Beweis. Wir betrachten irgend einen Punkt $x \in E_m$ und bezeichnen mit j den Index derjenigen seiner Koordinaten, die dem Betrage nach am größten ist. Das Integral (1) unterziehen wir k-mal der partiellen Integration bezüglich y_j. Dabei verschwinden alle integralfreien Glieder, und es ergibt sich

$$\tilde{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} (i\,x_j)^{-k} \int_{E_m} \frac{\partial^k u}{\partial y_j^k} e^{-i(x,y)}\, dy\,.$$

Wir schätzen $\tilde{u}(x)$ dem Betrag nach ab:

$$|\tilde{u}(x)| \leqq (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |x_j|^{-k} \int_{E_m} \left| \frac{\partial^k u}{\partial y_j^k} \right| dy\,.$$

Die Koordinate x_j ist dem Betrage nach die größte, deshalb gilt

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \leqq \sqrt{m}\,|x_j|\,, \qquad \frac{1}{|x_j|} \leqq \frac{\sqrt{m}}{|x|}$$

und schließlich

$$|\tilde{u}(x)| \leqq \frac{c}{|x|^k}\,,$$

wobei man zum Beispiel

$$c = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} m^{\frac{k}{2}} \int_{E_m} \sum \left| \frac{\partial^k u(y)}{\partial y_1^{k_1}\, \partial y_2^{k_2} \ldots \partial y_m^{k_m}} \right| dy$$

wählen kann. Die Summation erstreckt sich dabei über alle Tupel nicht negativer Indizes $(k_1, \ldots, k_m)$ derart, daß $k_1 + \cdots + k_m = k$ gilt. Der Satz ist somit bewiesen.

Unter gewissen Bedingungen, die der Funktion $u(x)$ auferlegt werden können, gilt für die FOURIER-Transformation die folgende *Umkehrformel:*

$$u(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{u}(y)\, e^{i(x,y)}\, dy\,. \tag{4}$$

Die Funktion $\tilde{u}$ ist im allgemeinen nicht summierbar in E_m. Deshalb besteht die Notwendigkeit, jedes Mal aufzuzeigen, in welchem Sinne das Integral (4) zu verstehen ist. Es versteht sich natürlich von selbst, daß dieses Integral im gewöhnlichen Sinn verstanden werden kann, wenn $\tilde{u}$ in E_m summierbar ist. Es gilt zum Beispiel folgender Satz.

Satz 23.1.3. *Die Funktion $u(x)$ sei nur in einem gewissen endlichen Gebiet verschieden von Null und besitze im gesamten Raum stetige erste Ableitungen. Dann gilt für die* FOURIER-*Transformation die Umkehrformel* (4), *in der das Integral im folgenden Sinne zu verstehen ist:*

$$\int_{E_m} \tilde{u}(y)\, e^{i(x,y)}\, dy = \lim_{N_m \to \infty} \int_{-N_m}^{N_m} \left\{ \ldots \lim_{N_2 \to \infty} \int_{-N_2}^{N_2} \left\{ \lim_{N_1 \to \infty} \int_{-N_1}^{N_1} \tilde{u}(y)\, e^{i x_1 y_1}\, dy_1 \right\} \times \right.$$
$$\left. \times\, e^{i x_2 y_2}\, dy_2 \ldots \right\} e^{i x_m y_m}\, dy_m\,. \tag{5}$$

Beweis. Das endliche Gebiet, in dem die Funktion $u(x)$ von Null verschieden ist, befindet sich im Inneren eines gewissen Würfels. Es möge dies der Würfel

$$-a \leqq x_k \leqq a, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

sein.

Offensichtlich ist die Funktion $u(x)$ bezüglich x_m bei fixierten Werten der restlichen Argumente summierbar und besitzt in jedem Punkt des Raumes die Ableitung nach x_m. Indem wir den Satz über die Invertierbarkeit der eindimensionalen FOURIER-Transformation auf die Funktion u_1 [Formel (2)] anwenden, erhalten wir

$$u(x) = \lim_{N_m \to \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-N_m}^{N_m} u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{i x_m y_m}\, dy_m .$$

Weiter gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)|\, dx_{m-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{-i x_m y_m} dy_m \right| dx_{m-1} \leqq$$

$$\leqq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)|\, dx_{m-1}\, dy_m =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} |u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)|\, dx_{m-1}\, dy_m \leqq \frac{M a^2}{\sqrt{2\pi}};$$

dabei ist mit M die obere Grenze der Funktionswerte von u bezeichnet. Somit ist die Funktion $u_1(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ bezüglich x_{m-1} bei beliebigen Werten der restlichen Argumente summierbar.

Wir zeigen jetzt, daß die Ableitung $\frac{\partial u_1}{\partial x_{m-1}}$ in jedem Punkt existiert. Wir stellen u_1 in der Gestalt

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{-i x_m y_m}\, dy_m$$

dar. Rechts steht das Integral einer stetig differenzierbaren Funktion, welches sich über ein endliches Intervall erstreckt. Ein derartiges Integral besitzt stetige Ableitungen nach sämtlichen Argumenten, von denen es abhängt, damit auch nach x_{m-1}.

Dieselbe Umkehrformel für die eindimensionale FOURIER-Transformation liefert jetzt

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \lim_{N_{m-1} \to \infty} \int_{-N_{m-1}}^{N_{m-1}} u_2(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, x_m)\, e^{i x_{m-1} y_{m-1}}\, dy_{m-1},$$

demnach gilt

$$u(x) = (2\pi)^{-1} \lim_{N_m \to \infty} \int_{-N_m}^{N_m} \left\{ \lim_{N_{m-1} \to \infty} \int_{-N_{m-1}}^{N_{m-1}} u_2(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, y_m) \times \right.$$

$$\left. \times e^{i x_{m-1} y_{m-1}} \, dy_{m-1} \right\} e^{i x_m y_m} \, dy_m .$$

Wenn wir diesen Prozeß fortsetzen, erhalten wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten die Formel (5) [1]).

§ 2. Die Herleitung der POISSONschen Formel

Wir betrachten die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \tag{1}$$

mit der Randbedingung

$$u|_{t=0} = \varphi(x) . \tag{2}$$

Wir setzen voraus, daß alle im weiteren auszuführenden Operationen erlaubt sind; unter diesen Voraussetzungen leiten wir die Formel für die Lösung des CAUCHYschen Problems (1), (2) her.

Beide Seiten der Gleichung (1) unterziehen wir der FOURIER-Transformation bezüglich x

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} e^{-i(x,y)} \, dy - (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y_k^2} e^{-i(x,y)} \, dy = 0 . \tag{3}$$

Da die Integration bezüglich y und die Differentiation nach t unabhängig voneinander sind, so können wir im ersten Summanden die Reihenfolge dieser Operationen vertauschen und erhalten als Ergebnis

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} e^{-i(x,y)} \, dy = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_m} u(y,t) \, e^{-i(x,y)} \, dy = \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t} ,$$

wobei $\tilde{u}(x, t)$ die FOURIER-Transformierte der Funktion $u(x, t)$

$$\tilde{u}(x,t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} u(y,t) \, e^{-i(x,y)} \, dy$$

ist.

Jedes Integral im zweiten Summanden von (3) lösen wir partiell

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y_k^2} e^{-i(x,y)} \, dy = -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} x_k^2 \int_{E_m} u(y,t) \, e^{-i(x,y)} \, dy = -x_k^2 \, \tilde{u}(x,t) .$$

[1]) Ein allgemeinerer Satz wurde in [9] bewiesen; dort sind auch andere Sätze angeführt, die unter verschiedenen Bedingungen die Gültigkeit der Umkehrformel (4) behaupten.

Die Gleichung (3) nimmt dann die Gestalt

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + |x|^2 \tilde{u} = 0 \tag{4}$$

an. Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit der unabhängigen Veränderlichen t; die Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ übernehmen die Rolle von Parametern.

Wir integrieren die Gleichung (4) und finden

$$\tilde{u}(x, t) = C(x)\, e^{-|x|^2 t} .$$

Wenn wir hier $t = 0$ setzen, so erhalten wir

$$C(x) = \tilde{u}(x, 0) .$$

Somit ist die Funktion $C(x)$ die Fourier-Transformierte des Anfangswertes der Funktion $u(x, t)$. Nach Bedingung (2) gilt $u(x, 0) = \varphi(x)$, folglich auch

$$C(x) = \tilde{\varphi}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \varphi(y)\, e^{-i(x, y)}\, dy$$

und

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{\varphi}(x)\, e^{-|x|^2 t} .$$

Die Umkehrformel (1.4) der Fourier-Transformation liefert

$$u(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-|y|^2 t + i(x, y)}\, dy .$$

Hierin ersetzen wir $\tilde{\varphi}(y)$ durch den entsprechenden Integralausdruck und ändern danach die Reihenfolge der Integration

$$u(x, t) = (2\pi)^{-m} \int_{E_m} \varphi(z) \left\{ \int_{E_m} e^{-|y|^2 t + i(x - z, y)}\, dy \right\} dz . \tag{5}$$

Nunmehr nehmen wir die Berechnung des inneren Integrals in der Formel (5) vor. Es gilt

$$\int_{E_m} e^{-|y|^2 t + i(x - z, y)}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum_{k=1}^{m} [-y_k^2 t + i(x_k - z_k) y_k]}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_m =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 t + i(x_k - z_k) y}\, dy . \tag{6}$$

Im Integral auf der rechten Seite ist y eine reelle Veränderliche, die in den Grenzen $-\infty < y < +\infty$ variiert. Wir greifen den k-ten Faktor im Pro-

dukt (6) heraus und führen der Kürze halber die Bezeichnung $x_k - z_k = \alpha$ ein. Die Aufgabe wird also auf die Berechnung des Integrals

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 t + i\alpha y}\, dy = e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy$$

zurückgeführt.

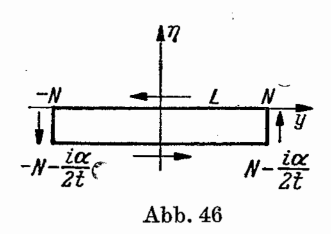


Abb. 46

Wir betrachten die komplexe Ebene der Veränderlichen $\zeta = y + i\eta$. Der Bestimmtheit halber sei $\alpha > 0$. Wir konstruieren das in Abb. 46 dargestellte Rechteck, das durch die Randkurve L begrenzt wird. Der CAUCHYsche Integralsatz liefert

$$\int_L e^{-t\zeta^2} d\zeta = 0 ,$$

oder ausführlicher geschrieben,

$$\int_{-N}^{+N} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy + \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N+i\eta)^2} i\, d\eta - \int_{-N}^{N} e^{-ty^2} dy - \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(-N+i\eta)^2} i\, d\eta = 0 .$$

Es strebe nun $N \to \infty$. Dabei konvergiert das zweite und vierte Integral gegen Null. In der Tat, es gilt

$$\left| \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N\pm i\eta)^2} i\, d\eta \right| \leq \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N^2-\eta^2)} d\eta = e^{-tN^2} \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{t\eta^2} d\eta \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2} dy .$$

Es ist leicht einzusehen, daß sich im Falle $\alpha < 0$ das gleiche Ergebnis ergibt. Die Substitution $y \cdot \sqrt{t} = s$ liefert weiterhin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2} dy = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}} .$$

Nunmehr gilt

$$e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x_k - z_k)^2}{4t}} ,$$

und es erweist sich, daß das Integral (6) gleich der Größe

$$\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{4t^2}\sum_{k=1}^{m} (x_k - z_k)^2} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t^2}} , \qquad r = |x - z| ,$$

ist.

Indem wir dieses Resultat in die Formel (5) einsetzen, erhalten wir die sogenannte POISSON*sche Formel.*

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int\limits_{E_m} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz\,. \tag{7}$$

§ 3. Die Begründung der POISSONschen Formel

Wir versuchen hier nicht, die Gesetzmäßigkeit der im vorhergehenden Paragraphen ausgeführten Operationen zu beweisen. Statt dessen weisen wir unmittelbar nach, daß durch die POISSONsche Formel eine beschränkte Lösung des CAUCHYschen Problems für die Wärmeleitungsgleichung (2.1) geliefert wird unter der einzigen Voraussetzung, daß die Anfangsfunktion $\varphi(x)$ im Raum E_m stetig und beschränkt ist. Zuerst zeigen wir, daß die POISSONsche Formel eine Funktion definiert, die für $t > 0$ stetig ist.

Im $(m+1)$-dimensionalen Raum der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ betrachten wir ein Gebiet, das durch die Ungleichungen

$$|x|^2 \leqq a^2\,, \qquad 0 \leqq t \leqq T \tag{1}$$

definiert wird, wobei a und T positive Konstanten sind. Wir zeigen, daß das in die POISSONsche Formel eingehende Integral

$$\int\limits_{E_m} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz \tag{2}$$

im Gebiet (1) gleichmäßig bezüglich x und t konvergiert. Wir nehmen eine hinreichende große Zahl R und schätzen das Integral

$$\int\limits_{|z|>R} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz$$

ab.

Die Funktion $\varphi(z)$ ist beschränkt; es sei $|\varphi(z)| \leqq M = \text{const}$. Weiter gilt $r = |x - z| \geqq |z| - |x| \geqq |z| - a$. Wir nehmen an, daß $R > 2a$ ist. Dann ergibt sich $a < \frac{R}{2} \leqq \frac{|z|}{2}$ und $r > \frac{|z|}{2}$. Nunmehr gilt

$$e^{-\frac{r^2}{4t}} < e^{-\frac{|z|^2}{16T}}$$

und folglich

$$\left| \int\limits_{|z|>R} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz \right| < M \int\limits_{|z|>R} e^{-\frac{|z|^2}{16T}}\, dz = M\, |S_1| \int\limits_R^\infty e^{-\frac{\varrho^2}{16T}}\, \varrho^{m-1}\, d\varrho\,. \tag{3}$$

Da das Integral

$$\int\limits_0^\infty \varrho^{m-1}\, e^{-\frac{\varrho^2}{16T}}\, d\varrho$$

konvergiert, so ist das Integral auf der rechten Seite in (3) beliebig klein bei hinreichend großem R. Da es weder von x, noch von t abhängt, konvergiert das Integral (2) gleichmäßig. Daraus folgt, daß die durch die POISSONsche Formel definierte Funktion für $t > 0$ stetig ist.

Wir zeigen, daß für $t > 0$ die Funktion $u(x, t)$ nach t und nach den Koordinaten des Punktes x beliebig oft differenzierbar ist und daß man alle Ableitungen erhalten kann, indem man die POISSONsche Formel unter dem Integralzeichen differenziert.

Wir betrachten zum Beispiel die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$. Wenn man die rechte Seite der POISSONschen Formel formal nach t differenziert, so ergibt sich der Ausdruck

$$-\frac{m}{2^{m+1}\pi^{\frac{m}{2}}t^{\frac{m+2}{2}}}\int\limits_{E_m}\varphi(z)\,e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dz+\frac{1}{2^{m+2}\pi^{\frac{m}{2}}t^{\frac{m+4}{2}}}\int\limits_{E_m}r^2\,\varphi(z)\,e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dz\,. \tag{4}$$

Wie wir bereits sahen, konvergiert das erste Integral gleichmäßig im Gebiet (1). Genauso überprüft man, daß in diesem Gebiet auch das zweite Integral gleichmäßig konvergiert. Wie üblich folgert man nun, daß die Ableitung existiert, stetig ist und mit dem Ausdruck (4) übereinstimmt. Die Existenz der übrigen Ableitungen wird analog nachgewiesen.

Durch unmittelbare Differentiation wird bewiesen, daß die durch die POISSONsche Formel gelieferte Funktion der Wärmeleitungsgleichung (2.1) genügt.

Abschließend zeigen wir, daß die Funktion $u(x, t)$ beschränkt ist und die Anfangsbedingung (2.2)

$$\lim_{t\to 0} u(x, t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m}\int\limits_{E_m}\varphi(z)\,e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dz = \varphi(x)$$

erfüllt. Nach der Variablensubstitution $z = x + 2\sqrt{t}\,\xi$ erhält die POISSONsche Formel die Gestalt

$$u(x, t) = \pi^{-\frac{m}{2}}\int\limits_{E_m}\varphi\,(x + 2\sqrt{t}\,\xi\,)\,e^{-|\xi|^2}\,d\xi\,. \tag{5}$$

Bekanntlich gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varrho^2}\,d\varrho = \sqrt{\pi}\,.$$

Nunmehr ergibt sich leicht

$$\pi^{-\frac{m}{2}}\int\limits_{E_m} e^{-|\xi|^2}\,d\xi = 1\,. \tag{6}$$

Aus Formel (5) folgt jetzt

$$|u(x, t)| \leqq M\,\pi^{-\frac{m}{2}}\int\limits_{E_m} e^{-|\xi|^2}\,d\xi = M\,,$$

die Funktion $u(x, t)$ ist somit beschränkt. Nach den Formeln (5) und (6) finden wir

$$u(x, t) - \varphi(x) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) - \varphi(x)]\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi\,. \tag{7}$$

Das Integral in der Formel (7) zerlegen wir in zwei Integrale, deren Integrationsbereiche die Gebiete $|\xi| > R$ und $|\xi| < R$ sind; hierbei ist R eine gewisse Konstante. Wir erhalten

$$\left| \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{|\xi|>R} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) - \varphi(x)]\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi \right| \leqq$$

$$\leqq 2\, M\, \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{|\xi|>R} e^{-|\xi|^2}\, d\xi = 2\, M\, \pi^{-\frac{m}{2}} |S_1| \int_R^\infty \varrho^{m-1}\, e^{-\varrho^2}\, d\varrho\,.$$

Das Integral

$$\int_0^\infty \varrho^{m-1}\, e^{-\varrho^2}\, d\varrho$$

konvergiert, und man kann ein $R_0(\varepsilon)$ so auswählen, daß für $R > R_0(\varepsilon)$

$$2\, M\, \pi^{-\frac{m}{2}} |S_1| \int_R^\infty \varrho^{m-1}\, e^{-\varrho^2}\, d\varrho < \varepsilon$$

gilt. Wir fixieren irgendein $R > R_0(\varepsilon)$. Dann kann man ein $t_0(\varepsilon)$ finden, so daß für $0 < t < t_0(\varepsilon)$ und für beliebiges ξ, $|\xi| \leqq R$, die Beziehung

$$|\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Gültigkeit hat.

Somit ergibt sich

$$\left| \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{|\xi|<R} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) - \varphi(x)]\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi \right| < \pi^{-\frac{m}{2}} \frac{\varepsilon}{2} \int_{E_m} e^{-|\xi|^2}\, d\xi = \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$|u(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon\,, \qquad 0 < t < t_0(\varepsilon)\,.$$

Damit ist die Begründung der Poissonschen Formel beendet.

Wenn die Integration der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \tag{8}$$

unter der Cauchyschen Anfangsbedingung (2.2) vorgenommen werden soll, so kann man nach koordinatenweiser Anwendung der Fourier-Transformation die

Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + x^2 \tilde{u} = \tilde{f}(x, t) \tag{9}$$

und die Anfangsbedingung

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) \tag{10}$$

erhalten, wobei in Gleichung (9)

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{E_m} f(y, t)\, e^{-i(x, y)}\, dy$$

gesetzt ist.

Den Gleichungen (9) und (10) genügt die Funktion

$$\tilde{u}(x, t) = e^{-|x|^2 t}\, \tilde{\varphi}(x) + \int_0^t e^{-x^2(t-\tau)}\, \tilde{f}(x, \tau)\, d\tau\,.$$

Indem wir auf diese Funktion die inverse FOURIER-Transformation anwenden, erhalten wir für die gesuchte Funktion schließlich den Ausdruck

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int_{E_m} \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz + \int_0^t \int_{E_m} f(z, \tau) \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^m}\, e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}\, dz\, d\tau\,,$$

$$r = |z - x|\,.$$

§ 4. Die unendliche Geschwindigkeit der Wärmeübertragung

Aus der POISSONschen Formel folgt, daß sich die Wärme mit unendlich großer Geschwindigkeit ausbreitet. In der Tat, stellen wir uns vor, daß das wärmeabgebende Medium den ganzen Raum E_m ausfüllt. Im Anfangszeitpunkt habe das gesamte Medium, mit Ausnahme eines gewissen endlichen Gebietes D, die Temperatur Null $(\varphi(x) \equiv 0)$, die Punkte des Gebietes D hingegen seien auf die Temperatur $\varphi(x) > 0$ erhitzt. In einem beliebigen Punkt $x \in E_m$ wird zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ die Temperatur des Mediums $u(x, t)$ durch die POISSONsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int_D \varphi(z)\, e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dz \tag{1}$$

gegeben. Das Integral über $E_m \setminus D$ verschwindet, da in diesem Gebiet $\varphi(x) = 0$ ist. Aus der Formel (1) geht hervor, daß $u(x, t) > 0$ ist. Somit gelangt im Zeitraum t Wärme aus dem Gebiet D in den Punkt x, wie klein t und wie weit x

von D auch immer entfernt sein mögen. Das bedeutet aber, daß sich die Wärme mit unendlich großer Geschwindigkeit ausbreitet.

Dieses physikalisch widersprüchliche Ergebnis führt in der Praxis nicht zu Komplikationen. Wenn $|x|$ groß, aber t klein ist, so ist in der Formel (1) der negative Exponene $-\frac{r^2}{4t}$ dem Betrag nach groß, und der Wert der Temperatur $u(x, t)$ ist derartt klin, daß er vernachlässigt werden kann. Praktisch liefert also die POISSONsche Formel (bis auf zu vernachlässigende kleine Größen) eine gewisse endliche Geschwindigkeit der Wärmeausbreitung.

KAPITEL 24

DAS CAUCHYSCHE PROBLEM FÜR DIE WELLENGLEICHUNG

§ 1. Die Anwendung der FOURIER-Transformation

Wir suchen die Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \tag{1}$$

im gesamten Raum E_m und zum Zeitpunkt $t > 0$. Die gesuchte Funktion genüge den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x) , \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) . \tag{2}$$

Wir nehmen an, daß alle unten ausgeführten Operationen gesetzmäßig sind. Auf beide Seiten der Gleichungen (1) und (2) wenden wir die FOURIER-Transformation an. Wenn wir genauso wie im Fall der Wärmeleitungsgleichung verfahren, so erhalten wir das folgende CAUCHYsche Problem für eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + |x|^2\,\tilde{u} = 0 , \tag{3}$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(x) , \qquad \left.\frac{d\tilde{u}}{dt}\right|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(x) ; \tag{4}$$

hierbei bedeutet das Symbol $\sim$ die FOURIER-Transformation.

Das allgemeine Integral der Gleichung (3) hat die Gestalt

$$\tilde{u}(x, t) = A(x) \cos |x|\, t + B(x) \sin |x|\, t .$$

Für $t = 0$ finden wir

$$\tilde{\varphi}_0(x) = A(x) , \qquad \tilde{\varphi}_1(x) = |x|\, B(x) ,$$

und wir erhalten die Lösung der Aufgabe (3), (4)

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{\varphi}_0(x) \cos |x|\, t + \tilde{\varphi}_1(x) \frac{\sin |x|\, t}{|x|} . \tag{5}$$

Nach Anwendung der inversen FOURIER-Transformation ergibt sich folgende Formel für die gesuchte Lösung:

$$u(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \left[\tilde{\varphi}_0(y) \cos |y|\, t + \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin |y|\, t}{|y|}\right] e^{i(x, y)}\, dy . \tag{6}$$

Die Begründung der Formel (6) nehmen wir unter folgenden Annahmen vor: Wir setzen voraus, daß die Funktion $\varphi_0(x)$ im gesamten Raum E_m stetige Ableitungen bis zur Ordnung $m + 3$ einschließlich und die Funktion $\varphi_1(x)$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung $m + 2$ einschließlich besitzt. Weiter nehmen wir an, daß die Anfangsfunktionen nebst ihren Ableitungen der soeben erwähnten Ordnungen nur in einem gewissen endlichen Gebiet des Raumes E_m von Null verschieden sind.

Aus dem Satz 23.1.2 folgt für genügend große $|x|$ die Gültigkeit der Abschätzungen

$$\tilde{\varphi}_0(x) = O(|x|^{-m-3}), \qquad \tilde{\varphi}_1(x) = O(|x|^{-m-2}).$$

In diesem Falle besitzt der Integrand in (6) im Unendlichen die Abschätzung $O(|y|^{-m-3})$, die ersten und zweiten Ableitungen des Integranden nach $x_1, \ldots, x_m, t$ besitzen die Abschätzungen $O(|y|^{-m-2})$ und $O(|y|^{-m-1})$ entsprechend. In allen Fällen gelten diese Abschätzungen gleichmäßig bezüglich x und t. Daraus folgt, daß sowohl das Integral (6) als auch die Integrale, die aus diesem durch einmalige bzw. zweimalige Differentiation hervorgehen, gleichmäßig bezüglich x und t konvergieren. In diesem Falle ist aber die Funktion (6) stetig und zweimal stetig differenzierbar nach den Raumkoordinaten und der Zeit; außerdem kann man diese Ableitungen durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhalten.

Nunmehr zeigt man ohne Schwierigkeiten, daß die Funktion (6) den Anfangsbedingungen (2) und der Wellengleichung (1) genügt. Wenn wir in (6) $t = 0$ setzen, so finden wir

$$u(x, 0) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\varphi}_0(y)\, e^{i(x, y)}\, dy = \varphi_0(x);$$

man sieht unschwer ein, daß die Bedingungen des Satzes 23.1.3 im vorliegenden Fall erfüllt sind. Wenn wir die Formel (6) nach t differenzieren und $t = 0$ setzen, dann finden wir außerdem

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\varphi}_1(y)\, e^{i(x, y)}\, dy = \varphi_1(x).$$

Weiterhin ergibt sich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} |y|^2 \left[\tilde{\varphi}_0(y) \cos |y|\, t + \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin |y|\, t}{|y|}\right] e^{i(x, y)}\, dy,$$

$$\Delta u = -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} |y|^2 \left[\tilde{\varphi}_0(y) \cos |y|\, t + \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin |y|\, t}{|y|}\right] e^{i(x, y)}\, dy = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Die Funktion (6) genügt folglich der Wellengleichung.

Die gleiche Methode, nämlich die Zurückführung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Hilfe der FOURIER-Transformation, kann man auch auf die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t) \tag{7}$$

anwenden.

Es sei für diese Gleichung das CAUCHYsche Problem mit den Anfangsbedingungen (2) gestellt. Wir wenden die FOURIER-Transformation koordinatenweise an. Indem wir die Bezeichnung

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{E_m} f(y, t)\, e^{-i(x, y)}\, dy$$

einführen, erhalten wir

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + |x|^2\, \tilde{u} = \tilde{f}(x, t)\,. \tag{8}$$

Die Lösung dieser Gleichung, die den Bedingungen (4) genügt, ist die Funktion

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{\varphi}_0(x) \cos |x|\, t + \tilde{\varphi}_1(x) \frac{\sin |x|\, t}{|x|} + \int\limits_0^t \tilde{f}(x, \tau) \sin \frac{|x|\,(t-\tau)}{|x|}\, d\tau\,. \tag{9}$$

Wenn die Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ und $f(x, t)$ eine genügende Anzahl von Ableitungen besitzen und nur in einem endlichen Gebiet, das die unabhängigen Veränderlichen durchlaufen, von Null verschieden sind[1]), so liefert die auf die Funktion (9) angewandte inverse FOURIER-Transformation die Lösung des CAUCHYschen Problems für die inhomogene Wellengleichung.

§ 2. Die Umformung der Lösung

Die Formel (1.6), welche die Lösung des CAUCHYschen Problems für die Wellengleichung liefert, kann noch verbessert werden. Vor allem erhält man $2\,m$-fache Integrale, wenn man die Funktionen $\tilde{\varphi}_0(y)$ und $\tilde{\varphi}_1(y)$ durch ihre Ausdrücke in Gestalt der FOURIER-Transformationen von φ_0 und φ_1 ersetzt; in Wirklichkeit kommt man mit Integralen wesentlich niedriger Vielfachheit aus. Weiterhin mußten wir für die Begründung der Formel (1.6) die Existenz einer übermäßig großen Anzahl von Ableitungen fordern. Überflüssig ist außerdem auch die Forderung, daß diese Funktionen nur in einem endlichen Gebiet verschieden von Null sind. Schließlich ist aus der Gestalt der Formel (1.6) nicht unmittelbar ersichtlich, daß der Wert $u(x, t)$ nur durch die Werte der Anfangsfunktionen im Abhängigkeitsgebiet bestimmt wird (s. § 4, Kap. 21).

Wir versuchen, die Formel (1.6) so umzuformen, daß sie für eine Analyse zugänglicher wird. Die endgültigen Formeln werden im nächsten Paragraphen

---

[1]) Diese Forderungen lassen sich wesentlich abschwächen.

für den Fall $m = 3$ hergeleitet. Hier werden einige vorbereitende Umformungen für den allgemeinen Fall vorgenommen.

Wir führen zunächst die Bezeichnung

$$T_\omega(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\omega}(y) \frac{\sin |y| t}{|y|} e^{i(x, y)} dy \tag{1}$$

ein. Wenn die Differentiation unter dem Integralzeichen erlaubt ist, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} T_\omega(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\omega}(y)\, e^{i(x, y)} \cos |y|\, t\, dy ,$$

und Formel (1.6) kann in der etwas bequemeren Gestalt

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} T_{\varphi_0}(x, t) + T_{\varphi_1}(x, t) \tag{2}$$

geschrieben werden.

Unsere Aufgabe wird darin bestehen, dem Ausdruck $T_\omega(x, t)$ eine nach Möglichkeit einfache Gestalt zu verleihen. Indem wir $\tilde{\omega}(y)$ durch den Ausdruck

$$\tilde{\omega}(y) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \omega(z)\, e^{-i(y, z)} dz$$

ersetzen, finden wir

$$T_\omega(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \frac{\sin |y| t}{|y|} e^{i(x, y)} \left\{ \int_{E_m} \omega(z)\, e^{-i(y, z)} dz \right\} dy .$$

Die Integrationsreihenfolge kann hier nicht geändert werden, da wir anderenfalls ein divergentes Integral erhielten. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, führen wir die neue Größe

$$T_\omega(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\omega}(y)\, e^{-\lambda |y|} \frac{\sin |y| t}{|y|} e^{i(x, y)} dy , \quad \lambda > 0 \tag{3}$$

in die Betrachtung ein.

Die Funktion $\omega(x)$ erfülle die gleichen Bedingungen, wie auch $\varphi_1(x)$ (siehe § 1). Aus diesen Bedingungen und aus dem Satz 23.1.2 folgt $\tilde{\omega} \in L(E_m)$. Nunmehr durchlaufe t das Intervall $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} = \text{const} > 0$. Aus der Ungleichung $|\sin \alpha| \leqq |\alpha|$ schließen wir, daß der Integrand in (3) die summierbare Majorante $\bar{t}\, |\tilde{\omega}(y)|$ besitzt, welche nicht von x, t und λ abhängt. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz

$$T_\omega(x, t, \lambda) \underset{\lambda \to 0}{\to} T_\omega(x, t) \tag{4}$$

bezüglich x und t, wenn x den Raum E_m und t ein beliebiges endliches Intervall durchläuft.

Im Integral

$$T_\omega(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-m} \int_{E_m} e^{-\lambda|y| + i(x, y)} \frac{\sin |y| t}{|y|} \left\{ \int_{E_m} \omega(z)\, e^{-i(z, y)}\, dz \right\} dy \tag{5}$$

kann man die Integrationsreihenfolge ändern und erhält

$$T_\omega(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-m} \int_{E_m} \omega(z) \left\{ \int_{E_m} e^{-\lambda|y| + i(x - z, y)} \frac{\sin |y| t}{|y|}\, dy \right\} dz\,.$$

Das innere Integral konvergiert. Wir werden es berechnen.

Dazu führen wir die Bezeichnungen $x - z = p$ und

$$\Phi(p, t, \lambda) = \int_{E_m} e^{-\lambda|y| + i(p, y)} \frac{\sin |y| t}{|y|}\, dy \tag{6}$$

ein. Dann findet man

$$\frac{\partial \Phi(p, t, \lambda)}{\partial t} = \int_{E_m} e^{-\lambda|y| + i(p, y)} \cos |y|\, t\, dy\,; \tag{7}$$

dabei ist aus der Formel (6) ersichtlich, daß $\Phi|_{t=0} = 0$ ist. Es sei bemerkt, daß

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\, \Phi_1(p, t, \lambda) + \frac{1}{2}\, \Phi_1(p, -t, \lambda) \tag{8}$$

gilt, wobei

$$\Phi_1(p, t, \lambda) = \int_{E_m} \exp\{-(\lambda - i\,t)\, |y| + i(p, y)\}\, dy \tag{9}$$

ist. Wir führen Kugelkoordinaten mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung ein und bezeichnen diese mit $\varrho, \nu_1, \ldots, \nu_{m-2}, \nu_{m-1}$, so daß $|y| = \varrho$ gilt. Dabei ist $dy = \varrho^{m-1}\, d\varrho\, dS_1$. Weiterhin bezeichnen wir mit r den Abstand zwischen den Punkten x und z, $r = |x - z| = |p|$, und mit γ den Winkel zwischen den Vektoren p und y. Dann gilt

$$(p, y) = r\, \varrho \cos \gamma\,.$$

Nunmehr erhalten wir

$$\Phi_1(p, t, \lambda) = \int_{S_1} \left\{ \int_0^\infty e^{-(\lambda - i\,t - i\,r \cos \gamma)\varrho}\, \varrho^{m-1}\, d\varrho \right\} dS_1 = (m-1)! \int_{S_1} \frac{dS_1}{(\lambda - i\,t - i\,r \cos \gamma)^m}\,. \tag{10}$$

Wir wählen die cartesischen Koordinaten derart, daß die Koordinatenachse $O\,y_1$ längs des Vektors p gerichtet ist. Die anderen Koordinatenachsen kann man beliebig wählen, allerdings so, daß das System ein rechtwinkliges bleibt. Bei einer derartigen Koordinatenwahl gilt $\nu_1 = \gamma$. Der allgemeinen Formel

$$dS_1 = \sin^{m-2} \nu_1 \sin^{m-3} \nu_2 \ldots \sin \nu_{m-2}\, d\nu_1\, d\nu_2 \ldots d\nu_{m-1}$$

kann man dann die Gestalt

$$dS_1 = \sin^{m-2} \gamma \, d\gamma \, d\sigma_1$$

verleihen, wobei

$$d\sigma_1 = \sin^{m-3} v_2 \ldots \sin v_{m-2} \, dv_2 \ldots dv_{m-1}$$

das Oberflächenelement der Einheitskugel im $(m-1)$-dimensionalen Raum ist. Indem wir diesen Ausdruck in Formel (10) einsetzen, erhalten wir

$$\Phi_1(p, t, \lambda) = (m-1)! \, |\sigma_1| \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2} \gamma \, d\gamma}{(\lambda - i\,t - i\,r \cos \gamma)^m}$$

oder, da im $(m-1)$-dimensionalen Raum der Flächeninhalt der Oberfläche für die Einheitskugel gleich

$$|\sigma_1| = \frac{2\,\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}$$

ist,

$$\Phi_1(p,t,\lambda) = \frac{2\,(m-1)!\,\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2} \gamma \, d\gamma}{(\lambda - i\,t - i\,r \cos \gamma)^m}. \tag{11}$$

Das letzte ist ein Elementarintegral und kann leicht gelöst werden. Im allgemeinen Fall allerdings ist das Resultat etwas unhandlich, deshalb beschränken wir uns im weiteren nur auf den Fall $m = 3$.

§ 3. Der Fall des dreidimensionalen Raumes

Wenn $m = 3$ ist, so gilt $\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) = \Gamma(1) = 1$, und Formel (2.11) liefert

$$\Phi_1(p, t, \lambda) = 4\,\pi \int_0^\pi \frac{\sin \gamma \, d\gamma}{(\lambda - i\,t - i\,r \cos \gamma)^3} = \frac{2\,\pi}{i\,r}\left[\frac{1}{(\lambda - i\,t - i\,r)^2} - \frac{1}{(\lambda - i\,t + i\,r)^2}\right].$$

Nach Formel (2.8) finden wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\pi}{i\,r}\left[\frac{1}{(\lambda - i\,t - i\,r)^2} - \frac{1}{(\lambda - i\,t + i\,r)^2} + \frac{1}{(\lambda + i\,t - i\,r)^2} - \frac{1}{(\lambda + i\,t + i\,r)^2}\right].$$

Da $\Phi|_{t=0} = 0$ ist, ergibt sich

$$\Phi(p, t, \lambda) = \frac{8\,\pi\,t\,\lambda}{[\lambda^2 + (t-r)^2][\lambda^2 + (t+r)^2]}.$$

Daraus erhalten wir nach Formel (2.5)

$$T_\omega(x, t, \lambda) = \frac{t}{\pi^2} \int_{E_3} \frac{\lambda\,\omega(z)\,dz}{[\lambda^2 + (t-r)^2][\lambda^2 + (t+r)^2]}$$

und schließlich

$$T_\omega(x, t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{t}{\pi^2} \int_{E_3} \frac{\lambda\, \omega(z)\, dz}{[\lambda^2 + (t - r)^2]\,[\lambda^2 + (t + r)^2]} . \tag{1}$$

Es sei erwähnt, daß für $\lambda \to 0$ der Integrand gegen Null konvergiert, wenn $r \neq t$ ist.

Wir führen Kugelkoordinaten mit dem Mittelpunkt im Punkte x ein. Eine dieser Koordinaten ist r; dabei gilt $dz = r^2\, dr\, dS_1$ und

$$T_\omega(x, t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{t}{\pi^2} \int_{S_1} \left\{ \int_0^\infty \frac{\lambda\, \omega(z)\, r^2\, dr}{[\lambda^2 + (t - r)^2]\,[\lambda^2 + (t + r)^2]} \right\} dS_1 . \tag{2}$$

Den Grenzübergang im Integral (2) führen wir nicht streng durch, also ohne die nötige Begründung. Das ist auch nicht erforderlich, da die strenge Begründung später für die endgültige Formel (die sogenannte KIRCHHOFFsche Formel) gegeben wird.

Im inneren Integral zerlegen wir den Integrationsbereich in drei Intervalle

$$(0, \infty) = (0, t - \delta) \cup [t - \delta, t + \delta] \cup (t + \delta, \infty);$$

dabei ist δ eine Konstante, für die $0 < \delta < t$ gilt. Die Formel (2) nimmt dann die Gestalt

$$\begin{aligned} T_\omega(x, t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{t}{\pi^2} \Bigg\{ & \int_{S_1} \left[\int_0^{t-\delta} \frac{\lambda\, \omega(z)\, r^2\, dr}{[\lambda^2 + (t - r)^2]\,[\lambda^2 + (t + r)^2]} \right] dS_1 + \\ & + \int_{S_1} \left[\int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{\lambda\, \omega(z)\, r^2\, dr}{[\lambda^2 + (t - r)^2]\,[\lambda^2 + (t + r)^2]} \right] dS_1 + \\ & + \int_{S_1} \left[\int_{t+\delta}^{\infty} \frac{\lambda\, \omega(z)\, r^2\, dr}{[\lambda^2 + (t - r)^2]\,[\lambda^2 + (t + r)^2]} \right] dS_1 \Bigg\} \end{aligned} \tag{2a}$$

an. In den Intervallen $(0, t - \delta)$ und $(t + \delta, \infty)$ gilt $|r - t| > \delta$, und in diesen Intervallen konvergiert der Integrand gegen Null, wenn $\lambda \to 0$ konvergiert. Wir nehmen an, ohne dies zu beweisen, daß der erste und dritte Summand in der Formel (2a) ebenfalls zusammen mit λ gegen Null konvergieren. Wir erhalten dann für $T_\omega(x, t)$ den einfacheren Ausdruck

$$T_\omega(x, t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{t}{\pi^2} \int_{S_1} \left\{ \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{\lambda\, \omega(z)\, r^2\, dr}{[\lambda^2 + (r - t)^2]\,[\lambda^2 + (r + t)^2]} \right\} dS_1 . \tag{3}$$

Wir bezeichnen die oben eingeführten Kugelkoordinaten des Punktes z mit r, ϑ, φ und schreiben

$$\omega(z) = \omega\,(x + r\,\theta)\,,$$

wobei θ der Punkt auf der Oberfläche der Einheitskugel mit den Winkelkoordinaten ϑ und φ ist. Den Integranden in (3) stellen wir als Produkt zweier Faktoren

$$\frac{\lambda}{\lambda^2 + (t - r)^2} \, \frac{\omega(z)\, r^2}{\lambda^2 + |t + r|^2}$$

dar.

Wenn die Größe δ hinreichend klein ist, so unterscheidet sich im Integral (3) r nur wenig von t; bei hinreichend kleinen λ und δ unterscheidet sich der zweite der oben angegebenen Faktoren wenig von $\frac{1}{4}\omega\,(x + \theta\, t)$. Deshalb ersetzen wir den zweiten Faktor durch die erwähnte Größe und nehmen an, daß die Beziehung

$$T_\omega(x, t) = \frac{t}{4\,\pi^2} \lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{S_1} \omega\,(x + t\,\theta) \left\{ \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{\lambda\, dr}{\lambda^2 + (t - r)^2} \right\} dS_1 \tag{4}$$

Gültigkeit hat.

Weiter gilt

$$\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{\lambda\, dr}{\lambda^2 + (t - r)^2} = 2 \arctan \frac{\delta}{\lambda} \underset{\lambda \to 0}{\to} \pi$$

und folglich

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{4\,\pi} \int\limits_{S_1} \omega\,(x + \theta\, t)\, dS_1 = \frac{t}{4\,\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \omega\,(x + \theta\, t) \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,. \tag{5}$$

Diesem Integral kann man auch eine etwas andere Gestalt verleihen. Die Gleichung $r = t$ ist die Gleichung der Oberfläche S_t für die Kugel vom Radius t mit dem Mittelpunkt im Punkte x; dabei gilt $dS_t = t^2\, dS_1$, und die Formel (5) nimmt die Gestalt

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{4\,\pi\, t} \int\limits_{S_t} \omega(z)\, dS_t \tag{6}$$

an. Nunmehr erhalten wir nach der Formel (2.2) die Lösung des CAUCHYschen Problems für die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum in der Gestalt

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\,\pi\, t} \int\limits_{S_t} \varphi_0(z)\, dS_t + \frac{1}{4\,\pi\, t} \int\limits_{S_t} \varphi_1(z)\, dS_t; \tag{7}$$

hierbei ist, wie bereits oben erwähnt, S_t die Kugeloberfläche $|z - x| = t$. Die Formel (7) heißt *KIRCHHOFFsche Formel.*

§ 4. Die Begründung der KIRCHHOFFschen Formel

Wir zeigen, daß die KIRCHHOFFsche Formel die Lösung des CAUCHYschen Problems für die Wellengleichung liefert, wenn in jedem Punkt des Raumes E_3 die Funktion $\varphi_0(z)$ stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich

und die Funktion $\varphi_1(z)$ stetige Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung besitzt. Es ist dabei nicht notwendig, dem Verhalten der Anfangswerte und ihrer Ableitungen im Unendlichen irgendwelche Beschränkungen aufzuerlegen.

Es sei $\omega(z)$ eine Funktion, die in jedem Punkt des Raumes stetige erste und zweite Ableitungen besitzt. Wir betrachten die Funktion

$$u_1(x, t) = T_\omega(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} \omega(z)\, dS_t \,. \tag{1}$$

Wenn man die Formel (3.5) benutzt, so kann man die Funktion $u_1(x, t)$ auch in der Gestalt

$$u_1(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \omega\,(x + \theta\, t) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \tag{2}$$

schreiben. Offenbar gilt

$$u_1(x, 0) = u_1(x, t)|_{t=0} = 0 \,. \tag{3}$$

Nunmehr bestimmen wir die Ableitung $\frac{\partial u_1}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \omega\,(x + t\,\theta) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi + \frac{t}{4\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial\omega}{\partial x_k}\, \theta_k \sin\theta\, d\vartheta\, d\varphi \,. \tag{4}$$

Wie üblich wird über den sich wiederholenden Index k summiert, dieses Mal in den Grenzen von 1 bis 3. Mit θ_k bezeichnen wir die Komponenten des Vektors θ. Ihre Werte sind

$$\theta_1 = \cos\vartheta \,, \qquad \theta_2 = \sin\vartheta \cos\varphi \,, \qquad \theta_3 = \sin\vartheta \sin\varphi \,.$$

Wenn wir in der Formel (4) $t = 0$ setzen, so finden wir

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\omega(x)}{4\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \omega(x) \,. \tag{5}$$

Somit genügt also die Funktion $u_1(x, t)$ den Anfangsbedingungen (3) und (5). Wir zeigen noch, daß $u_1(x, t)$ der Wellengleichung genügt.

Die Formel (4) formen wir wie folgt um:

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{u_1(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} \frac{\partial\omega(z)}{\partial z_k}\, \theta_k\, dS_t \,, \qquad z = x + t\,\theta \,.$$

Wir bemerken, daß $\theta_k = \cos(r, x_k) = \cos(\nu, x_k)$ gilt, wobei ν die äußere Normale zur Kugeloberfläche S_t ist. Der GAUSS-OSTROGRADSKIsche Integralsatz liefert

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{u_1(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{D_t} \Delta_z \omega\, dz = \frac{u_1(x, t)}{t} + \frac{I(x, t)}{4\pi t} \,. \tag{6}$$

Hierbei ist D_t die Kugel vom Radius t mit dem Mittelpunkt im Punkte x, und es wurde

$$I(x, t) = \int_{D_t} \Delta_z \omega \, dz \tag{7}$$

gesetzt. Wenn wir noch einmal nach t differenzieren und die Formel (6) anwenden, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} . \tag{8}$$

Indem wir die Formel (7) in der Gestalt

$$I(x, t) = \int_0^t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \Delta_z \omega \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

darstellen und noch einmal nach t differenzieren, finden wir

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} t^2 \Delta_z \omega \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \int_{S_t} \Delta_z \omega \, dS_t .$$

Wenn wir andererseits die Formel (2) nach den Raumkoordinaten differenzieren, so erhalten wir

$$\Delta u_1(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta_z \omega \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t} \Delta_z \omega \, dS_t , \qquad z = x + t\,\theta , \tag{9}$$

und aus den Formeln (8) und (9) folgt

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1 = 0 . \tag{10}$$

Nunmehr nehmen wir an, daß die Funktion $\omega(z)$ stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich besitzt. Wir betrachten die Funktion

$$u_2(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} T_\omega(x, t) = \frac{\partial u_1}{\partial t} . \tag{11}$$

Man sieht leicht ein, daß die Funktion u_2 stetige zweite Ableitungen besitzt. Sie genügt der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \Delta u_2 = \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - \Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1 \right) = 0 . \tag{12}$$

Die Formel (5) liefert

$$u_2(x, t)|_{t=0} = \omega(x) . \tag{13}$$

Weiter gilt

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \Delta u_1|_{t=0} = \Delta u_1(x, 0) ,$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite ist infolge der Beziehung (3) gleich Null. Somit ergibt sich

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 . \tag{14}$$

Wenn wir jetzt das eine Mal $\omega = \varphi_0$, das andere Mal $\omega = \varphi_1$ setzen und die Beziehungen (3), (5), (13) und (14) sowie die Gleichungen (10) und (12) benutzen, dann überzeugen wir uns davon, daß die durch die KIRCHHOFFsche Formel gelieferte Funktion sowohl der Wellengleichung als auch den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

genügt.

§ 5. Die hintere Wellenfront

Die KIRCHHOFFsche Formel gestattet es, eine interessante Besonderheit der Erscheinung der Wellenausbreitung im dreidimensionalen Raum aufzudecken, nämlich die Entstehung der sogenannten *hinteren Wellenfront.* Diese Besonderheit kann man unschwer aufklären, wenn man davon ausgeht, daß in der KIRCHHOFFschen Formel nur über die Oberfläche einer Kugel von veränderlichem Radius integriert wird.

Es ist offensichtlich, daß in der KIRCHHOFFschen Formel $u(x, t) = 0$ gilt, wenn $\varphi_0(z) \equiv 0$ und $\varphi_1(z) \equiv 0$ für $z \in S_t$ ist. Wir nehmen jetzt an, daß die Anfangsfunktionen nur in einem gewissen Gebiet D des Raumes E_3 von Null verschieden sind (Abb. 47). Der Punkt x befinde sich zum Beispiel außerhalb des Gebietes D. Mit δ und δ_1 bezeichnen wir entsprechend die kleinste bzw. größte Entfernung des Punktes x zu den Punkten des Randes von D.

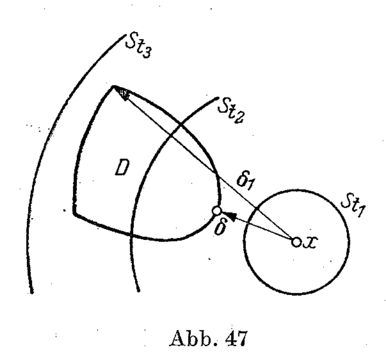


Abb. 47

Zu Zeitpunkten, die dem Anfangszeitpunkt nahe sind, nämlich solange $t < \delta$ gilt, ist der Durchschnitt der Kugeloberfläche S_t mit dem Gebiet D leer (s. die Kugeloberfläche S_{t_1} in Abb. 47). Auf dieser Kugeloberfläche sind die Anfangswerte gleich Null und $u(x, t) = 0$. Gilt dagegen $\delta < t < \delta_1$, so ist der Durchschnitt der Kugeloberfläche S_t mit dem Gebiet D nicht leer (s. die Kugeloberfläche S_{t_2} in Abb. 47). Auf dem Teil der Kugeloberfläche S_t, der innerhalb von D liegt, sind die Anfangswerte von Null verschieden, und es gilt im allgemeinen $u(x, t) \neq 0$. Diese beiden Fälle hatten wir im § 5, Kap. 21, für die Wellengleichung im Raum beliebiger Dimension aufgedeckt.

Es sei nun $t > \delta_1$. Die Kugeloberfläche S_t schneidet sich nicht mit dem Gebiet D (s. die Kugeloberfläche S_{t_3} in Abb. 47), und wiederum gilt $u(x, t) = 0$. Der Punkt x befand sich während des Zeitintervalls $\delta < t < \delta_1$ im Erregungszustand und kehrte danach in den Ruhezustand zurück.

Wenn wir das schwingende Medium zu einem Zeitpunkt betrachten, der dem Anfangszeitpunkt nicht allzu nahe ist, so stellen wir in diesem Medium Punkte dreier Typen fest: Die einen Punkte befinden sich im Ruhezustand, da die Erre-

gung sie noch nicht erreicht hat, andere Punkte befinden sich im Erregungszustand, dritte Punkte befinden sich wieder im Ruhezustand, da die Erregung durch diese schon hindurchgegangen ist. Die vordere Wellenfront (siehe § 5, Kap. 21) grenzt das Gebiet, bis zu dem die Erregung noch nicht vorgedrungen ist, von dem Gebiet ab, das sich im Erregungszustand befindet. Die Oberfläche, die das sich in Erregung befindliche Gebiet von dem Gebiet abgrenzt, durch das die Erregung schon hindurchgegangen ist, nennt man *hintere Wellenfront.* Wenn man, wie wir das oben bereits getan haben, mit δ_1 die größte Entfernung des Punktes x zum Rand des Gebietes D bezeichnet, so geht die hintere Wellenfront im Zeitpunkt $t = \delta_1$ durch den Punkt x hindurch.

Wenn die Wellengleichung in der Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0\,, \qquad a = \text{const}$$

vorliegt, so behält alles in diesem Paragraphen Gesagte seine Gültigkeit, wenn man t durch $a\,t$ ersetzt.

§ 6. Der Fall $m = 2$ (die Membranschwingungsgleichung)

Die Lösung des CAUCHYschen Problems für die Membranschwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0\,, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi_0(x) = \varphi_0(x_1, x_2)\,, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2}$$

kann man aus der KIRCHHOFFschen Formel gewinnen, wenn man annimmt, daß in dieser Formel die Anfangswerte φ_0 und φ_1 von der Koordinate x_3 nicht abhängen.

Wir betrachten die Funktion

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} \omega(z)\, dS_t$$

und setzen voraus, daß $\omega(z)$ von der dritten Koordinate z_3 nicht abhängt, d. h. $\omega(z) = \omega(z_1, z_2)$.

Die Kugeloberfläche S_t zerlegen wir durch die Ebene, die zur x_1, x_2-Ebene parallel ist und den Punkt x enthält, in zwei Halbsphären. Auf die erwähnte Ebene wird jede dieser Halbsphären in Gestalt eines Kreises vom Radius t mit dem Mittelpunkt im Punkte (x_1, x_2) projiziert. Diesen Kreis bezeichnen wir mit C_t. Da $\omega(z)$ von z_3 nicht abhängt, sind beide Integrale über die erwähnten Halbsphären gleich, und jedes von ihnen kann man durch ein Integral über den Kreis ersetzen, wenn man berücksichtigt, daß

$$dS_t = \frac{dz_1\, dz_2}{|\cos(\nu, z_3)|}\,.$$

gilt, wobei ν die äußere Normale zur Kugeloberfläche S_t ist. Somit finden wir

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \iint\limits_{C_t} \frac{\omega(z_1, z_2)}{|\cos(\nu, z_3)|} \, dz_1 \, dz_2 \, .$$

Die Normale zur Kugeloberfläche hat die gleiche Richtung wie der Radius, deshalb gilt

$$|\cos(\nu, z_3)| = \frac{|z_3 - x_3|}{t} = \frac{1}{t} \sqrt{t^2 - (z_1 - x_1)^2 - (z_2 - x_2)^2}$$

und

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C_t} \frac{\omega(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2}{\sqrt{t^2 - (z_1 - x_1)^2 - (z_2 - x_2)^2}} \, .$$

Jetzt geht die KIRCHHOFFsche Formel in die Formel

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C_t} \frac{\varphi_0(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2}{\sqrt{t^2 - (z_1 - x_1)^2 - (z_2 - x_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C_t} \frac{\varphi_1(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2}{\sqrt{t^2 - (z_1 - x_1)^2 - (z_2 - x_2)^2}} \tag{3}$$

über, welche die Lösung des CAUCHYschen Problems für die Membranschwingungsgleichung liefert; hierbei ist C_t der zweidimensionale Kreis, der durch die Ungleichung $|z - x| \leqq t$ definiert wird.

§ 7. Die Saitenschwingungsgleichung

Aus der Formel (6.3) kann man die Lösung des CAUCHYschen Problems für die Saitenschwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

erhalten. Es ist allerdings einfacher, diese Lösung unmittelbar zu gewinnen.

Es ist nicht schwierig, eine Formel zu erhalten, die alle Lösungen der Saitenschwingungsgleichung liefert. Dazu führen wir die neuen Veränderlichen $\xi = x + t$ und $\eta = x - t$ ein. Die Gleichung (1) wird in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$$

überführt. Wenn wir die letzte Gleichung in der Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$$

darstellen, erhalten wir daraus $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \vartheta(\xi)$, wobei $\vartheta(\xi)$ eine beliebige Funktion ist. Wenn wir nach ξ integrieren, so ergibt sich

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta) \, , \qquad \theta_1(\xi) = \int \vartheta(\xi) \, d\xi \, ,$$

wobei θ_1 und θ_2 beliebige differenzierbare Funktionen sind. Wenn wir wieder die ursprünglichen Veränderlichen einführen, dann erhalten wir die allgemeine Lösung der Gleichung (1)

$$u(x, t) = \theta_1 (x + t) + \theta_2 (x - t) . \tag{2}$$

Die Formel (2) wird D'ALEMBERT*sches Integral* genannt.

Wir suchen die Lösung der Gleichung (1), die den CAUCHYschen Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x) , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

genügt. Indem wir in der Formel (2) $t = 0$ setzen, erhalten wir

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x) . \tag{3}$$

Wenn wir die Formel (2) nach t differenzieren und danach $t = 0$ setzen, finden wir noch

$$\theta_1'(x) - \theta_2'(x) = \varphi_1(x) .$$

Die letzte Gleichung integrieren wir und erhalten

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = \int_0^x \varphi_1(z)\, dz + C . \tag{4}$$

Aus den Beziehungen (3) und (4) ergibt sich

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) + \int_0^x \varphi_1(z)\, dz + C\right],$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) - \int_0^x \varphi_1(z)\, dz - C\right].$$

Nunmehr liefert die Formel (2) die gesuchte Lösung

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0 (x + t) + \varphi_0 (x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(z)\, dz . \tag{5}$$

Die Formel (5) wird D'ALEMBERT*sche Formel* genannt.

§ 8. Die Wellengleichung mit veränderlichen Koeffizienten[1])

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(x)\, u = 0 \tag{1}$$

[1]) Für das Verständnis dieses Paragraphen muß man mit dem Satz über die Spektralzerlegung der Funktion eines selbstadjungierten Operators vertraut sein. Die unten dargelegten Überlegungen kann man auch auf die Wärmeleitungsgleichung mit veränderlichen Koeffizienten anwenden.

und machen dabei folgende Voraussetzungen:

1. Die Koeffizienten A_{jk} sind stetig differenzierbar, und der Koeffizient C ist im gesamten Raum E_m stetig.

2. In diesem Raum sind die oben erwähnten Koeffizienten beschränkt.

3. $C(x) \geqq 0$.

4. Die Matrix $||A_{jk}(x)||_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$ ist für jedes $x \in E_m$ positiv-definit.

Im Raum $L_2(E_m)$ geben wir einen Operator $\hat{A}$ vor. Den Definitionsbereich $D(\hat{A})$ dieses Operators mögen die Funktionen bilden, die in E_m zweimal stetig differenzierbar sind und außerhalb einer gewissen Kugel (für jede Funktion ist diese Kugel im allgemeinen eine andere) verschwinden. Der Operator $\hat{A}$ selbst wirke nach der Formel

$$\hat{A}\,u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C\,u\,. \tag{2}$$

Man sieht leicht ein, daß der Operator $\hat{A}$ positiv ist. Er wird positiv-definit, wenn $C(x) \geqq C_0$ gilt, wobei C_0 eine positive Konstante ist. Den Operator $\hat{A}$ kann man nach FRIEDRICHS (§ 7, Kap. 5) zu einem selbstadjungierten Operator erweitern.[1] Diese selbstadjungierte Erweiterung bezeichnen wir mit A, und anstelle der Gleichung (1) betrachten wir die abstrakte gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A\,u = 0\,. \tag{3}$$

Wir suchen die Lösung dieser Gleichung, die den Anfangsbedingungen

$$u(0) = \varphi_0\,, \qquad u'(0) = \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=0} = \varphi_1 \tag{3_1}$$

genügt.

Wir werden annehmen, daß

$$\varphi_0 \in D(A)\,, \qquad \varphi_1 \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \tag{4}$$

gilt. Unschwer weist man nach, daß dabei die Lösung der Aufgabe (1), (2) die verallgemeinerte Lösung des CAUCHYschen Problems (siehe § 6, Kap. 21) für die Wellengleichung (1) unter den Anfangsbedingungen (3_1) ist. Wenn A ein konstanter Zahlenfaktor wäre, so würde die Lösung der Aufgabe (3), (3_1) durch die Formel

$$u(t) = \cos\sqrt{A}\,t\,\varphi_0 + \frac{\sin\sqrt{A}\,t}{\sqrt{A}}\,\varphi_1 \tag{5}$$

geliefert werden.

---

[1]) Wenn $\hat{A}$ ein positiv-definiter Operator ist, so ist, wie in § 7, Kap. 5, bemerkt wurde, seine Erweiterung nach FRIEDRICHS eine selbstadjungierte Erweiterung. Wenn $\hat{A}$ nur positiv ist, dann betrachten wir den positiv-definiten Operator $\hat{B} = \hat{A} + I$ (I ist der identische Operator). Wenn B die selbstadjungierte Erweiterung des Operators $\hat{B}$ ist, so ist $A = B - I$ die selbstadjungierte Erweiterung des Operators $\hat{A}$.

Wir zeigen, daß diese Formel auch in unserem Fall ihre Gültigkeit behält, man muß nur unter den Symbolen $\cos\sqrt{A}\,t$ und $\frac{\sin\sqrt{A}\,t}{\sqrt{A}}$ die entsprechenden Funktionen des Operators A verstehen.

Die reellen Funktionen $\cos\sqrt{\lambda}\cdot t$ und $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}$ sind beschränkt, deshalb sind für beliebiges t auch die Operatoren $\cos\sqrt{A}\,t$ und $\frac{\sin\sqrt{A}\,t}{\sqrt{A}}$ beschränkt. Die Formel (5) definiert eine Funktion $u(t)$ mit Werten in $L_2(E_m)$. Man sieht leicht ein, daß $u(t)\in D(A)$ für jedes t gilt. In der Tat, ein selbstadjungierter Operator kommutiert mit jeder seiner beschränkten Funktionen, deshalb ergibt sich

$$A\left(\cos\sqrt{A}\,t+\frac{\sin\sqrt{A}\,t}{\sqrt{A}}\right)=(\cos\sqrt{A}\,t)\,A+(\sin\sqrt{A}\,t)\sqrt{A}\;;$$

unter Berücksichtigung von (4) finden wir, daß der Ausdruck

$$A\,u=A\left(\cos\sqrt{A}\,t\,\varphi_0+\frac{\sin\sqrt{A}\,t}{\sqrt{A}}\varphi_1\right)=(\cos\sqrt{A}\,t)\,A\,\varphi_0+(\sin\sqrt{A}\,t)\sqrt{A}\,\varphi_1 \tag{6}$$

sinnvoll ist.

Nun zeigen wir, daß die Funktion (5) die zweite Ableitung nach t besitzt, und wir bestimmen diese Ableitung. Es sei $\mathcal{E}_\lambda$ die Spektralfunktion des Operators A. Da der Operator A positiv ist, so liegt sein Spektrum auf der Halbachse $0\leqq\lambda<\infty$. Es gilt

$$u(t)=\int_0^\infty\cos\sqrt{\lambda}\,t\,d\mathcal{E}_\lambda\,\varphi_0+\int_0^\infty\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}\,d\mathcal{E}_\lambda\,\varphi_1\,. \tag{7}$$

Wir setzen

$$v(t)=\int_0^\infty\cos\sqrt{\lambda}\,t\,d\mathcal{E}_\lambda\,\varphi_0\,,\qquad w(t)=\int_0^\infty\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}\,d\mathcal{E}_\lambda\,\varphi_1 \tag{8}$$

und behaupten, daß jede der Funktionen $v(t)$ und $w(t)$ die erste und zweite Ableitung nach t besitzt und daß man diese Ableitungen durch formales Differenzieren der Integrale (8) erhalten kann. Den Beweis führen wir für die Funktion $v(t)$; für $w(t)$ verläuft dieser, von einigen offensichtlichen Veränderungen abgesehen, analog. Wir bezeichnen

$$v_1(t)=-\int_0^\infty\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,t\,d\mathcal{E}_\lambda\,\varphi_0\,. \tag{9}$$

Das Integral (9) konvergiert gleichmäßig bezüglich t, da

$$\left\|\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,t\,d\mathcal{E}_\lambda\varphi_0\right\|^2=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda\sin^2\sqrt{\lambda}\,t\,\|d\mathcal{E}_\lambda\,\varphi_0\|^2\leqq\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda\,\|d\mathcal{E}_\lambda\,\varphi_0\|^2$$

gilt. Das letzte Integral konvergiert für $\lambda_1, \lambda_2 \to \infty$ gegen Null, da das Integral

$$\int_0^\infty \lambda^2 \, ||d\mathcal{E}_\lambda \varphi_0||^2 = ||A \varphi_0||^2$$

konvergiert.

Jetzt kann man mit üblichen Mitteln leicht zeigen, daß

$$\left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - v_1(t) \right\|^2 \underset{h\to 0}{\to} 0$$

und folglich auch

$$\frac{dv}{dt} = v_1(t) = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, t \, d\mathcal{E}_\lambda \varphi_0$$

gilt. Analog wird die Gültigkeit von

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\int_0^\infty \lambda \cos \sqrt{\lambda}\, t \, d\mathcal{E}_\lambda \varphi_0 \,,$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, t \, d\mathcal{E}_\lambda \varphi_1$$

nachgewiesen. Dann existiert aber die zweite Ableitung $\frac{d^2u}{dt^2}$, und es ergibt sich

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\int_0^\infty \lambda \left[\cos \sqrt{\lambda}\, t \, d\mathcal{E}_\lambda \varphi_0 + \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} d\mathcal{E}_\lambda \varphi_1 \right].$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist gleich $-A\,u$, und die Funktion u genügt folglich der Gleichung (3).

Wir beweisen jetzt, daß die Funktion (6) die Anfangsbedingungen (4) im folgenden Sinne erfüllt:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} ||u(t) - \varphi_0||_{L_2(E_m)} = 0 \,, \\ &\lim_{t\to 0} \left\| \frac{du(t)}{dt} - \varphi_1 \right\|_{L_2(E_m)} = 0 \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Wir beweisen zum Beispiel die zweite Beziehung in (10); für die erste Beziehung sind die Überlegungen analog. Nach bereits Bewiesenem gilt

$$\frac{du(t)}{dt} = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, t \, d\mathcal{E}_\lambda \varphi_0 + \int_0^\infty \cos \sqrt{\lambda}\, t \, d\mathcal{E}_\lambda \varphi_1$$

und folglich auch

$$\frac{du(t)}{dt} - \varphi_1 = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, t \, d\mathcal{E}_\lambda \varphi_0 + \int_0^\infty (\cos \sqrt{\lambda}\, t - 1) \, d\mathcal{E}_\lambda \varphi_1 \,.$$

Daraus ergibt sich

$$\left\|\frac{du(t)}{dt} - \varphi_1\right\|^2 \leqq 2\int_0^\infty \lambda \sin^2 \sqrt{\lambda}\, t\, \|d\mathscr{E}_\lambda \varphi_0\|^2 + 2\int_0^\infty (1 - \cos \sqrt{\lambda}\, t)^2\, \|d\mathscr{E}_\lambda \varphi_1\|^2 . \quad (11)$$

Aus der Beziehung (5) folgt im besonderen

$$\int_0^\infty \lambda\, \|d\mathscr{E}_\lambda\, \varphi_0\|^2 < \infty , \quad \int_0^\infty \|d\mathscr{E}_\lambda\, \varphi_1\|^2 < \infty ;$$

somit gilt für hinreichend großes $a > 0$

$$\int_a^\infty \lambda\, \|d\mathscr{E}_\lambda \varphi_0\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{16} , \qquad \int_a^\infty \|d\mathscr{E}_\lambda\, \varphi_1\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{64} ,$$

wobei ε eine willkürlich vorgegebene positive Zahl ist. Aus der Ungleichung (11) folgt dann

$$\left\|\frac{du(t)}{dt} - \varphi_1\right\|^2 \leqq 2\int_0^a \lambda \sin^2 \sqrt{\lambda}\, t\, \|d\mathscr{E}_\lambda \varphi_0\|^2 + 2\int_0^a (1 - \cos \sqrt{\lambda}\, t)^2\, \|d\mathscr{E}_\lambda \varphi_1\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} .$$

Jetzt hat man nur noch t_0 so klein zu wählen, daß für $t < t_0$ die Summe der Integrale auf der rechten Seite kleiner als $\frac{3\,\varepsilon^2}{4}$ wird.

Bemerkung 1. Analog wird gezeigt, daß die Funktion (6) den Anfangsbedingungen außerdem im folgenden Sinn genügt:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \|A\, u(t) - A\, \varphi_0\| &= 0 , \\ \lim_{t\to 0} \|\sqrt{A}\, \frac{du(t)}{dt} - \sqrt{A}\, \varphi_1\| &= 0 . \end{aligned} \quad (12)$$

Bemerkung 2. Man kann die verallgemeinerte Lösung der Aufgabe (1), (4) als Funktion ermitteln, die den Anfangsbedingungen (10) und der Identität

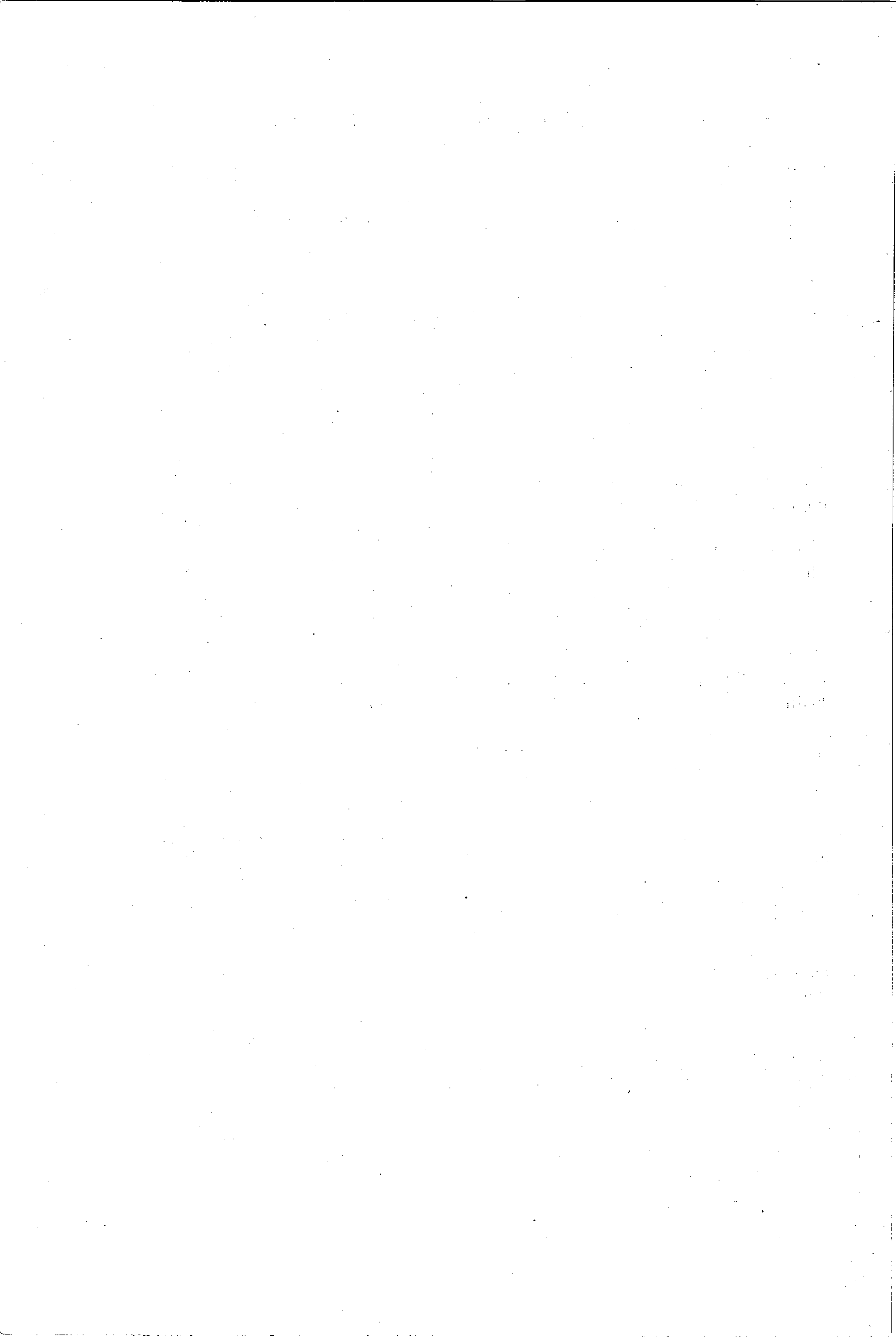
$$-\int_0^T \left(\frac{du}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt - \big(\varphi_1, \eta(0)\big) = 0 \quad (13)$$

genügt. Dabei ist T eine beliebige positive Zahl und $\eta(t)$ eine beliebige Funktion der Klasse

$$C^{(1)}\big([0, \infty); L_2(E_m)\big) \cap C\big([0, \infty); H_A\big) , \quad (14)$$

die für $t = T$ gleich Null ist. Die verallgemeinerte Lösung, die der Klasse (14) angehört, wird ebenfalls durch die Formel (6) geliefert; dabei genügt die Forderung $\varphi_0 \in D(\sqrt{A})$, $\varphi_1 \in L_2(E_m)$.

Bemerkung 3. Die Methode und die Resultate dieses Paragraphen kann man unschwer auf die inhomogene Wellengleichung übertragen.



Teil VII

KORREKTE UND NICHT KORREKTE AUFGABEN

KAPITEL 25

ÜBER DIE KORREKTHEIT DER AUFGABEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

§ 1. Der Hauptsatz

Im Kapitel 9 (§ 5) hatten wir den Begriff der Korrektheit für die Aufgaben der mathematischen Physik eingeführt. Das Wesen dieses Begriffes bestand im folgenden: Wir bezeichnen mit Φ die Gesamtheit der Vorgaben für die Aufgabe, mit U die Gesamtheit der gesuchten Größen und mit A den Operator, der U in Φ überführt, so daß

$$A\,U = \Phi \tag{1}$$

gilt.
Die Aufgabe besteht darin, U bei gegebenem A und Φ zu finden. Wir nehmen an, daß man U und Φ entsprechend als Element der metrischen Räume B_1 und B_2 betrachten kann. Wir sagen, daß die Aufgabe (1) im Raumpaar B_1 und B_2 korrekt gestellt ist, wenn sie für beliebiges $\Phi \in B_2$ eine und nur eine Lösung besitzt und wenn bei hinreichend kleiner (in der Metrik von B_2) Veränderung eine beliebig kleine (in der Metrik von B_1) Veränderung von U erreicht werden kann. Uns interessiert ferner nur der Fall linearer Operatoren A; die Räume B_1 und B_2 seien BANACH-Räume. Für diesen Fall gilt folgender Satz.

Satz 25.1.1. *Für die Korrektheit der linearen Aufgabe* (1) *im Paar der* BANACH-*Räume* (B_1, B_2) *ist notwendig und hinreichend, daß der aus* B_2 *in* B_1 *wirkende Operator* $R = A^{-1}$ *existiert, die Relation* $D(R) = B_2$ *gilt und* R *als aus* B_2 *in* B_1 *wirkender Operator beschränkt ist.*

Beweis. Notwendigkeit. Wenn die Aufgabe (1) korrekt gestellt ist, so folgt vor allem für beliebiges $\Phi \in B_2$ die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt die Existenz des Operators $R = A^{-1}$, und aus der Existenz der Lösung für beliebiges $\Phi \in B_2$ folgt, daß der Operator R auf dem gesamten Raum B_2 definiert ist. Ferner ersetzen wir das Element Φ durch $\Phi + \varphi$, wobei $\varphi \in B_2$ gilt. Die veränderte Lösung sei $U + u$. Dann ergibt sich $A\,(U + u) = \Phi + \varphi$. Da A ein linearer Operator ist gilt, $A\,u = \varphi$. Da die Aufgabe (1) korrekt gestellt ist, kann man bei gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ finden dergestalt, daß für $||\varphi|| < \varepsilon$ die Relation $||u|| = ||R\,\varphi|| < \delta$ gilt. Wir fixieren nunmehr ε und δ. Wenn $\psi \in B_2$, $||\psi|| = 1$ gilt, so folgt $\left\|\frac{\varepsilon}{2}\psi\right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ bzw. $\left\|R\,\frac{\varepsilon}{2}\psi\right\| = \frac{\varepsilon}{2}\,||R\,\psi|| < \delta$.

Daraus ergibt sich

$$||R\,\psi|| < \frac{2\delta}{\varepsilon}, \qquad ||\psi|| = 1\,.$$

Das bedeutet aber $||R|| \leqq \frac{2\delta}{\varepsilon}$. Der Operator R ist somit beschränkt.

Hinlänglichkeit. Wenn der Operator R existiert, so besitzt die Aufgabe (1) nicht mehr als eine Lösung. Wenn $D(R) = B_2$ gilt, so ist die Aufgabe (1) für jedes $\Phi \in B_2$ lösbar. Wenn schließlich R ein beschränkter Operator ist und $||\varphi||_{B_2} < \varepsilon$ gilt, so folgt $||u||_{B_1} = ||R\,\varphi||_{B_1} < \delta$, wobei $\delta = \varepsilon\,||R||$ gesetzt wurde. Damit ist der Beweis beendet.

Der Wichtigkeit halber sei unterstrichen, daß die Korrektheit oder Nichtkorrektheit einer Aufgabe davon abhängt, in welchen Räumen wir die gegebenen und gesuchten Größen betrachten. Ein und dieselbe Aufgabe kann in einem Paar von Räumen korrekt sein, in einem anderen aber nicht. Ausführlicher untersuchen wir diese Frage im § 8.

In den Aufgaben der mathematischen Physik (wie in der Analysis überhaupt) spielen nicht korrekte Aufgaben eine relativ wichtige Rolle. So kann man zum Beispiel nachweisen, daß im Raumpaar $(C^{(1)}(\Omega), C(\Gamma))$ das DIRICHLETsche Problem für die homogene LAPLACE-Gleichung nicht korrekt gestellt ist. Auf diese Aufgabe stößt man in der Mechanik deformierbarer Medien (im besonderen in der Elastizitätstheorie). Eine der einfachsten nicht korrekten Aufgaben ist das Aufsuchen der Lösung für die Gleichung

$$T\,u = f\,, \tag{2}$$

in der T einen vollstetigen Operator bezeichnet, der aus einem unendlichdimensionalen BANACH-Raum in einen ebensolchen Raum wirkt. Ein Spezialfall der Gleichung (2) ist die sogenannte FREDHOLMsche Integralgleichung erster Art

$$\int_\Omega K\,(x, y)\,u(y)\,dy = f(x)\,,$$

wobei $K(x, y)$ ein FREDHOLMscher Kern ist. Daß die Aufgabe (2) nicht korrekt gestellt ist, ergibt sich leicht aus folgenden Überlegungen. Wenn sie korrekt wäre, so würde der beschränkte Operator T^{-1} existieren. Der identische Operator $I = T^{-1}\,T$ wäre dann aber ein vollstetiger Operator im unendlichdimensionalen Raum X. In letzter Zeit erschienen viele Arbeiten, die der näherungsweisen Lösung nicht korrekter Aufgaben gewidmet sind (selbstverständlich unter der Bedingung, daß die exakte Lösung existiert). Eine der ersten Arbeiten in dieser Richtung war die Arbeit von A. N. TYCHONOW [3]. Die von ihm vorgeschlagene Methode basiert auf der Idee, daß die Lösung der nicht korrekten Aufgabe als Grenzwert von Lösungen einer speziell gewählten Folge korrekter Aufgaben betrachtet wird.

§ 2. Positiv-definite Aufgaben

1. Der Operator A sei ein positiv-definiter Operator im HILBERT-Raum H. Wir betrachten die Gleichung

$$A\,u = f\,. \tag{1}$$

Mit H_A bezeichnen wir den energetischen Raum des Operators A. Wir suchen die verallgemeinerte Lösung der Gleichung (1), d. h. ein Element des Raumes H_A, das der Identität

$$[u, \eta] = (f, \eta)\,, \qquad \forall \eta \in H_A \tag{2}$$

genügt. Diese Lösung existiert und ist eindeutig. Somit existiert der Operator $R = A^{-1}$, der aus H in H_A wirkt und auf dem gesamten Raum H definiert ist. Wir setzen $B_1 = H_A$, $B_2 = H$.

Wir weisen die Beschränktheit des Operators R nach. Es sei u die verallgemeinerte Lösung der Aufgabe (1). Nachdem wir in der Identität (2) $\eta = u$ gesetzt haben, erhalten wir

$$|u|_A^2 = (f, u) \leqq \|f\| \cdot \|u\| .$$

Es sei γ^2 die untere Grenze des Operators A. Dann gilt $\|u\| \leqq \frac{1}{\gamma} |u|_A$. Nach dem Einsetzen dieses Ausdruckes in die vorangegangene Ungleichung ergibt sich

$$|u|_A = |Rf|_A \leqq \frac{1}{\gamma} \|f\| .$$

Das bedeutet

$$\|R\|_{H \to H_A} \leqq \frac{1}{\gamma} ,$$

und die Aufgabe (1) ist im Falle eines positiv-definiten Operators im Raumpaar (H_A, H) korrekt gestellt.

2. Wir betrachten einige Beispiele.

a) Es sei $\Omega \subset E_m$ ein endliches Gebiet mit einem stückweise glatten Rand Γ. Wir betrachten das DIRICHLETsche Problem

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(x)\, u = f(x) , \qquad u|_\Gamma = 0 . \tag{3}$$

Für die Koeffizienten A_{jk} und $C(x)$ formulieren wir die üblichen Bedingungen (siehe Kap. 14). Der Operator $\mathfrak{A}$ der Aufgabe (3) ist im Raum $L_2(\Omega)$ positiv-definit, so daß diese Aufgabe im Raumpaar $\big(H_{\mathfrak{A}}, L_2(\Omega)\big)$ korrekt gestellt ist. Wir erinnern daran, daß die Metrik in $H_{\mathfrak{A}}$ durch die Formel

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2 = \int\limits_\Omega \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right) dx. \tag{4}$$

gegeben wird.

b) In der Gleichung (3) sei $C(x) \geqq C_0 = \text{const} > 0$. Wir geben die Randbedingung

$$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_k)\right]_\Gamma = 0$$

des NEUMANNschen Problems vor. Der Operator $\mathfrak{N}$ dieser Aufgabe ist in $L_2(\Omega)$ positiv-definit, so daß das NEUMANNsche Problem im Raumpaar $\big(H_{\mathfrak{N}}, L_2(\Omega)\big)$ korrekt gestellt ist. Die Metrik in $H_{\mathfrak{N}}$ wird ebenfalls durch die Formel (4) festgelegt.

c) Es sei nun $C(x) \equiv 0$. In diesem Fall ist der Operator $\mathfrak{N}_0$ des NEUMANNschen Problems im Raum $\tilde{L}_2(\Omega)$, dem Unterraum des Raumes $L_2(\Omega)$, der zur Eins orthogonal ist, positiv-definit, so daß das NEUMANNsche Problem im Raumpaar $(H_{\mathfrak{N}_0}, \tilde{L}_2(\Omega)$ korrekt gestellt ist.

§ 3. Das DIRICHLETsche Problem für die homogene LAPLACE-Gleichung

Es sei Γ eine reguläre Fläche und Ω das Gebiet, welches sich innerhalb oder außerhalb von Γ befindet. Wir formulieren das DIRICHLETsche Problem für die homogene LAPLACE-Gleichung

$$\Delta u = 0\,, \qquad u|_\Gamma = \varphi(x)\,. \tag{1}$$

Man kann leicht ein Paar von Räumen angeben, in denen diese Aufgabe korrekt ist. Wir setzen $B_1 = G(\overline{\Omega})$, $B_2 = C(\Gamma)$. Hierbei bezeichnen wir mit $G(\overline{\Omega})$ den Unterraum von $C(\overline{\Omega})$, der durch alle in Ω harmonischen und in $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen gebildet wird (s. Folgerung 11.9.1). In der Tat, für jede Funktion $\varphi \in C(\Gamma)$ besitzt die Aufgabe (1) eine eindeutige und in $\overline{\Omega}$ stetige Lösung. Im weiteren sei von dem inneren DIRICHLETschen Problem die Rede. Aus dem Maximum-Prinzip folgt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \Gamma} |u(x)| = \max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)|$$

oder

$$\|u\|_{B_1} = \|\varphi\|_{B_2}\,. \tag{2}$$

Wenn durch R der Operator bezeichnet wird, der die gegebene Funktion $\varphi(x)$ in die gesuchte Funktion $u(x)$ überführt, $u = R\,\varphi$, so folgt aus der Identität (2) die Gleichung $\|R\| = 1$. Folglich ist die Aufgabe (1) korrekt gestellt.

Wir gehen nun zum äußeren DIRICHLETschen Problem über. Es sei zuerst $m > 2$. Aus der Bedingung $u(x) = O(|x|^{2-m})$, $|x| \to \infty$ folgt dann $u(x) \to 0$. Wir betrachten die Kugeloberfläche S_R mit dem hinreichend großen Radius R (Abb. 20, Seite 212), so daß die Fläche Γ innerhalb der Kugeloberfläche liegt. Im endlichen Gebiet Ω_R, das durch die Oberflächen Γ und S_R berandet wird, hat das Maximum-Prinzip Gültigkeit:

$$\max_{x \in \Omega_R} |u(x)| = \max \left\{ \max_{x \in \Gamma} |u(x)|, \max_{x \in S_R} |u(x)| \right\} = \max \left\{ \max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)|, \max_{x \in S_R} |u(x)| \right\}.$$

Nunmehr gelte $R \to \infty$. Daraus erhalten wir die Beziehung

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| = \max \left\{ \max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)|, 0 \right\} = \max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)|\,.$$

Im weiteren sind die gleichen Überlegungen wie für das innere DIRICHLETsche Problem durchzuführen.

Wenn $m = 2$ und das Gebiet Ω nicht beschränkt ist, so kann man das äußere DIRICHLETsche Problem auf das innere zurückführen, indem wir Ω auf ein endliches Gebiet konform abbilden und somit die Korrektheit des äußeren DIRICHLETschen Problems nachweisen.

§ 4. Das äußere NEUMANNsche Problem

Das unbeschränkte Gebiet Ω sei durch die reguläre Fläche Γ berandet. Wir nehmen an, daß die Dimension des Raumes größer als zwei ist. Wenn die Funktion $\psi(x)$ auf Γ stetig ist, so besitzt das äußere NEUMANNsche Problem

$$\Delta u = 0\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \psi(x) \tag{1}$$

eine und nur eine in $\overline{\Omega}$ stetige Lösung, die in der Gestalt eines Potentials der einfachen Schicht

$$u(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi)\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_{\xi}\Gamma \tag{2}$$

mit der stetigen Dichte $\mu(\xi)$ darstellbar ist. Diese Dichte genügt der Integralgleichung (§ 8, Kap. 18)

$$\mu(x) - \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_{\Gamma} \mu(\xi)\, \frac{\partial}{\partial n}\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_{\xi}\Gamma = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\, \psi(x)\,. \tag{3}$$

Wie in Kap. 18 nachgewiesen worden ist, besitzt diese Gleichung eine und nur eine auf Γ stetige Lösung, falls $\psi(x)$ auf Γ stetig ist. Diese Lösung kann man in der Gestalt

$$\mu = Q\,\psi \tag{4}$$

darstellen, wobei Q bis auf eine Konstante der Umkehroperator zu dem auf der linken Seite der Gleichung (3) stehenden Operator ist. Aus dem oben Gesagten folgt, daß der Operator Q auf dem ganzen Raum $C(\Gamma)$ der auf Γ stetigen Funktionen definiert ist. Wir zeigen, daß der Operator Q auf $C(\Gamma)$ beschränkt ist.

Wir nehmen das Gegenteil an. Dann existiert eine Folge von Funktionen $\psi_n \in C(\Gamma)$ dergestalt, daß

$$\|\mu_n\| \geqq n\, \|\psi_n\|\,, \qquad \mu_n = Q\,\psi_n$$

gilt. Wir setzen

$$\frac{\psi_n(x)}{\|\mu_n\|} = \psi_n^*(x)\,, \qquad \frac{\mu_n(x)}{\|\mu_n\|} = \mu_n^*(x)\,.$$

Dann gilt $\mu_n^* = Q\,\psi_n^*$, $\|\mu_n^*\| = 1$, $\|\psi_n^*\| \to 0$. Die erste Gleichung bedeutet, daß μ_n^* der Gleichung

$$\mu_n^*(x) - \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_{\Gamma} \mu_n^*(\xi)\, \frac{\partial}{\partial n}\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_{\xi}\Gamma = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\, \psi_n^*(x)$$

genügt. Wenn wir der Kürze halber die Bezeichnung

$$\frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_{\Gamma} \mu(\xi)\, \frac{\partial}{\partial n}\, \frac{1}{r^{m-2}}\, d_{\xi}\Gamma = (K\,\mu)\,(x)$$

einführen, nimmt die letzte Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\mu_n^* - K\,\mu_n^* = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi_n^* . \tag{5}$$

Der Operator K ist als Operator mit einer schwachen Singularität vollstetig in $C(\Gamma)$ (siehe § 4, Kap. 7), und die Folge $\{\mu_n^*\}$ ist beschränkt ($||\mu_n^*|| = 1$). In diesem Fall kann man eine Teilfolge $\mu_{n_k}^*$ finden, für die der Grenzwert

$$\lim K\,\mu_{n_k}^* = \mu^*$$

existiert. Gleichzeitig gilt $\psi_{n_k}^* \to 0$, so daß aus Gleichung (5) die Relation $\mu_{n_k}^* \to \mu^*$ folgt. Wenn wir jetzt in (5) zum Grenzwert übergehen, finden wir, daß μ^* der homogenen Integralgleichung

$$\mu^* - K\,\mu^* = 0 \tag{6}$$

genügt. Gleichung (3) besitzt eine eindeutige Lösung, das bedeutet, daß die entsprechende homogene Gleichung (6) nur die triviale Lösung besitzt. Daraus folgt $\mu^* = 0$. Andererseits gilt aber

$$||\mu^*|| = \lim ||\mu_{n_k}^*|| = 1 .$$

Der erhaltene Widerspruch zeigt, daß der Operator Q beschränkt ist.[1]) Folglich existiert eine solche Konstante α, für die

$$||\mu|| \leqq \alpha\,||\psi|| \tag{7}$$

gilt. Hierbei ist μ die Lösung der Gleichung (3), die Norm ist die Norm des Raumes $C(\Gamma)$.

Aus Formel (2) folgt

$$|u(x)| \leqq \max_{\eta\in\Gamma} |\mu(\eta)| \int_{\Gamma} \frac{d_\xi \Gamma}{r^{m-2}}, \qquad x \in \overline{\Omega} .$$

Das letztere Integral ist ein Potential der einfachen Schicht mit einer stetigen Dichte, die gleich Eins ist. Ein derartiges Potential ist im gesamten Raum E_m stetig und im Unendlichen gleich Null. Daraus folgt, daß das erwähnte Potential beschränkt ist:

$$\int_{\Gamma} \frac{d_\xi \Gamma}{r^{m-2}} \leqq \beta = \text{const} .$$

In einem solchen Fall gilt

$$|u(x)| \leqq \beta \max_{\xi\in\Gamma} |\mu(\xi)| = \beta\,||\mu|| \leqq \alpha\,\beta\,||\psi|| .$$

---

[1]) Die Beschränktheit des Operators Q kann man auch wie folgt zeigen. Aus dem Satz 7.4.1 folgt, daß der auf der linken Seite der Gleichung (3) stehende Operator in $C(\Gamma)$ beschränkt ist. Da er auf diesem Raum überall definiert ist, so folgt aus seiner Beschränktheit auch die Abgeschlossenheit; der inverse Operator Q ist dann ebenfalls abgeschlossen. Nach einem bekannten Satz von Banach ist der auf dem gesamten Raum $C(\Gamma)$ definierte und abgeschlossene Operator Q in diesemRaum ein beschränkter Operator.

Wenn wir auf der linken Seite zum Maximum übergehen, erhalten wir abschließend

$$\|u\|_{G(\bar{\Omega})} \leqq \alpha \, \beta \, \|\psi\|_{C(\Gamma)} \,. \tag{8}$$

Nunmehr ist offensichtlich, daß für $m > 2$ das äußere NEUMANNsche Problem im Raumpaar $(G(\bar{\Omega}), C(\Gamma))$ korrekt gestellt ist. In der Tat, wenn wir mit R den Operator bezeichnen, der die Funktion $\psi(x)$ in die Funktion $u(x)$ (die Lösung des äußeren NEUMANNschen Problems) überführt, so gilt:

1. Der Operator R existiert (die Lösung ist eindeutig bestimmt); 2. er ist auf dem gesamten Raum $C(\Gamma)$ definiert (die Lösung existiert für jede stetige Funktion $\psi(x)$); 3. er ist als Operator von $C(\Gamma)$ in $G(\bar{\Omega})$ beschränkt (Ungleichung (8)).

§ 5. Das innere NEUMANNsche Problem

Die Resultate dieses Paragraphen behalten ihre Gültigkeit auch für das äußere NEUMANNsche Problem im Falle $m = 2$, da dieses durch eine konforme Abbildung in das innere NEUMANNsche Problem übergeführt wird.

Wie auch früher sei Γ eine reguläre Fläche, und Ω das Gebiet, das innerhalb von Γ liegt. Das Problem besteht darin, eine in Ω harmonische Funktion zu ermitteln, die der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \psi(x) \tag{1}$$

genügt. Im Raumpaar $(G(\bar{\Omega}), C(\Gamma))$ ist das innere NEUMANNsche Problem schon deshalb nicht korrekt gestellt, weil es nicht immer lösbar ist und die Lösung (wenn sie existiert) nicht eindeutig ist. Wir führen in unsere Betrachtungen den Raum $C^{\perp}(\Gamma)$ ein, der ein Unterraum des Raumes $C(\Gamma)$ ist und durch die zusätzliche Beziehung

$$\int_{\Gamma} \psi(\xi) \, d_{\xi}\Gamma = 0 \tag{2}$$

definiert wird.

Gilt für die Funktion ψ in der Randbedingung (1) die Relation $\psi \in C^{\perp}(\Gamma)$, so ist das innere NEUMANNsche Problem lösbar, allerdings nicht eindeutig. Wir müssen dafür Sorge tragen, daß aus der unendlichen Menge von Lösungen eine ausgewählt wird. Die Lösung des inneren NEUMANNschen Problems kann in der Gestalt (siehe § 11, Kap. 18) des Potentials einer einfachen Schicht

$$u(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{d_{\xi}\Gamma}{r^{m-2}} \tag{3}$$

mit der stetigen Dichte $\mu(\xi)$ dargestellt werden. Als $\mu(\xi)$ kann jede Lösung der Integralgleichung

$$\mu(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_{\xi}\Gamma = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \psi(x) \tag{4}$$

dienen.

Wenn $m = 2$ ist, muß man $u(x)$ in Gestalt eines logarithmischen Potentials darstellen; entsprechend wird auch Gleichung (4) verändert. Auf die folgenden Überlegungen hat dies keinen Einfluß.

Gleichung (4) ist lösbar, wenn $\psi \in C^{\perp}(\Gamma)$ gilt, und ihre Lösungen sind stetig. Ihre Anzahl ist unendlich, da die homogene Gleichung eine linear unabhängige Lösung $\mu_0(x)$ besitzt. Wenn wir irgendeine partielle Lösung der Gleichung (4) mit $\hat{\mu}(x)$ bezeichnen, so ist

$$\mu(x) = \hat{\mu}(x) + c\,\mu_0(x) \tag{5}$$

die allgemeine Lösung dieser Gleichung; hierbei ist c eine beliebige Konstante. Verschiedenen Werten c entsprechen verschiedene Lösungen des NEUMANNschen Problems, alle diese Lösungen sind stetig in $\bar{\Omega}$.

Wir legen uns auf die folgende Methode der Auswahl der Konstanten c in der Formel (5) fest: Wir fordern, daß $\mu(x)$ in der Metrik des Raumes $L_2(\Omega)$ zu $\mu_0(x)$ orthogonal ist. Daraus ergeben sich für c und $\mu(x)$ die folgenden Werte:

$$c - \frac{(\hat{\mu}, \mu_0)_{L_2}}{\|\mu_0\|^2_{L_2}} = - \frac{\int\limits_{\Gamma} \hat{\mu}(x)\, \mu_0(x)\, d\Gamma}{\int\limits_{\Gamma} \mu_0^2(x) d\Gamma},$$

$$\mu(x) = \hat{\mu}(x) - \frac{(\hat{\mu}, \mu_0)_{L_2}}{\|\mu\|^2_{L_2}} \mu_0(x)\,. \tag{6}$$

Unschwer kann man sich davon überzeugen, daß die durch die Formel (6) definierte Funktion $\mu(x)$ nicht von der Wahl der partikulären Lösung $\hat{\mu}(x)$ abhängt und folglich eindeutig bestimmt wird.

Im folgenden verstehen wir unter $\mu(x)$ die Funktion (6), unter der Lösung des inneren NEUMANNschen Problems das Potential (3), dessen Dichte mit der Funktion (6) übereinstimmt. Eine derartige Lösung ist eindeutig bestimmt. Wir weisen jetzt nach, daß bei einer solchen Wahl der Lösung das innere NEUMANNsche Problem im Raumpaar $\left(G(\bar{\Omega}),\, C^{\perp}(\Gamma)\right)$ korrekt gestellt ist. Wir überzeugten uns schon davon, daß in diesem Paar von Räumen das innere NEUMANNsche Problem eine und nur eine Lösung besitzt. Uns verbleibt nur noch die Beschränktheit des Operators R zu zeigen, der die Funktion $\psi(x)$ in die Lösung $u(x)$ des inneren NEUMANNschen Problems überführt.

Vorerst weisen wir die Existenz einer Konstanten α nach dergestalt, daß

$$\|\mu\|_{C(\Gamma)} \leqq \alpha\, \|\psi\|_{C(\Gamma)} \tag{7}$$

gilt. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann überzeugen wir uns genau wie im vorangegangenen Paragraphen davon, daß zwei durch Gleichung (4) verknüpfte Folgen $\{\psi_n^*\}$ und $\{\mu_n^*\}$ existieren, für die

$$\|\mu_n^*\| = 1\,, \qquad \|\psi_n^*\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt. Wenn wir die Bezeichnung K für den Integraloperator beibehalten, die in dem vorangegangenen Paragraphen eingeführt worden ist, können wir

Gleichung (4) für die Funktionen μ_n^* und ψ_n^* in der Gestalt

$$\mu_n^* + K\,\mu_n^* = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\,\psi_n^*$$

schreiben. Die weiteren Überlegungen verlaufen wie im § 4: Wir wählen eine Teilfolge $\mu_{n_k}^*$ so aus, daß der Grenzwert

$$\mu^* = \lim K\,\mu_{n_k}^* = -\lim \mu_{n_k}^*$$

existiert. Dieser Grenzwert genügt der homogenen Gleichung

$$\mu^* + K\,\mu^* = 0\,.$$

Daraus ergibt sich notwendigerweise

$$\mu^*(x) = C\,\mu_0(x)\,.$$

Weiter findet man

$$(\mu^*, \mu_0)_{L_2(\Gamma)} = \lim\,(\mu_{n_k}^*, \mu_0)_{L_2(\Gamma)} = 0\,.$$

Dann ist aber $C = 0$ und $\mu^*(x) \equiv 0$. Dies ist nicht möglich, da $||\mu^*|| = \lim ||\mu_{n_k}^*|| = 1$ gilt.

Die Ungleichung (7) ist damit nachgewiesen. Wie auch im § 4 folgt aus ihr die Gültigkeit der Beziehung

$$||u||_{C(\bar{\Omega})} \leqq \alpha\,\beta\,||\psi||_{C^{\perp}(\Gamma)}\,.$$

Die letzte Ungleichung zeigt, daß der Operator R beschränkt und das innere NEUMANNsche Problem in der oben gegebenen Formulierung korrekt gestellt ist.

§ 6. Aufgaben der Wärmeleitung

1. **Die gemischte Aufgabe.** Wir betrachten die Aufgabe, die in den §§ 1, 2 von Kap. 20 untersucht wurde: Im Gebiet Q (Abb. 36, S. 347) ist die verallgemeinerte Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t) \tag{1_1}$$

zu finden, die den Anfangs- und Randbedingungen

$$u|_B = 0\,, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{1_2}$$

genügt. Diese Aufgabe besitzt eine eindeutige Lösung in der Klasse $C^{(1)}\big((0, \infty); H_{\mathfrak{A}}\big) \cap C\big([0, \infty); L_2(\Omega)\big)$, wenn $\varphi \in L_2(\Omega)$ und $f \in C^{(1)}\big([0, \infty); L_2(\Omega)\big)$ gilt.

Wir betrachten die Lösung im Gebiet Q_T der Abb. 36, S. 347, d. h. im Gebiet $\Omega \times [0, T]$. Die Überlegungen der §§ 1, 2 von Kap. 20 kann man ohne jede Schwierigkeiten für den Fall abändern, wo t nur das endliche Intervall $[0, T]$

durchläuft. Dabei genügt es, $f \in C^{(1)}([0, T]; L_2(\Omega))$ zu fordern, um zu zeigen, daß die Lösung der Aufgabe (1_1), (1_2) in der Klasse $C^{(1)}((0, T]; H_{\mathfrak{A}}) \cap C([0, T]; L_2(\Omega))$ existiert und eindeutig ist.

Nunmehr führen wir die Räume B_1 und B_2 ein, die in der Definition der Korrektheit erwähnt wurden. Als B_1 wählen wir den Raum $C([0, T]; L_2(\Omega))$, wobei wir die Norm auf folgende Art und Weise einführen:

$$||u||_1 = \max_{0 \leq t \leq T} ||u(t)||_{L_2(\Omega)} . \tag{2}$$

Als B_2 wählen wir den Raum aller Paare der Gestalt

$$\Phi = (\varphi(x); f(t, x)) , \tag{3}$$

wobei $\varphi \in L_2(\Omega)$ und $f \in C^{(1)}([0, T]; L_2(\Omega))$ gilt. Die Norm in diesem neuen Raum definieren wir durch die Formel

$$||\Phi||_2 = ||\varphi||_{L_2(\Omega)} + \max_{0 \leq t \leq T} ||f(t)||_{L_2(\Omega)} + \max_{0 \leq t \leq T} ||f'(t)||_{L_2(\Omega)} . \tag{4}$$

Wir beweisen, daß die Aufgabe (1) im Raumpaar (B_1, B_2) korrekt gestellt ist. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung wurde schon festgestellt. Es genügt, sich von der Beschränktheit des Operators R zu überzeugen, der von B_2 in B_1 wirkt und das Element Φ in die Lösung u überführt. Wir beweisen eine stärkere und einfachere Behauptung: Der Operator R ist als ein aus B_3 in B_1 wirkender Operator beschränkt, wobei B_3 der Raum der Elemente (3) mit der Metrik

$$||\Omega||_3 = ||\varphi||_{L_2(\Omega)} + \max_{0 \leq t \leq T} ||f(t)||_{L_2(\Omega)}$$

ist. Wir wenden uns der Formel (1.8) aus Kap. 22 zu. Das System $\{u_n\}$ ist in $L_2(\Omega)$ orthonormiert, deshalb gilt

$$||u(t)||^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\varphi, u_n) \, e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau) \, d\tau \right]^2 .$$

Die letztere Reihe stimmt mit der Reihe (2.1) aus Kap. 22 überein. Aus den im § 2 des Kap. 22 vorgenommenen Abschätzungen folgt unmittelbar, daß die Summe dieser Reihe die Größe

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)^2 + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau) \, d\tau = 2 \, ||\varphi||^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t ||f(\tau)||^2_{L_2(\Omega)} \, d\tau$$

nicht übersteigt. Daraus ergibt sich

$$||u(t)||^2_{L_2(\Omega)} \leq 2 \, ||\varphi||^2_{L_2(\Omega)} + \frac{T}{\lambda_1} \max_{0 \leq t \leq T} ||f(t)||^2_{L_2(\Omega)} \leq \alpha^2 \, ||\Phi||^2_3 ,$$

wobei $\alpha^2 = \max\left(2, \frac{T}{\lambda_1}\right)$ gesetzt wurde. Wenn wir auf der linken Seite zum

Maximum übergehen, finden wir

$$||u||_1 \leqq \alpha \, ||\Phi||_3$$

und folglich

$$||R||_{B_3 \to B_1} \leqq \alpha \, .$$

2. Das CAUCHYsche Problem. Als B_2 wählen wir den Raum der in E_m stetigen und beschränkten Funktionen mit der Norm

$$||\varphi||_2 = \sup_{x \in E_m} |\varphi(x)| \, . \tag{5}$$

B_1 sei der Raum der Funktionen, die in $E_m \times [0, \infty)$ stetig und beschränkt sind, mit der Norm

$$||u||_1 = \sup_{x \in E_m,\, t \geqq 0} |u(x, t)| \, . \tag{6}$$

Wenn $\varphi \in B_2$ gilt, so existiert die Lösung der Aufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \, , \qquad u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{7}$$

im Raume B_1 (§ 3, Kap. 23) und diese ist eindeutig (§ 4, Kap. 20). Das bedeutet, daß der Operator R, der die Anfangsfunktion φ in die Lösung überführt, existiert und auf dem gesamten Raum B_2 definiert ist. Weiterhin folgt aus der POISSONschen Formel

$$u(x, t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \varphi\,(x + 2\sqrt{t}\,\xi)\, e^{-\xi^2}\, d\xi \, ,$$

die in Gestalt der Formel (3.4) aus Kap. 23 aufgeschrieben wurde, die Beziehung

$$|u(x, t)| \leqq \sup_{z \in E_m} |\varphi(z)|\, \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sup_{z \in E_m} |\varphi(z)| = ||\varphi||_2 \, .$$

Diese Ungleichung bleibt erhalten, wenn wir ihre linke Seite durch die obere Grenze ersetzen:

$$||u||_1 = ||R\,\varphi||_1 \leqq ||\varphi||_2 \, .$$

Folglich gilt $||R|| \leqq 1$. Somit ist das CAUCHYsche Problem für die Wärmeleitungsgleichung im Raumpaar (B_1, B_2) korrekt gestellt. Die Normen in B_1 und B_2 werden dabei durch die Formeln (6) und (5) definiert.

§ 7. Aufgaben für die Wellengleichung

Wir werden nicht bei der gemischten Aufgabe der Wellengleichung verweilen, deren Korrektheit nach demselben Schema wie für die Wärmeleitungsgleichung untersucht wird. Die Formulierung und den Beweis der entsprechenden Behauptungen überlassen wir dem Leser.

Wir betrachten das Cauchysche Problem für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0\,,$$
$$u|_{t=0} = \varphi_0(x)\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)\,. \tag{1}$$

Der Raum B_1 sei der Raum $C^{(2)}(E_m \times [0, \infty))$ der Funktionen, die in jedem Punkt $x \in E_m$ und für beliebiges $t \geqq 0$ zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig und beschränkt sind. Die Norm des Elementes u erklären wir durch die Größe

$$||u||_1 = \max\left\{|u(x)| + \sum_{k=1}^{m+1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| + \sum_{j,\,k=1}^{m+1} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\right|\right\}, \tag{2}$$

$$x_{m+1} = t\,.$$

Weiterhin sei B_2 der Raum der Paare $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)$ mit der Norm

$$||\Phi||_2 = \max\left\{\sum_{n=0}^{m+3} \sum \left|\frac{\partial^n \varphi_0}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}}\right| + \sum_{n=0}^{m+2} \sum \left|\frac{\partial^n \varphi_1}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}}\right|\right\}; \tag{3}$$

die innere Summierung erfolgt über alle Tupel nichtnegativer Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n \leqq m$, deren Summe gleich n ist.

Wie üblich bezeichnen wir mit R den Operator, der das Paar Φ der Vorgaben in die Lösung des Cauchyschen Problems (1) überführt.

Aus dem Eindeutigkeitssatz für das Cauchysche Problem (§ 4, Kap. 21) folgt, daß der Operator R existiert, und aus den Resultaten des § 1, Kap. 24, erhalten wir, daß dieser Operator aus B_2 in B_1 wirkt und auf dem gesamten Raum B_2 definiert ist. Weiterhin folgt aus der Formel (1.6) des Kap. 24 und aus dem Satz 23.1.2, daß R als Operator von B_2 in B_1 beschränkt ist. Daraus ergibt sich die Korrektheit des Cauchyschen Problems für die Wellengleichung im Paar der hier definierten Räume B_1 und B_2.

§ 8. Über nicht korrekte Aufgaben der mathematischen Physik

Wir erwähnten schon in § 1, daß ein und dieselbe Aufgabe in einem Paar von Räumen korrekt und in einem anderen Paar nicht korrekt gestellt sein kann. Wir erläutern hier diese Behauptung an zwei einfachen Beispielen.

1. Das Dirichletsche Problem für die homogene Laplace-Gleichung. Dieses Problem wurde in § 3 betrachtet, wo wir folgendes feststellten: Wenn Ω ein Gebiet ist und Γ sein Rand, so ist das Problem im Raumpaar $(G(\overline{\Omega}), C(\Gamma))$ korrekt gestellt. In einer Reihe von Fällen ist es allerdings wichtig, die Größe des Dirichletschen Integrals von der gesuchten Funktion

$$D(u) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$$

zu kennen. Dieses Integral ist gewöhnlich dem Energiezustand proportional, der durch die Funktion u beschrieben wird. In diesem Zusammenhang stellen wir die Frage nach der Korrektheit des DIRICHLETschen Problems für die homogene LAPLACE-Gleichung im Raumpaar $(H_2(\Omega), C(\Gamma_5))$ wobei $H_2(\Omega)$ der Raum aller Funktionen ist, die zusammen mit ihren ersten Ableitungen quadratisch summierbar sind. Die Norm in $H_2(\Omega)$ wird durch die Formel

$$\|u\|^2_{H_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right] dx \tag{1}$$

definiert. Leicht überzeugt man sich davon, daß die Antwort auf diese Frage negativ ausfällt. Wir betrachten das bekannte Beispiel von HADAMARD. Es sei Ω der Kreis $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Wir formulieren folgende Aufgabe: Es ist eine in Ω harmonische Funktion $u(x_1, x_2)$ zu finden, die der Randbedingung

$$u|_{\varrho=1} = \varphi(\theta)\,, \qquad \varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(2^{2n}\,\theta) \tag{2}$$

genügt. Hier sind ϱ und θ die Polarkoordinaten des Punktes (x_1, x_2).

Die Glieder der Reihe (2) sind auf der Kreislinie $\Gamma\,(\varrho = 1)$ stetig, die Reihe selbst konvergiert gleichmäßig, da sie die konvergente Majorante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

besitzt. Daraus folgt $\varphi \in C(\Gamma)$. Die Lösung der Aufgabe (2) kann in Gestalt der Reihe (siehe § 1 des Kap. 13)

$$u(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, \varrho^{2^{2n}} \cos(2^{2n}\,\theta) \tag{3}$$

dargestellt werden. Das DIRICHLETsche Integral der Funktion divergiert. In der Tat, man kann unschwer nachprüfen, daß für $0 < \varrho_0 < 1$

$$\iint\limits_{\varrho<\varrho_0} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] dx_1\, dx_2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_0^{2^{2n+1}} \tag{4}$$

gilt. Die Summe der Reihe (4) strebt für $\varrho_0 \to 1$ gegen Unendlich. In der Tat, wir geben uns eine beliebige natürliche Zahl N vor und wählen $\varrho_1 < 1$ dergestalt, daß $\varrho_1^{2^{2N+1}} > \frac{1}{2}$ gilt. Dann ergibt sich für $\varrho_0 > \varrho_1$ die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_0^{2^{2n+1}} > \sum_{n=1}^{N} \varrho_0^{2^{2n+1}} > \frac{N}{2} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,.$$

Würde das DIRICHLETsche Integral der Funktion (3) über dem Kreis mit dem Radius 1 konvergieren, so wäre das kleinere Integral (4) beschränkt.

Somit gehört die Lösung der Aufgabe (2) nicht dem Raum $H_2(\Omega)$ an. Wir betrachten jetzt den Operator R, der die Funktion $\varphi(\theta)$ in die Lösung $u(x_1, x_2)$

des DIRICHLETschen Problems überführt. Wenn dieser Operator als Operator von $C(\Gamma)$ in $H_2(\Omega)$ betrachtet wird, so ist er nicht auf dem gesamten Raum $C(\Gamma)$ definiert. Daraus folgt schon, daß das DIRICHLETsche Problem im Raumpaar $(H_2(\Omega), C(\Gamma))$ nicht korrekt gestellt ist.

2. Das CAUCHYsche Problem für die Saitenschwingungsgleichung. Wir betrachten das CAUCHYsche Problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad u|_{t=0} = \varphi_0(x)\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{5}$$

unter folgenden Voraussetzungen: Die Funktionen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ seien auf dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gegeben, und es gelte

$$\varphi_0 \in C^{(2)}[0, 1]\,, \qquad \varphi_1 \in C^{(1)}[0, 1]\,.$$

Das Intervall $[0, 1]$ stellt das Abhängigkeitsgebiet für das Dreieck T der Abb. 48 dar; in diesem Dreieck existiert die Lösung des CAUCHYschen Problems, sie ist eindeutig und wird durch die D'ALEMBERTsche Formel (Formel (7.5) des Kap. 24) geliefert. Aus dieser Formel ersieht man leicht, daß für die Lösung der Aufgabe (5) $u \in C^{(2)}(\overline{T})$ gilt und daß die genannte Aufgabe im Raumpaar $(C^{(2)}(\overline{T}), B_2)$ korrekt gestellt ist, wobei B_2 der Raum aller Paare $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)$ mit der Norm

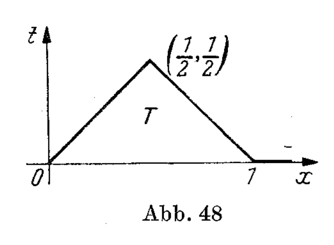


Abb. 48

$$\|\Phi\| = \|\varphi_0\|_{C^{(2)}} + \|\varphi_1\|_{C^{(1)}}$$

ist. Die gleiche D'ALEMBERTsche Formel zeigt, daß die Aufgabe (5) zum Beispiel im Raumpaar $(C^{(k)}(\overline{T}), B_2)$ für beliebiges $k > 2$ nicht korrekt gestellt ist.

Anhänge

ANHANG 1

ELLIPTISCHE SYSTEME

1. Die Definition der elliptischen Systeme

Wir betrachten ein System von N linearen partiellen Differentialgleichungen mit N unbekannten Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_N$ und m unabhängigen Veränderlichen. Dieses System kann man wie folgt niederschreiben:

$$\sum_{k=1}^{N} L_{jk} u_k = f_j(x) , \qquad j = 1, 2, \ldots, N . \tag{1}$$

Hierbei sind L_{jk} gewisse lineare Differentialausdrücke; x kennzeichnet, wie üblich, einen Punkt des m-dimensionalen euklidischen Raumes mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Für das Weitere ist es günstiger, das System (1) in etwas anderer Gestalt zu schreiben.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ nicht negative ganze Zahlen. Das geordnete m-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ nennen wir *Multiindex*; mit $|\alpha|$ bezeichnen wir die Summe der Komponenten des Multiindex α:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m .$$

Wenn ξ ein Vektor mit m Komponenten ist, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, so schreiben wir

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_m^{\alpha_m} .$$

Wir setzen noch

$$D_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m ,$$

und ebenfalls

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_m^{\alpha_m} .$$

Wenn die Ordnung des Differentialausdruckes L_{jk} gleich s_{jk} ist, so kann man offensichtlich

$$L_{jk} u_k = \sum_{|\alpha| \leqq s_{jk}} A_{jk}^{(\alpha)}(x) D^\alpha u_k$$

schreiben. Wir führen die Bezeichnung

$$\sum_{|\alpha| \leqq s_{jk}} A_{jk}^{(\alpha)}(x) D^\alpha = L_{jk}(x, D) \tag{2}$$

ein. Offenbar ist $L_{jk}(x, D)$ ein Polynom bezüglich $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Jetzt kann man das System (1) in der Gestalt

$$\sum_{k=1}^{N} L_{jk}(x, D)\, u_k = f_j(x)\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, N\,,$$

darstellen, oder, wenn man die Matrix der Ordnung N

$$L(x, D) = \|L_{jk}(x, D)\|_{j,\,k=1}^{j,\,k=N}$$

und die aus N Komponenten bestehenden Vektoren

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)\,,$$
$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$$

einführt, ergibt sich

$$L(x, D)\, u = f(x)\,. \tag{3}$$

Mit $L^0_{jk}(x, D)$ bezeichnen wir den sogenannten *Hauptteil* der polynomialen Matrix $L(x, D)$. Man erhält ihn, wenn man im linken Teil der Formel (2) nur die Summanden beibehält, für die $|\alpha| = s_{jk}$ gilt:

$$L^0_{jk}(x, D) = \sum_{|\alpha| = s_{jk}} A^{(\alpha)}_{jk}(x)\, D^\alpha\,. \tag{4}$$

Es sei $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ ein beliebiger Punkt des Raumes E_m. Wir setzen

$$L^0_{jk}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s_{jk}} A^{(\alpha)}_{jk}(x)\, \xi^\alpha\,. \tag{5}$$

Das System (1) (oder (3)) wird nach I. G. PETROWSKI [5] *elliptisch* im Punkt x genannt, wenn in diesem Punkt die Determinante Det $L^0(x, \xi)$, wobei

$$L^0(x, \xi) = \left\| \begin{matrix} L^0_{11}(x, \xi) & L^0_{12}(x, \xi) & \ldots & L^0_{1N}(x, \xi) \\ L^0_{21}(x, \xi) & L^0_{22}(x, \xi) & \ldots & L^0_{2N}(x, \xi) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ L^0_{N1}(x, \xi) & L^0_{N2}(x, \xi) & \ldots & L^0_{NN}(x, \xi) \end{matrix} \right\| \tag{6}$$

gilt, nur für $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_m = 0$ verschwindet. Das System (1) heißt auf einer gewissen Menge elliptisch, wenn es in jedem Punkt dieser Menge elliptisch ist.

Man sieht leicht ein, daß im Falle einer Gleichung zweiter Ordnung die Definition der Elliptizität nach I. G. PETROWSKI mit der Definition des § 2 aus Kap. 9 übereinstimmt. Eine allgemeinere Definition elliptischer Systeme ist in [11] gegeben worden.

Beispiel 1. Die Gleichung

$$\Delta^n u = f(x)\,, \tag{7}$$

wobei Δ der LAPLACE-Operator und n eine natürliche Zahl ist, ist nach I. G. PETROWSKI elliptisch. In der Tat, im betrachteten Fall gilt $N = 1$, die Matrix (6) reduziert sich auf ein einziges Element

$$L^0_{11}(x, \xi) = L_{11}(x, \xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_m^2)^n\,.$$

Offenbar verschwindet der letzte Ausdruck nur für $\xi_1 = \cdots = \xi_m = 0$.

Beispiel 2. Das Gleichungssystem der statischen Elastizitätstheorie hat die Gestalt

$$\Delta u + \omega \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f(x) . \tag{8}$$

Hierbei sind $u = (u_1, \ldots, u_m)$ und $f = (f_1, \ldots, f_m)$ aus m Komponenten bestehende Vektoren, ω ist ein Zahlenparameter. Die Matrix (6) nimmt im gegebenen Fall die Gestalt

$$\left\| \begin{matrix} \xi^2 + \omega\, \xi_1^2 & \omega\, \xi_1\, \xi_2 & \ldots & \omega\, \xi_1\, \xi_m \\ \omega\, \xi_2\, \xi_1 & \xi^2 + \omega\, \xi_2^2 & \ldots & \omega\, \xi_2\, \xi_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega\, \xi_m\, \xi_1 & \omega\, \xi_m\, \xi_2 & \ldots & \xi^2 + \omega\, \xi_m^2 \end{matrix} \right\|$$

an, wobei $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_m^2$ gilt. Die Determinante der letzteren Matrix läßt sich leicht ermitteln, sie nimmt den Wert

$$(1 + \omega)\, \xi^{2m}$$

an.

Nunmehr ist offensichtlich, daß das System (8) mit Ausnahme von $\omega = -1$ für alle Werte des Parameters ω elliptisch ist. Wenn man $f(x)$ durch $\omega f(x)$ ersetzt, so erhalten wir für $\omega = \infty$ das System

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} u = f(x) .$$

Dieses System ist nicht elliptisch, denn seine Determinante ist gleich Null. Man kann deshalb sagen, daß das Gleichungssystem der statischen Elastizitätstheorie mit Ausnahme der Werte $\omega = -1$ und $\omega = \infty$ für alle Werte des Parameters ω elliptisch ist.

2. Die Formulierung der Randwertaufgabe. Die Komplementärbedingung

Wenn die Dimension des Raumes größer oder gleich 3 ist, so ist die Determinante der Matrix (6) für das elliptische System ein Polynom geraden Grades bezüglich ξ; wenn dabei ξ und ξ' linear unabhängige Vektoren im Raume E_m sind, so besitzt das Polynom $\operatorname{Det} L^0(x, \xi + \tau\, \xi')$ bezüglich τ die gleiche Anzahl von Nullstellen mit positiven und negativen Imaginärteilen (s. [4], [11]).

Wenn $m = 2$ ist, so betrachten wir nur solche elliptische Systeme, für die die Determinante der Matrix (6) die beiden hier angeführten Eigenschaften besitzt.

Es sei Ω ein endliches Gebiet des Raumes E_m, dessen Rand Γ eine $(m - 1)$-dimensionale Fläche ist. Der Einfachheit halber nehmen wir diese als beliebig oft differenzierbar an. Weiterhin betrachten wir Randbedingungen der Gestalt

$$\left[\sum_{k=1}^{N} B_{jk}(x, D)\, u_k \right]_\Gamma = \varphi(x) , \qquad j = 1, 2, \ldots, N_1 , \tag{9}$$

wobei die Ausdrücke B_{jk} Polynome bezüglich D sind. Folglich stellen die linken Seiten der Gleichungen (9) die auf der Fläche Γ ermittelten Werte gewisser Differentialausdrücke von den Funktionen u_k dar.

Weiter nehmen wir an, daß die Koeffizienten der Polynome $L_{jk}(x, D)$ und $B_{jk}(x, D)$ beliebig oft differenzierbare Funktionen von x in $\overline{\Omega}$ sind.

Die Ausdrücke B_{jk} mögen der folgenden Bedingung genügen, die in [10] und [11] *Komplementärbedingung* genannt wurde. In etwas anderer Gestalt war sie schon früher in [4] und [9] formuliert worden.

Mit $B^0_{jk}(x, D)$ bezeichnen wir den Hauptteil des Polynoms $B_{jk}(x, D)$. Es sei $x \in \Gamma$ und ξ ein beliebiger, von Null verschiedener Tangentenvektor zu Γ im Punkte x. Weiterhin sei ν der Normaleneinheitsvektor auf Γ im gleichen Punkt. Mit $\tau_k(x, \xi)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $\operatorname{Det} L^0(x, \xi + \tau \nu) = 0$, $\operatorname{Im} \tau_k > 0$, und mit $M(x, \xi, \tau)$ das Polynom (bezüglich τ)

$$M(x, \xi, \tau) = \prod_{k=1}^{p} \left(\tau - \tau_k(x, \xi)\right) .$$

Mit $C^0(x, \xi)$ bezeichnen wir schließlich die Matrix, deren Elemente die algebraischen Ergänzungen der Matrix (6) sind. Die Komplementärbedingung besteht im folgenden:

Die Zeilen der Matrix $B^0(x, \xi + \tau \nu)\, C^0(x, \xi + \tau \nu)$ sollen modulo $M(x, \xi, \tau)$ linear unabhängig sein.

Beispiel 3. Das System (1) stelle eine einzige nichtentartete elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung dar. Für das DIRICHLETsche und das NEUMANNsche Problem dieser Gleichung ist die Komplementärbedingung erfüllt. Wenn die Dimension des Raumes größer oder gleich 3 ist, so wird für das Problem der Richtungsableitung die Komplementärbedingung genau in den Punkten des Randes erfüllt, in denen die Richtung der Differentiation nicht tangential zum Rand ist. Wenn $m = 2$ ist, so wird für das Problem der Richtungsableitung die Komplementärbedingung auf dem gesamten Rand erfüllt.

Beispiel 4. Für das System (8) der Gleichungen der statischen Elastizitätstheorie formulieren wir das DIRICHLETsche Problem, d. h. $u|_\Gamma = \varphi(x)$, wobei $\varphi(x)$ eine auf dem Rand Γ des elastischen Körpers gegebene Vektorfunktion ist. Den Raum setzen wir als dreidimensional voraus, $m = 3$. Die Komplementärbedingung wird für $\omega \neq -2$ erfüllt und für $\omega = -2$ gestört. Dabei versteht es sich von selbst, daß wir die Werte $\omega = \infty$ und $\omega = -1$ nicht betrachten, da für sie das System (8) nicht elliptisch ist.

Zur Komplementärbedingung kann man auf folgende Weise gelangen. Wir halten einen Punkt $x_0 \in \Gamma$ fest und legen in diesen Punkt den Ursprung eines lokalen Koordinatensystems $J_1, J_2, \ldots, J_m$. Wie üblich legen wir fest, daß die J_m-Achse entlang der Normalen auf Γ gerichtet ist, die restlichen Achsen befinden sich dann in der Tangentialebene. Im System (1) und in den Randbedingungen (9) behalten wir nur die Hauptglieder bei und „frieren" in ihnen die Koeffizienten ein, indem wir den Punkt x durch x_0 ersetzen. Das System (1) wandeln wir in ein homogenes System um, indem wir die rechten Seiten $f_j(x)$ durch Null ersetzen. Schließlich ersetzen wir noch das Gebiet Ω durch den Halbraum $J_m > 0$. Wir gelangen somit zu dem weitgehend vereinfachten Randwertproblem: Die Gleichungen und die Randbedingungen sind bezüglich der Ordnung der Differentiation homogen und ihre Koeffizienten sind Konstanten, die Differentialgleichungen sind auch im üblichen Sinn homogen und die Lösung wird im einfachsten Gebiet, im Halbraum, gesucht. Wenn wir die FOURIER-Transformation bezüglich $J_1, J_2, \ldots, J_{m-1}$ durchführen, ergibt sich ein gewisses Randwertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf der Halbachse $J_m > 0$. Die Komplementärbedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß die letztere Aufgabe eine und nur eine Lösung besitzt, die für $J_m \to \infty$ gegen Null strebt.

3. Über die Räume von S. L. SOBOLEW [7, 8] und L. N. SLOBODEZKI [6]

Die Räume von S. L. SOBOLEW wurden im §5 des Kap. 2 behandelt. Die Norm kann im Raum $W_p^{(l)}(\Omega)$ durch die Formel

$$||u|| = \int_\Omega |u(x)|\, dx + \left\{ \int_\Omega \sum_{|\alpha| = l} |D^\alpha u(x)|^p\, dx \right\}^{1/p} \tag{10}$$

gegeben werden, die sich nur durch die Bezeichnungen von der Formel (5.1) des Kap. 2 unterscheidet. Die Norm

$$\left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} |D^\alpha u(x)|^p \, dx\right\}^{1/p} \tag{11}$$

ist der Norm (10) äquivalent. Wenn $p = 2$ ist, so ist der Raum $W_2^{(l)}(\Omega)$ mit der Norm (11) ein HILBERT-Raum.

Die Funktionen, die den Raum $W_p^{(l)}(\Omega)$ bilden, können auch Vektorfunktionen sein. In diesem Falle muß man unter $|u(x)|$ oder $|D^\alpha u(x)|$ in den Formeln (10) und (11) die Länge des entsprechenden Vektors verstehen. Für $l = 0$ geht der Raum von S. L. SOBOLEW in den Raum $L_p(\Omega)$ über.

Es sei nun l eine positive, aber nicht ganze Zahl. Wir setzen $l_0 = [l]$, $\lambda = l - l_0$. Den Raum von L. N. SLOBODEZKI $W_p^{(l)}(\Omega)$ bilden alle Funktionen $u(x)$, die im Gebiet Ω sämtliche verallgemeinerten Ableitungen der Ordnung l_0 besitzen, die mit dem Exponenten p summierbar und dabei so beschaffen sind, daß

$$\sum_{|\alpha|=l_0} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{\lambda p + m}} \, dx \, dy < \infty$$

gilt. Die Norm kann im Raum von L. N. SLOBODEZKI durch die Formel

$$||u||^p = \sum_{|\alpha|=0}^{l_0} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx + \sum_{|\alpha|=l_0} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{\lambda p + m}} \, dx \, dy \tag{12}$$

gegeben werden.

Im weiteren betrachten wir nur den Fall $p = 2$. In diesem Fall ist der Raum $W_p^{(l)}$ mit der Norm (12) ein HILBERT-Raum.

Man kann Räume $W_p^{(l)}$ betrachten, die durch Funktionen gebildet werden, welche nicht in einem Gebiet, sondern auf irgendeiner Mannigfaltigkeit, im Spezialfall auf einer gewissen Fläche gegeben sind.

4. Koerzitive Randwertprobleme

Das Randwertproblem (1), (9) wird in Ω *elliptisch* oder *koerzitiv* genannt, wenn

1. das System (1) im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ elliptisch ist;
2. in allen Punkten des Randes von Ω die Komplementärbedingung erfüllt wird.

Mit L bezeichnen wir den Operator, der durch die linke Seite der Matrixgleichung (3) erzeugt wird, und mit B den durch die Matrix der in die Randbedingung (9) eingehenden Operatoren B_{jk} erzeugten Operator. Mit A bezeichnen wir schließlich das Paar (L, B). Wir setzen voraus, daß alle Differentialausdrücke L_{jk} ein und dieselbe Ordnung s haben.

Es sei m_j die höchste Ordnung der Differentiation in der j-ten Bedingung (9) und n eine beliebige ganze Zahl, die nicht kleiner als $1 + \max m_j$ ist. Mit $V^{(n)}(\Gamma)$ bezeichnen wir die orthogonale Summe der Räume von L. N. SLOBODEZKI $W_2^{\left(n - m_j - \frac{1}{2}\right)}(\Gamma)$, $j = 1, 2, \ldots, N_1$. Wenn weiterhin l eine hinreichend große

ganze Zahl ist, so bezeichnen wir mit $H_l(\Omega, \Gamma)$ die orthogonale Summe des Sobolewschen Vektorraumes $W_2^{(l)}(\Omega)$ und des Raumes $V^{(l)}(\Gamma)$. Wir nehmen $l \geqq l_0 = \max(s, m_j + 1)$ an. Der oben eingeführte Operator A bildet offenbar aus $W_2^{(l)}(\Omega)$ in $H_l(\Omega, \Gamma)$ ab. Es gilt folgender Satz.

Satz. *Die Aufgabe* (1), (9) *ist genau dann koerzitiv, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1°. *Wenn* $u \in W_2^{(l_0)}(\Omega)$, $L\, u \in W_2^{(l-s)}(\Omega)$ *und* $B\, u \in V^{(l)}(\Gamma)$ *gilt, so ist* $u \in W_2^{(l)}(\Omega)$, *und es hat die Abschätzung*

$$||u||_{W_2^{(l)}} \leqq C\, \{||L\, u||_{W_2^{(l-s)}} + ||B\, u||_{V^{(l)}} + ||u||_{L_2}\} \tag{13}$$

Gültigkeit, in der die Konstante C nicht von der Funktion u abhängt.

2°. *Der Operator A ist normal auflösbar, und sein Index ist endlich.*

Der hier formulierte Satz wurde in [1] für die umfassendere Klasse der sogenannten *singulären Integro-Differentialrandbedingungen* bewiesen; im Vergleich dazu stellen die hier betrachteten Bedingungen (9) nur einen Spezialfall dar.

5. Über den Index der koerzitiven Aufgabe

Aus dem im Punkt 4 angeführten Satz folgt, daß jede koerzitive Aufgabe einen endlichen Index besitzt. Von großem Interesse sind das Problem der Berechnung dieses Index und die Untersuchung seiner Eigenschaften.

Eine recht allgemeine Formel für den Index, die für eine große Klasse von Aufgaben, insbesondere für die koerzitive Aufgabe (1), (9) anwendbar ist, wurde von M. F. Atiyah und I. M. Singer [12] aufgestellt. Es ist allerdings schwierig, den Index nach dieser Formel auszurechnen. Deshalb sind die Fälle von Interesse, für die man über den Index diese oder jene Behauptungen aussagen kann, die sich einfacher formulieren lassen. Wir führen eine solche Behauptung an.

Es mögen sich zwei koerzitive Aufgaben des Typs (1), (9) *nur durch die Randbedingungen unterscheiden. Dann ist die Differenz der Indizes dieser Aufgaben gleich dem Index eines gewissen Systems von singulären Integralgleichungen, das vollständig durch die Vorgaben beider Aufgaben bestimmt wird* [1].

Den Index eines Systems von singulären Integralgleichungen kann man verhältnismäßig einfach berechnen. Deshalb kann man, wenn für ein gegebenes elliptisches System (1) der Index bei irgendwelchen Randbedingungen bekannt ist, diesen unschwer auch bei beliebigen anderen Randbedingungen, die der Komplementärbedingung genügen, ausrechnen.

6. Nichtkoerzitive Aufgaben für elliptische Systeme

Die Untersuchung dieser Aufgaben trifft auf große Schwierigkeiten. Am weitesten ist das Problem der Richtungsableitung für eine nicht entartete elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung in dem Fall ausgearbeitet, wo die Richtungder Differentiation zur Oberfläche des Randes auf einer Mannigfaltigkeit niedrigerer Dimension tangential ist. Eine Darlegung der Hauptergebnisse, die sich auf das Problem der Richtungsableitung im nicht koerzitiven Falle beziehen, sowie auch bibliographische Angaben kann man in [2], [3], [13] finden.

ANHANG 2

ÜBER DAS CAUCHYSCHE PROBLEM FÜR HYPERBOLISCHE GLEICHUNGEN (W. M. BABITSCH)

1. Die Lösung des CAUCHYschen Problems für die Wellengleichung

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$$

wurde im vorliegenden Buch für den Fall ermittelt, daß die Anfangswerte bei $t = 0$ gegeben wurden.

Man kann eine Formel herleiten, die die Lösung für das weitaus allgemeinere CAUCHYsche Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \Delta u &= f(x, t) , \\ u|_S &= u_0(t, x) , \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S &= u_1(t, x) \end{aligned} \tag{1}$$

liefert. Hierbei sind f, u_0, u_1 hinreichend glatte Funktionen, u_0 und u_1 sind auf der hinreichend glatten Fläche S definiert, und n ist die Richtung der Normalen auf S. Die Fläche S soll noch eine weitere wichtige Bedingung erfüllen: Es soll die Ungleichung

$$\cos^2(n, t) - a^2 \sum_{i=1}^{m} \cos^2(n, x_i) > 0 \tag{2}$$

erfüllt sein.

Eine Fläche S, die der Bedingung (2) genügt, wird *räumlich orientiert* oder *Fläche räumlichen Typs* genannt.

Wir weisen einen Weg, mit dessen Hilfe die Lösung der Aufgabe (1) in Integralform gefunden werden kann.

Es sei m eine gerade Zahl und (x_0, t_0) der Punkt, in dem wir die Funktion u ermitteln wollen (wir setzen voraus, daß die Lösung der Aufgabe (1) existiert). Der charakteristische Kegel mit der Spitze im Punkte (x_0, t_0)

$$a^2 (t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 = 0 \tag{3}$$

schneide aus S den endlichen Teil Q mit dem $(m - 1)$-dimensionalen glatten Rand σ aus. Indem man die Bedingung (2) benutzt, kann man leicht nachweisen, daß die letzte Voraussetzung erfüllt ist, wenn der Punkt (x_0, t_0) in der Nähe der Fläche S liegt.

Wir wenden die GREENsche Formel

$$\int_{\Xi} u\, L\, v\, d\Xi = \int_{F} (u\, P\, v - v\, P\, u)\, dF + \int_{\Xi} v\, L\, u\, d\Xi\,,$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta\,, \qquad P = \cos(n, t)\,\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{m} \cos(n, x_i)\,\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4}$$

auf die gesuchte Lösung der Aufgabe (1) und auf die Funktion

$$v = v_\lambda(x, t, x_0, t_0) = \frac{(-1)^{(m-2)/2}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{2\,\pi^{(m+1)/2}\,a}\left[a^2\,(t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2\right]_+^{\xi}. \tag{5}$$

an. Hierbei sei Γ die EULERsche Gammafunktion, λ eine komplexe Zahl, $\zeta_+^\lambda = \zeta^\lambda$ für $\zeta > 0$ und $\zeta_+^\lambda = 0$ für $\zeta \leqq 0$. Der Integrationsbereich Ξ ist durch die Oberfläche des Kegels (3) und durch den Teil Q, den dieser Kegel aus S ausschneidet, begrenzt. Den Rand dieses Gebietes bezeichnen wir mit F. Beide Teile der Gleichung (4) sind reguläre Funktionen von λ für $\operatorname{Re}\lambda > 2$. Indem wir beide Teile der Formel (5) analytisch in den Punkt $\lambda = -\frac{m-1}{2}$ fortsetzen (man kann beweisen, daß eine solche analytische Fortsetzung möglich ist), erhalten wir auf der linken Seite der Formel (4) den Wert $u(x_0, t_0)$, auf der rechten Seite jedoch einen Ausdruck, der die unbekannten Funktionen nicht enthält.

In der Tat, für $\operatorname{Re}\lambda > 2$ verschwinden v und $P\,v$ auf der Oberfläche des Kegels, weiterhin gilt $L\,u = f$, $u|_S = u_0$; $P(u)$ kann man unschwer durch $u|_S = u_0$ und $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = u_1$ ausdrücken. Die Formel, die wir mit Hilfe des angezeigten Weges erhalten, liefert die Lösung der Aufgabe (1), was man durch unmittelbares Nachprüfen zeigen kann. Die Funktion (5), die mit Null in das Gebiet $a^2\,(t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 < 0$ und in den Halbraum $t > t_0$ (oder $t < t_0$) fortgesetzt wird, nennen wir für $\lambda = -\frac{m-1}{2}$ *Fundamentallösung des* CAUCHY*schen Problems* für die Wellengleichung. Für den Spezialfall $m = 2$ ist die Funktion

$$v = \frac{1}{2\,\pi\,a}\,[a^2\,(t - t_0)^2 - (x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2]_+^{-1/2} \tag{6}$$

Fundamentallösung des CAUCHYschen Problems.

Wir weisen darauf hin, daß die Formel, die die Lösung des CAUCHYschen Problems für die Wellengleichung im Falle der Ebene liefert, die Gestalt (s. § 6, Kap. 24)

$$u(x_0, t_0) = \iint_{t=0} u_1\, v\, dx_1\, dx_2 + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{t=0} u_0\, v\, dx_1\, dx_2$$

hat.

Wenn die Anzahl m der räumlichen Veränderlichen ungerade und größer 1 ist, so ergibt sich die Lösung der Aufgabe (1) unter Benutzung derselben Methode,

nur muß man statt der Funktion (5) die Funktion

$$v = v_\lambda = \frac{1}{2\,\pi^{(m-1)/2}\,a}\,\frac{\left[a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2\right]_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\,,$$

$$\operatorname{Re}\lambda > 2$$

in die GREENsche Formel (4) einsetzen und beide Teile der erhaltenen Identität analytisch in den Punkten $\lambda = -\frac{m-1}{2}$ fortsetzen.

Die Fundamentallösung des CAUCHYschen Problems ist eine verallgemeinerte Funktion v[1]), die die Lösung der Aufgabe

$$\begin{gathered} L\,v = \delta\,(x_1 - x_1^0, \ldots, x_m - x_m^0, t - t_0)\,, \\ v|_{t>t_0} = 0 \text{ (oder } v|_{t<t_0} = 0) \end{gathered} \tag{7}$$

darstellt. Auf der rechten Seite steht die DIRACsche δ-Funktion.

Im Falle eines ungeraden m nimmt die Fundamentallösung des CAUCHYschen Problems die Gestalt

$$\begin{gathered} v = \frac{1}{2\,\pi^{(m-1)/2}a}\,\delta^{\frac{m-3}{2}}\left[a^2\,(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2\right], \\ v|_{t>t_0} = 0\;.\;\; (\text{oder } v|_{t<t_0} = 0) \end{gathered} \tag{8}$$

an. Ist die Zahl m gerade, so liefert die Funktion (5) die Fundamentallösung des CAUCHYschen Problems, wenn wir $\lambda = \frac{1-m}{2}$ setzen.

2. Für die hyperbolische Gleichung

$$\begin{gathered} Lu = \sum_{i,j=0}^{m} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=0}^{m} b_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\,u = f(x)\,, \\ x = (x_0, x_1, \ldots, x_m) \end{gathered} \tag{9}$$

ist das CAUCHYsche Problem

$$L\,u = f\,, \qquad u|_S = u_0\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = u_1 \tag{10}$$

ausführlich untersucht worden, wenn S eine Fläche vom räumlichen Typ ist.

Im Punkt x_0 konstruieren wir den Kegel

$$\sum_{i,j=0}^{m} A_{ij}(x_0)\,(x_i - x_i^0)\,(x_j - x_j^0) = 0\,. \tag{11}$$

Die Matrix $A_{ij}(x_0)$ ist die inverse Matrix von $a_{ij}(x_0)$. Den Kegel (11) kann man durch eine affine Transformation aus dem Kegel (3) erhalten. Der Kegel (11) teilt den Raum in drei Gebiete: in zwei „innere“ und ein „äußeres“. Die Fläche S ist in dem und nur dem Fall räumlich orientiert, wenn für jeden Punkt $x_0 \in S$ die Normale in diesem Punkt keine gemeinsamen Punkte mit dem Kegel (11)

[1]) Mit verallgemeinerten Funktionen kann sich der Leser anhand der Monographie [5] bekannt machen (s. auch Anhang 3, S. 447–449).

(selbstverständlich außer dem Punkt x_0) noch mit dessen Außengebiet besitzt. Für den Differentialoperator (9) kann man den Begriff der Fundamentallösung für das CAUCHYsche Problem einführen. Fundamentallösung des CAUCHYschen Problems wird in diesem Falle die verallgemeinerte Funktion v genannt, die auf einer gewissen Fläche (räumlichen Typs) homogenen Anfangsbedingungen und in einer Umgebung von S der Gleichung

$$L\,v = \delta\,(x_0 - x_0^0, \ldots, x_m - x_m^0) \qquad \bigl(x_0 = (x_0^0, \ldots, x_m^0) \in S\bigr)$$

genügt.

Die Singularitäten der Fundamentallösung liegen auf dem charakteristischen Konoid des Punktes x_0 (so wird die charakteristische Fläche genannt, die im Punkt x_0 einen konischen singulären Punkt besitzt). Im Falle des Wellenoperators und des Operators (10) haben die Singularitäten der Fundamentallösungen beider Operatoren bei gleichem m einen ähnlichen analytischen Charakter, wenn der charakteristische Konoid des Operators (10) außer dem Punkt x_0 keine Singularitäten aufweist.

Wenn der charakteristische Konoid singuläre Punkte hat, so besitzt in deren Umgebungen die Fundamentallösung eine sehr komplizierte Struktur. Wir wollen noch bemerken, daß die Fundamentallösung des Operators (10) im Falle $m = 1$ RIEMANN*sche Funktion* und bei geradem m HADAMARD*sche Elementarlösung* genannt wird.

3. Intensiv wurden unstetige Lösungen (Lösungen im verallgemeinerten Sinn oder im Sinne verallgemeinerter Funktionen) der Gleichung (10) untersucht. Unter natürlichen Voraussetzungen kann man zeigen, daß die Lösung der Gleichung (10) bei glatten a_{ij}, b_i, c, f nur auf den Charakteristiken Unstetigkeiten haben kann.

Wir nehmen an, daß die Gleichung (10) ($m = 3$) den physikalischen Prozeß der Wellenausbreitung beschreibt.

Die Charakteristik $F(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, $t = x_0$, auf der u eine Unstetigkeit besitzt, stellt vom Standpunkt eines sich im Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 befindlichen Beobachters eine sich fortbewegende Fläche dar, entlang der sich die Funktion u besonders schnell ändert. Diese Fläche wird *Wellenfront* genannt. Im Falle der Wellengleichung mit veränderlicher Geschwindigkeit

$$\frac{1}{c^2(x)}\,u_{tt} - \Delta u = 0\,, \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \tag{12}$$

werden die zur Wellenfront orthogonalen Trajektorien *Strahlen* genannt; die Strahlen genügen dem FERMATschen Prinzip: Längs des Strahls ist die Variation des FERMAT*schen Funktionals*

$$\int \frac{ds}{c(x)} = \int \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}{c(x_1, x_2, x_3)} \tag{13}$$

gleich Null.

Es ist eine formale Methodik zur Bestimmung der Singularitäten für die Lösung der Aufgabe (12) ausgearbeitet worden, in der ein wichtiges Teilgebiet die Konstruktion der Strahlen, d. h. der Extremalen des Integrals (13), darstellt.

Diese Methodik, die unter dem Namen *Strahlenmethode* bekannt ist, wird breit, allerdings ohne strenge Begründung, in den mathematischen Aufgaben der Theorie der nicht stationären Wellen angewendet. Die strenge Begründung der Strahlenmethode ist im allgemeinen Falle eine schwierige und noch ungelöste Aufgabe.

4. Wir kehren zur Wellengleichung mit $c(x) = a = \text{const}$ zurück. Wir nehmen an, daß die Anfangswerte $u_0(x_1, \ldots, x_m) = u|_{t=0}$ und $u_1(x_1, \ldots, x_m) = u_t|_{t=0}$ außerhalb eines gewissen Gebietes Ξ verschwinden. Wir konstruieren den charakteristischen Kegel (s. Formel (3)) mit der Spitze im Punkt $t = (0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, wobei $(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \Xi$ gilt. Durch die Formel

$$F = \bigcup_{(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \Xi} \left\{(t, x_1, \ldots, x_m) : a^2 t^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2\right\}$$

definieren wir die Menge F, die die Vereinigung aller Punkte der charakteristischen Kegel ist, deren Spitzen auf der Ebene $t = 0$ in den Punkten des Gebietes Ξ liegen. Die Menge F besteht offenbar nur aus dem charakteristischen Kegel

$$a^2 t^2 = (x - x_0)^2 ,$$

wenn die Menge Ξ nur aus einem Punkt besteht.

Wie aus der KIRCHHOFFschen Formel bei $m = 3$ (s. § 3, Kap. 24) folgt, verschwindet die Lösung $u(t, x_1, x_2, x_3)$ außerhalb der Menge F. Gewöhnlich drückt man diesen Fakt durch die Worte „für die Wellengleichung tritt bei $m = 3$ keine Wellendiffusion auf" aus (ausführlicher s. [9]).

Der Begriff einer *Gleichung ohne Wellendiffusion* wird leicht auf den allgemeinen Fall der Gleichung (9) erweitert. Die Rolle der charakteristischen Kegel spielen hier die charakteristischen Konoide.

Man kann unschwer nachweisen, daß bei $m = 5, 7, 9, \ldots$ im Falle der Wellengleichung keine Wellendiffusion auftritt, während bei $m = 1, 2, 4, 6, 8, \ldots$ die Funktion u außerhalb von F im allgemeinen nicht verschwindet. Genauer, u verschwindet außerhalb der Menge

$$F_1 = \bigcup_{(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \Xi} \left\{(t, x_1, \ldots, x_m) : a^2 t^2 \geqq \sum_{i=1}^{m} (x - x_i^0)^2\right\}$$

und ist auf der Menge F_1 von Null verschieden. Das Verschwinden von u außerhalb der Menge F_1 ist eine Folge der Endlichkeit des Abhängigkeitsgebietes für die Lösung des CAUCHYschen Problems (s. Punkt 7).

Ein genaues Analogon zu diesem Fakt gilt für sehr allgemeine hyperbolische Gleichungen, während das Fehlen der Wellendiffusion im gewissen Sinne eine Ausnahmeerscheinung ist. Im Falle einer hyperbolischen Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten tritt bei geradem m immer eine Diffusion auf. Es ist offensichtlich, daß bei ungeradem m für Gleichungen, die sich durch eine Transformation der Variablen in die Wellengleichung überführen lassen, ebenfalls keine Diffusion auftritt. Bei $m = 5, 7, 9, \ldots$ existieren Gleichungen ohne Diffusion, die sich nicht durch eine Variablensubstitution in eine Wellengleichung

überführen lassen [13]. Bei $m = 3$ ist ungeklärt,[1]) ob Gleichungen ohne Diffusion existieren, die sich nicht auf die Wellengleichung zurückführen lassen. Wenn es gelänge zu zeigen, daß Gleichungen „ohne Diffusion", die sich nicht auf die Wellengleichung zurückführen lassen, nicht existieren, so würde dies auf den besonderen Charakter des physikalischen Raum-Zeit-Kontinuums (x_1, x_2, x_3, t) hinweisen.

Die Fragen, die wir hier kurz streiften, werden in der klassischen Arbeit von HADAMARD [10], im Artikel von M. RIESZ [12] und in der Monographie von R. COURANT [7] behandelt. Der Strahlenmethode und ihren Anwendungen ist ein großer Teil der Arbeiten von [3] gewidmet.

5. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$Lu = \sum_{\Sigma\alpha_i = p} a_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_m} \frac{\partial^p u}{\partial t^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}, \qquad a_{p0\ldots0} = 1, \quad a_{\alpha_0\ldots\alpha_m} = \text{const}. \tag{14}$$

Gleichung (14) heißt nach *I. G.* PETROWSKI *hyperbolisch*, wenn für beliebige und nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ das Polynom bezüglich λ (mit Koeffizienten, die von $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ abhängen)

$$\Delta(\lambda, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{\Sigma\alpha_i = p} a_{\alpha_0\ldots\alpha_m} \lambda^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}\ldots\omega_m^{\alpha_m}$$

genau p reelle und paarweise verschiedene Wurzeln hat. Wir suchen die Lösung der Gleichung (14) in der Gestalt

$$u = f\left(vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i\right), \qquad \sum_{i=1}^{m} \omega_i^2 = 1, \tag{15}$$

wobei f eine beliebige Funktion ist.

Die Lösung der Gleichung (14), die die Gestalt (15) annimmt, nennt man Lösung vom *Typ einer ebenen Welle*, die sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung $-\boldsymbol{\omega}$ ausbreitet. Offensichtlich ergibt sich

$$u = f\left(vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i\right) = \text{const},$$

wenn

$$vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i = C = \text{const} \tag{16}$$

gilt, d. h. die Lösung vom Typ einer ebenen Welle (15) behält einen konstanten Wert auf den Ebenen bei, die zum Vektor $\boldsymbol{\omega}$ orthogonal sind und sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung $-\boldsymbol{\omega}$ bewegen.

---

[1]) Der polnische Mathemetiker M. MATISSON bewies, daß die Gleichung (10) durch Übergang zu neuen Veränderlichen auf eine Wellengleichung zurückgeführt werden kann, wenn im Operator (10) $m = 3$, $a_{ij} = \text{const}$ und die Gleichung $Lu = 0$ eine Gleichung ohne Diffusion ist [11].

Wenn wir den Ausdruck (15) in die Gleichung (14) einsetzen, erhalten wir

$$Lf\left(vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i\, x_i\right) = \Delta(v, \boldsymbol{\omega})\, f^{(p)}\left(v\,t + \sum_{i=1}^{m} \omega_i\, x_i\right).$$

Dafür, daß die Gleichung (14) für eine beliebige Funktion f gilt, ist die Beziehung

$$\Delta(v, \boldsymbol{\omega}) = 0$$

notwendig und hinreichend. Somit ist die Aussage, daß die Gleichung (14) hyperbolisch nach I. G. PETROWSKI ist mit der Behauptung gleichbedeutend, daß für jede Richtung $\boldsymbol{\omega}$ genau p ebene Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten existieren, die sich in der Richtung $-\boldsymbol{\omega}$ ausbreiten.

Fundamentallösung des CAUCHYschen Problems für die Gleichung (14) wird die verallgemeinerte Funktion h genannt, die den Bedingungen

$$L\,h = \delta\,(x - x_0, t - t_0)\,,$$

$$h|_{t > t_0} = 0$$

genügt. Die Fundamentallösung h gestattet, bei $p \geqq 2$ die Lösung der Aufgabe

$$L\,v = F(x)\,, \qquad v|_{t=0} = v_0(x)\,, \;\ldots\,, \left.\frac{\partial^{p-1} v}{\partial t^{p-1}}\right|_{t=0} = v_{p-1}(x)$$

in Integralform niederzuschreiben (F, v_i sind hinreichend glatte Funktionen).

Die Fundamentallösung h kann man mit Hilfe der Überlagerung von ebenen Wellen für beliebige $m = 1, 2, 3, \ldots$ und $p = 1, 2, 3, \ldots$ konstruieren. So gilt zum Beispiel bei ungeradem m und für $p \geqq m + 1$

$$h = -\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{2\,(2\,\pi)^{m-1}\,(p - m - 1)!} \times$$

$$\times \int_{\Xi} \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \xi_k + t - t_0\right)^{p-m-1} \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=1}^{m} X_k \xi_k + t - t_0\right) d\Xi\,,$$

$$d\Xi = \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|\,\operatorname{sgn} \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k\; H\xi_k}\,.$$

Hierbei gilt $H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \Delta(1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $X_k = x_k - x_k^0$; $d\sigma$ ist das Flächenelement der Fläche $H = 0$.

Die Herleitung der Formeln für die Fundamentallösungen kann man in [1] finden.

6. Charakteristik der Gleichung (14) nennt man eine Fläche $\gamma(t, x_1, \ldots, x_m) = 0$, in deren Punkten die Beziehung

$$\Delta\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \gamma}{\partial x_m}\right) = 0$$

gilt. Interessant ist der Umstand, daß die Fundamentallösungen nur auf dem charakteristischen Konoid Singularitäten aufweisen. Charakteristisches Ko-

noid[1]) wird im Raume der Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ die Fläche genannt, die die Schar der Ebenen

$$v\,(t - t_0) + \sum_{i=1}^{m} \omega_i\,(x_i - x_i^0) = 0$$

einhüllt, wobei

$$\Delta(v, \boldsymbol{\omega}) = 0\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$$

gilt. Im Falle

$$m = 2 \qquad \text{und} \qquad \Delta(v, \boldsymbol{\omega}) \equiv v^2 - a^2 \sum_{i=1}^{m} \omega_i^2$$

stimmt die Gleichung (14) mit der Wellengleichung und das charakteristische Konoid mit dem Kegel (3) überein. Im allgemeinen Fall ist das charakteristische Konoid eine charakteristische Fläche der Gleichung (14) mit einem singulären Punkt $x_i = x_i^0$, $t = t_0$. Das charakteristische Konoid stellt im allgemeinen $\left[\frac{p-1}{2}\right] + 1$ Kegel dar, die den Punkt $x_i = x_i^0$, $t = t_0$ als gemeinsame Spitze besitzen ([. . .] ist das Zeichen für entier). Die Singularitäten der Fundamentallösung wurden in der Umgebung eines regulären Punktes des charakteristischen Konoiden in [2] untersucht. Es erwies sich, daß diese nur algebraischen, logarithmischen oder „deltaförmigen" Charakter tragen.

In den Umgebungen singulärer Punkte des charakteristischen Konoids haben die Singularitäten der Fundamentallösungen einen sehr komplizierten Charakter und sind noch nicht bis zu Ende untersucht worden.

7. Außerhalb des „umfassendsten" der Kegel, aus denen das charakteristische Konoid besteht, verschwindet die Fundamentallösung. Diese Tatsache ist mit einer sehr wichtigen Eigenschaft der hyperbolischen Gleichungen verbunden.

Wenn die Anfangswerte des Cauchyschen Problems für die Wellengleichung $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ bei $t = 0$ gegeben sind, so hängt die Lösung im Punkt $x_i = x_i^0$, $t = t_0$, $t_0 > 0$ nur von den Anfangswerten in dem durch die Kugeloberfläche $(x_i - x_i^0)^2 = a^2 t_0^2$ begrenzten Gebiet ab. Somit ist im Fall der Wellengleichung das Abhängigkeitsgebiet der Lösung des Cauchyschen Problems für jeden Punkt endlich. Für nicht hyperbolische Gleichungen existiert kein endliches Abhängigkeitsgebiet.

---

[1]) Für eine hyperbolische Gleichung zweiter Ordnung mit im allgemeinen nicht konstanten Charakteristiken wurde eine andere Definition des charakteristischen Konoiden (s. Punkt 2) gegeben. Beide Definitionen sind gleichzeitig nur im Fall einer hyperbolischen Gleichung mit konstanten Koeffizienten der Gestalt

$$u_{tt} = a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}\,, \qquad a_{ij} = \text{const}$$

anwendbar, wo sie auf ein und dasselbe charakteristische Konoid führen:

$$(t - t_0)^2 = A_{ij}\,(x_i - x_i^0)\,(x_j - x_j^0)\,,$$

$$\|A_{ij}\|_{i,j=1}^{i,j=m} = \|a_{ij}\|^{-1}\,.$$

Zum Beispiel hängt die Lösung $u(x_0, t_0)$ des CAUCHYschen Problems für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u;\ u|_{t=0} = \varphi(x)$, $x = x_1, \ldots, x_m$, bei beliebigem $t_0 > 0$ von den Werten $\varphi(x)$ für alle x ab (d. h. für $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, m$; s. POISSONsche Formel im § 2, Kap. 23).

Im Falle des CAUCHYschen Problems für die Gleichung (14) kann man das Abhängigkeitsgebiet für den Punkt $x = x_0$, $t = t_0$ mit bei $t = 0$ gegebenen Anfangswerten wie folgt finden: Wir konstruieren das charakteristische Konoid mit der Spitze im Punkt $x = x_0$, $t = t_0$. Das Gebiet, das der „umfassendste" Kegel des Konoids aus der Ebene $t = 0$ herausschneidet, ist das Abhängigkeitsgebiet für den Punkt (x_0, t_0).

8. Das Gleichungssystem

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{\substack{\Sigma\alpha_j = n_i \\ \alpha_0 < n_i \\ s=1,2,\ldots,N}} a^{(s,i)}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_m} \frac{\partial^{n_i} u_s}{\partial t^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}} \tag{17}$$

$$(a^{(s,i)}_{\alpha_0\ldots\alpha_m} = \text{const},\ s = 1, 2, \ldots, N)$$

wird *hyperbolisch* nach I. G. PETROWSKI genannt, wenn für beliebige, nicht gleichzeitig verschwindende reelle Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ das Polynom bezüglich λ

$$\det\left\| \lambda^{n_i}\delta_{is} - \sum_{\substack{\Sigma\alpha_j = n_i \\ \alpha_0 < n_i}} a^{(s,i)}_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\lambda^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}, \ldots, \omega_m^{\alpha_m}\right\| \tag{18}$$

($s, i = 1, 2, \ldots, N$; δ_{is} bezeichnet das KRONECKER-Symbol) nur reelle und verschiedene Wurzeln aufweist.

Für das System (17) kann man die Darlegungen der Punkte 7 und 8 für die Gleichung (14) mit geringfügigen Änderungen wiederholen.

9. Wir betrachten das (im allgemeinen nicht lineare) System von N Gleichungen für N Funktionen $u_1, \ldots, u_N$:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x, u_s, \ldots, \frac{\partial^r u_s}{\partial t^{\alpha_0}, \partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_m^{\alpha_m}}\right) \tag{19}$$

$$(\alpha_0 < n_i;\ r \leqq n_i;\ i, s = 1, 2, \ldots, N).$$

Für dieses System seien die Anfangswerte

$$u_i\Big|_{t=0} = u_{i0}(x), \ldots, \frac{\partial^{n_i-1} u_i}{\partial t^{n_i-1}}\Big|_{t=0} = u_{i,n_i-1}(x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_m) \tag{20}$$

gegeben. Wenn $u_{i\alpha}(x)$ und F_i hinreichend glatte Funktionen sind, so kann man bei $t = 0$ alle in das System (19) eingehende Ableitungen von $u_i(t, x_1, \ldots, x_m)$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) ermitteln. Das System (19) wird für $t = 0$ mit den Anfangswerten (20) hyperbolisch genannt, wenn die Determinante (18) nur reelle und verschiedene Wurzeln bezüglich λ hat; hierbei gilt

$$a^{(s,i)}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_m} = \frac{\partial F_i}{\partial\left[\dfrac{\partial^p u}{\partial t^{\alpha_0}\,\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}\right]}\Bigg|_{t=0}. \tag{21}$$

Die Hyperbolizität hängt im Falle eines linearen Systems (19) nicht von den Anfangswerten ab. Wenn das System (19) hyperbolisch und linear ist, so kann man für das System (19) den Begriff der Fundamentalmatrix (die Verallgemeinerung des Begriffes der Fundamentallösung für das CAUCHYsche Problem) und den Begriff des charakteristischen Konoids für jeden Punkt (x_0, t_0) einführen (s. [1]).

Im allgemeinsten Fall eines Systems (19), das hyperbolisch nach I. G. PETROWSKI bei $t = 0$ sein soll, ist das CAUCHYsche Problem (19), (20) in einer Umgebung von $t = 0$ korrekt gestellt, d. h., das CAUCHYsche Problem ist bei hinreichend glatten Funktionen $u_{is}(x)$ eindeutig lösbar, wobei die Lösung im folgenden Sinne stetig von den Anfangswerten abhängt: Die Vektorfunktionen $u^{(\varkappa)}(x_0, t_0)$ $(t_0 > 0,\ t_0$ hinreichend klein), $u^{(\varkappa)} = (u_1^{(\varkappa)}, \ldots, u_N^{(\varkappa)})$, die das CAUCHYsche Problem (19), (20) mit den Anfangswerten $u_{is}^{(\varkappa)} (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ lösen, konvergieren gegen die Lösung $u(x_0, t_0)$ des CAUCHYschen Problems mit den Anfangswerten $u_{is}(x)$, wenn die Anfangswerte $u^{(\varkappa)}$ für $\varkappa \to +\infty$ zusammen mit einer ausreichenden Anzahl von Ableitungen auf jedem beliebigen Kompaktum der Ebene gegen u_i konvergieren.

Der Beweis der Korrektheit gelingt in diesem allgemeinen Fall, wenn man die Abschätzungen der gesuchten Lösung in den sogenannten energetischen Normen zu Hilfe nimmt (s. [8], [6]).

10. I. M. GELFAND und G. E. SCHILOW (s. [5]) nennen das System

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x_l}\right) u_k(x, t) \tag{22}$$

linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten hyperbolisch, wenn die Funktion $\Lambda(s) = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(s)$ $\big(\lambda_j(s)$ sind die Eigenwerte der Matrix $\|P_{jk}(s)\ H\|\big)$ den folgenden Bedingungen genügt:

1. $\Lambda(s) \leqq a\,|s| + b,\ a, b = \text{const}$;
2. für reelle $s = \sigma$ gilt

$$\Lambda(s) \leqq c\,, \qquad c = \text{const}\,.$$

Für derartige Systeme ist das CAUCHYsche Problem mit Anfangswerten für $t = 0$ in demselben Sinne korrekt gestellt, in dem auch das nach I. G. PETROWSKI hyperbolische System (19) korrekt gestellt ist (s. Ende des Punktes 9). Hierbei ist es nicht erforderlich, daß t klein ist.

Wenn wir uns auf Systeme der Gestalt (22) beschränken, dann sind die in diesem Punkt dem System auferlegten Einschränkungen für die Korrektheit des CAUCHYschen Problems nicht nur hinreichend (im Sinne des Punktes 9), sondern auch notwendig.

ANHANG 3

EINIGE FRAGEN DER THEORIE ALLGEMEINER DIFFERENTIALOPERATOREN (W. G. MAZJA)

1. Verallgemeinerte Funktionen

Gegenstand der Theorie der Differentialgleichungen waren bis in letztere Zeit Operatoren dreier Typen, nämlich elliptische, parabolische und hyperbolische Operatoren. Typische und einfachste Repräsentanten dieser Klassen sind entsprechend der LAPLACE-Operator, der Wärmeleitungs- und der Wellenoperator, über die in diesem Buch ausführlich gesprochen wurde. Das Studium dieser Operatoren und ihrer Verallgemeinerungen, das schon zu Beginn des vorigen Jahrhunderts aufgenommen wurde, erzeugte eine umfangreiche Literatur, gestattete eine große Zahl von interessantesten Fakten und Zusammenhängen anzuhäufen und zu analysieren, stimulierte die Entwicklung der Funktionentheorie, der Funktionalanalysis und anderer Gebiete der Mathematik.

Dennoch war noch vor etwa zwei Jahrzehnten fast nichts über Gleichungen und Systeme bekannt, die nicht zu den drei klassischen Typen gehören.

Während dieser kurzen Zeit wurde in der genannten Richtung eine Reihe von tiefschürfenden Resultaten gewonnen, die es gestatten, heute von einer Theorie allgemeiner Differentialoperatoren zu sprechen.

Der vorliegende Artikel ist einer kurzen und notwendigerweise nicht vollständigen Darlegung einiger Aspekte dieser Theorie gewidmet. Die Untersuchung allgemeiner Differentialoperatoren wurde in erster Linie auf der Grundlage der Theorie der verallgemeinerten Funktionen möglich.

Zuerst tauchten verallgemeinerte Funktionen ohne strenge Begründung in der Physik auf. So führt zum Beispiel die Vorstellung von der elektrischen Punktladung zur intuitiven Definition der sogenannten δ-Funktion, d. h. einer Funktion, die mit Ausnahme eines Punktes, in dem sie gleich Unendlich ist, verschwindet und deren Integral gleich 1 ist. Der Begriff des Dipols bedingt die Einführung von Ableitungen der δ-Funktion. Diese und andere „ungewöhnliche" Objekte entstanden auch in mathematischen Fragen, zum Beispiel in der Theorie der hyperbolischen Gleichungen. Diese Beispiele wiesen auf die Unzulänglichkeit des klassischen Begriffs der Funktion hin. Zuerst wurden verallgemeinerte Funktionen von S. L. SOBOLEW 1936 in die Mathematik eingeführt und beim Studium des CAUCHYschen Problems für lineare hyperbolische Gleichungen benutzt [11]. Die Theorie der verallgemeinerten Funktionen in

ihrer modernen Gestalt wurde in der Monographie von L. SCHWARTZ [24] aufgebaut und erhielt in einer Serie von Monographien, die von I. M. GELFAND und anderen Autoren verfaßt wurden, ihre weitere Entwicklung.[1])

Was stellen nun verallgemeinerte Funktionen vom mathematischen Standpunkt aus gesehen dar? Wenn man über die δ-Funktion als solche spricht, so war die mathematische Analysis schon seit langem in der Lage, für diese eine korrekte Definition zu geben. In der Tat, man kann hierbei von einem endlichen Maß sprechen, das in einem Punkt konzentriert ist. Für die Ableitungen der δ-Funktion ist die Maßtheorie allerdings nicht mehr in der Lage, eine Erklärung zu geben.

Wir kehren zur δ-Funktion zurück und erinnern uns, daß jedes Maß mit einem linearen und stetigen Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen identifiziert werden kann. Wir weisen darauf hin, daß ein solches Funktional für die δ-Funktion durch die Formel

$$\big(\delta(x), f(x)\big) = f(0)$$

erklärt ist, wobei $f(x)$ eine beliebige Funktion ist, die zum Beispiel auf dem Intervall $[-1, 1]$ stetig ist. Somit ist also die δ-Funktion nach Definition ein Funktional auf $C[-1, 1]$, das der Funktion $f(x)$ ihren Funktionswert im Punkt 0 zuordnet.

Wenn man diese Idee benutzt, kann man verallgemeinerte Funktionen als lineare stetige Funktionale auf diesen oder jenen (unter ihnen auch auf engeren als C) Räumen einführen. Diese Räume werden gewöhnlich als Räume der Grundfunktionen bezeichnet. Die Auswahl dieses oder jenes Raumes von Grundfunktionen hängt von der betrachteten analytischen Aufgabe ab. Diese Räume sind topologische Räume, aber nicht unbedingt normierte oder metrische Räume; oftmals erweisen sich die sogenannten abzählbar-normierten Räume als nützlich. Der Begriff der Konvergenz einer Folge von Grundfunktionen erzeugt auf natürliche Weise eine Konvergenz im konjugierten Raum, dem Raum der verallgemeinerten Funktionen.

Als Beispiel von Grundräumen führen wir die Räume $D(\Omega)$ und $S(E_m)$ an. Die Elemente des Raumes $D(\Omega)$ sind im Gebiet Ω beliebig oft differenzierbare Funktionen, von denen jede außerhalb einer gewissen abgeschlossenen Untermenge von Ω verschwindet. Den Raum $S(E_m)$ bilden die in E_m beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die zusammen mit allen Ableitungen für $|x| \to \infty$ schneller gegen Null konvergieren, als jede beliebige Potenz von $|x|^{-1}$. Die entsprechenden konjugierten Räume werden mit $D'(\Omega)$ und $S'(E_m)$ bezeichnet. Im weiteren ziehen wir nur diese Räume verallgemeinerter Funktionen in Betracht.

Der Operator der Differentiation ist auf $D(\Omega)$ und $S(E_m)$ definiert, und diese Räume sind bezüglich des genannten Operators invariant. Diese Tatsache ermöglicht es, den Operator der Differentiation in die Räume der Funktionale

[1]) Dem Thema des vorliegenden Abrisses entsprechen besonders die Monographien [3] der erwähnten Serie.

als konjugierten Operator einzuführen. Somit erweisen sich alle verallgemeinerten Funktionen der Klassen $D'(\Omega)$ und $S'(E_m)$ als beliebig oft differenzierbar, und der Operator der Differentiation ist ein stetiger Operator.

Analog wird die Multiplikation einer verallgemeinerten Funktion mit einer beliebigen Funktion definiert, die im entsprechenden Raum der Grundfunktionen einen Multiplikator darstellt.[1]) Unter anderem kann man eine verallgemeinerte Funktion der Klasse $D'(\Omega)$ mit jeder in Ω beliebig oft differenzierbaren Funktion multiplizieren, und eine verallgemeinerte Funktion der Klasse $S'(E_m)$ kann mit jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion, die im Unendlichen nicht schneller als eine Potenz von $|x|$ mit positivem Exponenten wächst, multipliziert werden.

Ähnliche Überlegungen ermöglichen die Definition der Fourier-Transformation, der Faltung (eine Verallgemeinerung des Integraloperators mit Differenzenkern) und anderer Operationen der klassischen Analysis für die verallgemeinerten Funktionen aus $D'(E_m)$ und $S'(E_m)$. Insbesondere bildet die Fourier-Transformation den Raum $S(E_m)$ auf sich selbst ab, wodurch eine Definition der Fourier-Transformation für verallgemeinerte Funktionen im Rahmen des Raumes $S'(E_m)$ möglich wird. Somit wird die Fourier-Transformation auf Funktionenklassen erweitert, die sogar im Unendlichen wachsen.

Die Anpassungsfähigkeit und Breite der Theorie der verallgemeinerten Funktionen machten sie zum natürlichen Apparat für die Entwicklung der Theorie der allgemeinen Differentialoperatoren und führten zu einer sehr schnellen Entwicklung dieser Theorie. Im folgenden beschränken wir uns hauptsächlich auf Operatoren mit konstanten Koeffizienten, für die in den letzten anderthalb Jahrzehnten eine Reihe von Resultaten gewonnen wurde, die in einem gewissen Sinn abgeschlossen sind.

2. Die Fundamentallösung

Wir betrachten den Differentialausdruck

$$P(D)\,u = \sum_{|\alpha|\leq l} a^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} u \tag{1}$$

der Ordnung l mit konstanten Koeffizienten. Das erste allgemeine Resultat bezüglich eines solchen Operators war der Beweis der Existenz der Fundamentallösung in verschiedenen Räumen verallgemeinerter Funktionen [23], [17].

Fundamentallösung wird die verallgemeinerte Funktion $e(x)$ genannt, die der Gleichung

$$P(D)\,e(x) = \delta(x) \tag{2}$$

genügt. Im Falle des Laplace-Operators in E_m $(m > 2)$ hat die Fundamentallösung die Gestalt $e(x) = (2-m)^{-1}\,|S_1|^{-1}\,|x|^{2-m}$.

[1]) Eine Funktion $\lambda(x)$ wird Multiplikator in einer gewissen Klasse A von Funktionen genannt, wenn das Produkt $\lambda \cdot u \in A$ ist für beliebige $u \in A$.

Wie wir wissen, dient diese Funktion als Kern eines Integraloperators (nämlich des Volumenpotentials), der eine partikuläre Lösung der Gleichung $\Delta u = f$ liefert.

Eine analoge Rolle spielt die Fundamentallösung des allgemeinen Differentialoperators $P(D)$. Die Frage nach der Existenz einer solchen Lösung kann man nur in der Sprache der verallgemeinerten Funktionen stellen: Es ist bekannt, daß sogar für einfachste Gleichungen die Fundamentallösung nicht zu existieren braucht. Die FOURIER-Transformation F überführt die Gleichung (2) in die äquivalente algebraische Gleichung

$$P(\xi)\,(F\,e)(\xi) = 1\,,$$

wobei

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a^{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}\, \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_m^{\alpha_m}$$

gilt. Somit wird die Aufgabe der Bestimmung der Fundamentallösung $e(x)$ auf die Bestimmung der verallgemeinerten Funktion $\frac{1}{P(\xi)}$ in diesem oder jenem Raum zurückgeführt. Auf diese Weise erhält man nicht nur den Satz über die Existenz der Fundamentallösung, sondern untersucht auch ihre Differentialeigenschaften.

Wie eben erwähnt wurde, kann man die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$P(D)\,u = f \tag{3}$$

finden, wenn man die Funktion $e(x)$ kennt. Außerdem kann man mit Hilfe eben dieser Funktion ein recht allgemeines Analogon zur POISSONschen Formel erhalten, d. h., man kann die Lösung der Gleichung

$$P(D)\,u = 0 \tag{4}$$

in jedem beliebigen Punkt durch die Werte dieser Lösung in einer beliebig dünnen Schicht ausdrücken, die den Punkt umgibt. Derartige Darstellungen ergaben zusammen mit der Information über die Glattheit der Fundamentallösung und ihrer Singularitäten eine der Möglichkeiten zur Untersuchung der Frage nach den Differentialeigenschaften der Lösung allgemeiner partieller Differentialgleichungen.

3. Hypoelliptische Gleichungen

Es ist bekannt, daß jede zweimal stetig differenzierbare Lösung der LAPLACE-Gleichung in Wirklichkeit eine analytische Funktion ist. Eine analoge Eigenschaft bleibt auch für beliebige elliptische Gleichungen und Systeme mit analytischen Koeffizienten erhalten. Wie I. G. PETROWSKI [10] zeigte, ist die Tatsache, daß alle Lösungen analytisch sind, eine charakteristische Eigenschaft von Operatoren elliptischen Typs. Somit erweist sich, daß die einfache „äußere"

Eigenschaft der Gleichung, die Elliptizität, der tiefgehenden und wesentlich weniger offensichtlichen Eigenschaft der Analytizität ihrer Lösungen äquivalent ist.

L. SCHWARTZ [24] formulierte das folgende Problem: Es sind die allgemeineren Differentialausdrücke $P(D)$ zu beschreiben, die die Eigenschaft besitzen, daß für jede beliebige Lösung der Gleichung (3) $u \in C^{(\infty)}$ gilt, falls $f \in C^{(\infty)}$ ist. Derartige Differentialausdrücke nennt man *hypoelliptisch*. Das einfachste Beispiel eines nicht elliptischen, aber hypoelliptischen Differentialoperators ist der Operator der Wärmeleitung.

Eine umfassende Charakteristik der hypoelliptischen Operatoren wurde 1955 von L. HÖRMANDER [13] (s. auch [12], [16]) gegeben. Für die Hypoelliptizität des Operators P ist notwendig und hinreichend, daß für alle Nullstellen des Polynoms $P(\xi)$ mit der Eigenschaft $|\xi| \to \infty$ die Relation $|\mathrm{Im}\,\xi| \to \infty$ folgt.

Wenn das Polynom $P(\xi)$ dieser Eigenschaft genügt, so existiert eine positive Konstante γ derart, daß für die Nullstellen von $P(\xi)$ die Ungleichung

$$|\mathrm{Im}\,\xi| \geqq a\,|\mathrm{Re}\,\xi|^{\gamma} - b \tag{5}$$

erfüllt ist, wobei $a > 0$ und b Konstanten sind. Der minimale Wert von γ wird *Exponent der Hypoelliptizität* genannt. Es gilt immer $\gamma \leqq 1$, und die Gleichung $\gamma = 1$ ist der Elliptizität des Operators äquivalent. Den Exponenten der Hypoelliptizität kann man durch folgende Gleichung definieren ([7]):

$$\gamma = \overline{\lim_{|\xi|\to\infty}} \frac{\ln \dfrac{|\mathrm{grad}\,P(\xi)|}{|P(\xi)|}}{\ln|\xi|}.$$

Hypoelliptische Operatoren heben sich auch durch folgende Eigenschaft hervor: Die Fundamentallösung des Operators $P(D)$ ist dann und nur dann außerhalb des Koordinatenursprungs beliebig oft differenzierbar, wenn $P(D)$ hypoelliptisch ist [20]. Indem man die Fundamentallösung konstruiert und ihre Eigenschaften untersucht, kann man große Klassen der sogenannten teilweise hypoelliptischen Gleichungen beschreiben, deren Lösungen für einen Teil der Veränderlichen beliebig oft differenzierbar sind [19] (s. auch [12]).

4. Die Darstellung der Lösung für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für die Lösung der Gleichung (4) ist die allgemeine Darstellung ermittelt worden. Sie ist eine weitgehende Verallgemeinerung der elementaren Darstellung der Lösungen einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die sich in Gestalt einer Summe von Produkten aus Polynomen und Exponentialfunktionen darstellen läßt. Wir erinnern daran, daß die Exponenten in dieser Darstellung die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Für eine partielle Differentialgleichung hat der entsprechende Ausdruck die Gestalt

$$u(x) = \int_{P(\xi)=0} e^{i(x,\xi)}\,\mu(d\xi)\,, \tag{6}$$

wobei μ eine beliebige verallgemeinerte Funktion aus einer gewissen Klasse ist (wenn die Nullstellen von $P(\xi)$ einfach sind, so ist μ ein Maß) [18], [8].

Die Darstellung (6) folgt daraus, daß die Gleichung (4) in E_m der Geichung $P(\xi)(F\,u)(\xi) = 0$ im Raum der verallgemeinerten Funktionen äquivalent ist. Diese Identität bedeutet, daß die verallgemeinerte Funktion $F\,u \equiv \mu$ nur auf der Menge $\{\xi: P(\xi) = 0\}$ verschieden von Null ist, woraus sich letztlich die Beziehung (6) ableiten läßt.

5. Die Existenz korrekter Aufgaben

Aus Gleichung (6) folgt die Existenz einer unendlichen Menge von Lösungen einer beliebigen homogenen Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Deshalb ist die Fragestellung nach zusätzlichen Bedingungen natürlich, wodurch aus der Gesamtheit der Lösungen eine eindeutige Lösung bestimmt wird. Wie wir wissen, werden zu diesem Zweck für die Gleichungen der mathematischen Physik verschiedene Randwertaufgaben formuliert, d. h., aus allen Lösungen wird diejenige ausgewählt, die auf dem Rand des Gebietes eine gegebene Bedingung erfüllt.

Wie in Kap. 25 ausgeführt wurde, wird eine solche Aufgabe in einem gewissen Raumpaar (A, B) korrekt genannt, wenn sie in A eindeutig für alle Vorgaben aus B lösbar ist und außerdem die Lösung stetig von diesen Vorgaben abhängt.

Es entsteht die Frage, ob für eine gegebene Gleichung in einem fixierten Gebiet wenigstens eine korrekte Randwertaufgabe existiert. Wie L. Hörmander zeigte [13], kann man diese Frage im Falle von Gleichungen mit konstanten Koeffizienten positiv beantworten, wenn $A = B = L_2(\Omega)$ ist und Ω ein beschränktes Gebiet darstellt. Um dieses Resultat zu verdeutlichen, führen wir einige Definitionen ein.

Neben dem Operator $P(D)$ betrachten wir den formal adjungierten Operator $\overline{P}(D)$, dessen Koeffizienten sich aus den Koeffizienten von $P(D)$ durch Übergang zu den konjugiert-komplexen Zahlen ergeben. Mit Hilfe von P konstruieren wir den sogenannten *minimalen Operator* P_0, der die Abschließung des auf $D(\Omega)$ gegebenen Operators P in $L_2(\Omega)$ darstellt. *Maximal* nennen wir den Operator, der in $L_2(\Omega)$ zu dem minimalen Operator $\overline{P}_0$ adjungiert ist. Somit enthält die Gesamtheit aller Funktionen, die beliebige homogene Randbedingungen erfüllen, das Definitionsgebiet des minimalen Operators und ist ihrerseits im Definitionsbereich des maximalen Operators enthalten. Exakt wird das Problem der Existenz korrekter Aufgaben für $P(D)$ wie folgt gestellt: Kann man eine Erweiterung des minimalen Operators finden, die gleichzeitig eine Einengung des maximalen Operators ist und die einen beschränkten inversen Operator besitzt, der auf dem gesamten Raum $L_2(\Omega)$ definiert ist? Aus den Resultaten von M. I. Wischik [1] folgt, daß eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen Erweiterung die Erfüllung

der Ungleichungen

$$\begin{aligned} ||u||_{L_2(\Omega)} &\leqq C\,||P(D)\,u||_{L_2(\Omega)}\,, \\ ||u||_{L_2(\Omega)} &\leqq C\,||\bar{P}(D)\,u||_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \tag{7}$$

für alle Funktionen $u \in D(\Omega)$ ist, wobei C eine Konstante ist, die nicht von u abhängt. (Für den Laplace-Operator sind diese Abschätzungen z. B. eine einfache Folge der Ungleichung von K. Friedrichs.) Das oben erwähnte Resultat von L. Hörmander bestand im Beweis der unerwarteten Tatsache, daß derartige Ungleichungen für jeden beliebigen Operator mit konstanten Koeffizienten Gültigkeit haben.

Dieser Fakt ist ein Spezialfall allgemeiner Sätze von L. Hörmander über den Vergleich von Differentialoperatoren. Laut Definition ist der Operator $P(D)$ stärker als der Operator $Q(D)$, wenn $D(P_0) \subset D(Q_0)$ gilt, wobei P_0 und Q_0 die entsprechenden minimalen Operatoren sind.

Allgemeine Überlegungen (von der Art des Satzes über den abgeschlossenen Graphen) zeigen, daß P dann und nur dann stärker als Q ist, wenn eine Konstante C existiert derart, daß für alle Funktionen $u \in D(\Omega)$ die Abschätzung

$$||Q\,u||_{L_2(\Omega)} \leqq C\,(||P\,u||_{L_2(\Omega)} + ||u||_{L_2(\Omega)}) \tag{8}$$

gilt, welche infolge von (7) der Abschätzung

$$||Q\,u||_{L_2(\Omega)} \leqq C'\,||P\,u||_{L_2(\Omega)} \tag{9}$$

äquivalent ist.

Indem L. Hörmander die Technik der Energieintegrale entwickelte, gab er in algebraischen Termini folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Abschätzung (9):

$$|Q(\xi)| \leqq C \sum |P^{(\alpha)}(\xi)|\,, \qquad \forall \xi \in E_m\,, \tag{10}$$

wobei $P^{(\alpha)}(\xi)$ die Ableitungen des Polynoms $P(\xi)$ sind und die Summierung sich über alle Multiindizes α erstreckt.

Daraus folgt unter anderem, daß der Operator $P(D)$ dann und nur dann elliptisch ist, wenn er stärker als jeder beliebige Operator ist, dessen Ordnung die von P nicht übersteigt.

In [13] wurde ferner gezeigt, daß für die Vollstetigkeit des Operators $Q_0\,P_0^{-1}$ die Bedingung

$$\frac{\Sigma\,|Q^{(\alpha)}\,(\xi)|}{\Sigma\,|P^{(\alpha)}\,(\xi)|} \to 0 \quad \text{für} \quad \xi \to \infty \tag{11}$$

notwendig und hinreichend ist.

L. Hörmander zeigte weiterhin: Wenn P und Q maximale Operatoren sind und $D(P) \subset D(Q)$ gilt, so ist entweder $Q = a\,P + b$, wobei a und b Konstanten sind, oder P und Q sind gewöhnliche Differentialoperatoren, wobei die Ordnung von Q die von P nicht übersteigt. Interessant ist, daß für Systeme die Frage nach der Existenz korrekter Randwertaufgaben weitaus schwieriger war, als für eine Gleichung.

Schon in dem einfachen Falle des Systems $u_x + v_y = f_1$, $v_x = f_2$ besitzt der minimale Operator keine lösbaren Erweiterungen [4]. Gegenwärtig ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer korrekten Aufgabe für Systeme mit konstanten Koeffizienten bekannt, die aus $L_2(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ wirken [9], [21].

Somit ist also das Problem der Existenz korrekter Aufgaben im Falle konstanter Koeffizienten völlig gelöst. Die Aufgabe der expliziten Beschreibung aller korrekten Randbedingungen für allgemeine Operatoren ist allerdings, wie es scheint, von ihrer Lösung noch weit entfernt, ungeachtet dessen, daß für einige Gleichungen und Systeme in dieser Richtung bereits umfangreiche Ergebnisse vorliegen.

Die Betrachtung korrekter Aufgaben für allgemeine Gleichungen und Systeme im Halbraum wurde in der Arbeit von I. M. Gelfand und G. E. Schilow [2] begonnen. In dieser Arbeit wurden Eindeutigkeitsklassen für Lösungen des Cauchyschen Problems für Systeme von Gleichungen der Art

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}(D)\, u_j(x, t) \qquad (1 \leqq i \leqq k) \tag{12}$$

gewonnen, die durch Ungleichungen der Form

$$|u| \leqq C\, e^{a|x|^p}$$

beschrieben werden. Der Exponent p in dieser Ungleichung wird durch die Matrix $||P_{ij}(\xi)||$ bestimmt. Die in [2] benutzte Methode gründet sich auf die Fourier-Transformation verallgemeinerter Funktionen bezüglich der Raumkoordinaten, die das System (12) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt. Im weiteren gab G. E. Schilow [16] eine Beschreibung der Lösbarkeitsklassen des Cauchyschen Problems für das System (12). Allgemeinere korrekte Aufgaben im Halbraum wurden in den Arbeiten [5], [6] (s. auch [16]) formuliert und untersucht.

6. Operatoren mit veränderlichen Koeffizienten

Das Studium derartiger Operatoren trifft im Vergleich zum Falle konstanter Koeffizienten auf wesentlich größere Schwierigkeiten. Das ist schon aus der Tatsache ersichtlich, daß man für Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten die Frage nach der Existenz wenigstens einer Lösung in einem gegebenen Gebiet nicht immer positiv beantworten kann. In der Tat, die Gleichung erster Ordnung

$$-\, i \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2\,(x_1 + i\, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_3} = f$$

besitzt für beliebig oft differenzierbare Funktionen f in keinem einzigen Teilgebiet von E_3 eine Lösung, die dem Raum D' der verallgemeinerten Funktionen angehört ([22], [14]). Einander ähnliche notwendige und hinreichende Be-

dingungen für die Existenz der Lösung in einem kleinen Gebiet wurden von L. Hörmander gegeben (s. [14]).

Dieses Resultat schöpft selbstredend die zum gegenwärtigen Zeitpunkt bekannte Information über allgemeine Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten nicht aus. So hat man zum Beispiel hinreichende Bedingungen für die Hypoelliptizität solcher Gleichungen erhalten, gleichfalls Bedingungen für die Existenz einer korrekten Randwertaufgabe „im Kleinen" [14]. Die Umrisse einer allgemeinen Theorie der Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten lassen sich allerdings noch nicht erkennen.

ANHANG 4

NICHTLINEARE ELLIPTISCHE GLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG (I. J. BAKELMAN)

Neben den linearen partiellen Differentialgleichungen spielen in der mathematischen Physik und in ihren Anwendungen nichtlineare Gleichungen eine große Rolle. Im folgenden werden nichtlineare Gleichungen zweiter Ordnung elliptischen Typs betrachtet. Vielfältige Aufgaben der Mechanik, der Variationsrechnung, der Geometrie und anderer Teilgebiete der Mathematik führen auf diese Gleichungen.

1. Grundlegende Begriffe

Es sei Ω ein Gebiet des m-dimensionalen euklidischen Raumes E_m. In E_m fixieren wir ein cartesisches Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m$. Einen Punkt des Raumes E_m werden wir wie üblich mit

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

bezeichnen. In Ω betrachten wir die Gesamtheit der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $C^{(2)}(\Omega)$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$z_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} (i = 1, 2, \ldots, m) ,$$

$$z_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_k} (i, k = 1, 2, \ldots, m) ,$$

$$Dz = (z_1, \ldots, z_m) ,$$

$$D^2 z = (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{mm}) .$$

Es sei

$$F(x_1, \ldots, x_m, z, p_1, \ldots, p_m, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{mm})$$

eine stetige Funktion der unabhängigen Veränderlichen x_i, z, p_i, r_{ik} für alle $x \in \Omega$ und für alle endlichen Werte der restlichen Argumente. Die Funktion F schreiben wir kurz als $F(x, z, p, r)$, wobei $p = (p_1, \ldots, p_m)$ und $r = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{mm})$ gilt.

Wir interpretieren die Größen p und r als Punkte der euklidischen Räume P und R, deren Dimensionen entsprechend m und $m\,(m + 1)/2$ sind und in denen

die cartesischen Koordinaten $p_1, \ldots, p_m$ und $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{mm}$ eingeführt sind.

Jede Funktion $F(x, z, p, r)$ erzeugt auf der Menge der Funktionen $C^{(2)}(\Omega)$ einen Operator

$$\Phi(z) = F(x, z, Dz, D^2z)\ ,$$

der entsteht, wenn wir in die Funktion F anstelle von z, p, r entsprechend die Funktion $z(x)$ und ihre ersten und zweiten Ableitungen einsetzen.

Wir setzen jetzt zusätzlich voraus, daß die Funktion F stetige erste Ableitungen nach den Veränderlichen r_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ für alle $x \in \Omega$ und für alle endlichen Werte der restlichen Veränderlichen aufweist. Man sagt, daß der Operator $\Phi(z)$ elliptisch in bezug auf die Funktion $z_0 \in C^{(2)}(\Omega)$ ist, wenn die quadratische Form

$$T(\Phi, z_0) = \sum_{i,k=1}^{m} F^0_{r_{ik}} \xi_i \xi_k$$

in allen Punkten des Gebietes Ω definit ist. Die Funktion $F^0_{r_{ik}}$ erhalten wir, wenn wir in $F_{r_{ik}}(x, z, p, r)$ die Funktion $z_0(x)$ sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen einsetzen. Da die Funktionen $F^0_{r_{ik}}$ in Ω stetig sind, so ändert die quadratische Form $T(\Phi, z_0)$ in Ω ihr Vorzeichen nicht. Wenn der Operator $\Phi(z)$ in bezug auf die Funktion $z_0 \in C^{(2)}(\Omega)$ elliptisch ist, so ist folglich die quadratische Form überall in Ω entweder positiv- oder negativ-definit. Wir weisen darauf hin, daß der Operator $\Phi(z)$ in bezug auf gewisse Funktionen aus $C^{(2)}(\Omega)$ elliptisch sein kann, in bezug auf andere jedoch nicht. Entsprechende Beispiele werden später angeführt.

Die Differentialgleichung

$$F(x, z, Dz, D^2z) = 0$$

wird *elliptisch* genannt, wenn in bezug auf alle Lösungen dieser Gleichung der Operator $\Phi(z)$ elliptisch ist.

Offensichtlich ist die im § 2 des Kap. 9 gegebene Definition der Elliptizität für eine lineare Gleichung ein Spezialfall des eben eingeführten Begriffes der Elliptizität für die allgemeine Gleichung

$$F(x, z, Dz, D^2z) = 0\ .$$

Die wichtigsten Klassen nicht linearer Gleichungen sind die quasilinearen Gleichungen und die MONGE-AMPÈREschen Gleichungen.

a) Quasilineare Gleichungen werden Gleichungen der Form

$$A_{ik}(x, z, Dz)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k} + B(x, z, Dz) = 0 \tag{1}$$

genannt. Diese Gleichungen sind bezüglich der zweiten Ableitungen der unbekannten Funktion $z(x)$ linear. Lineare Gleichungen sind offenbar ein Spezialfall quasilinearer Gleichungen.

Eine quasilineare Gleichung ist elliptisch, wenn für alle $x \in \Omega$, $z \in (-\infty, +\infty)$, $p \in P$ die quadratische Form $A_{ik}(x, z, p)\, \xi_i \xi_k$ in allen Punkten von Ω definit ist. Wie wir schon bemerkten, ändert die quadratische Form

$$A_{ik}(x, z, p)\, \xi_i \xi_k \tag{2}$$

für beliebige $x \in \Omega$, z, $p \in P$ ihr Vorzeichen nicht. Deshalb folgt die Elliptizität der Gleichung (1) aus der Bedingung, daß die quadratische Form (2) für beliebige x, z, p positiv-(negativ-)definit ist. Man kann zeigen, daß diese Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Elliptizität der Gleichung (1) ist.

b) MONGE-AMPÈRE*sche Gleichungen* werden Gleichungen der Form

$$z_{x_1x_1} z_{x_2x_2} - z_{x_1x_2}^2 + \sum_{i,k=1}^{2} A_{ik}(x, z, Dz)\, z_{x_ix_k} + B(x, z, Dz) = 0\,, \quad A_{ik} = A_{ki} \tag{3}$$

genannt. Das ist eine Gleichung bezüglich einer Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher. Ein für sie charakteristisches Merkmal ist das Auftreten des Ausdruckes

$$z_{x_1x_1} z_{x_2x_2} - z_{x_1x_2}^2$$

als Hauptteil.

Der Operator

$$H(z) = z_{x_1x_1} z_{x_2x_2} - z_{x_1x_2}^2$$

wird *einfachster* MONGE-AMPERE*scher Operator* genannt.

Die Funktion

$$F(x, z, p, r) = r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21} + \sum_{i,k=1}^{2} A_{ik}(x, z, p)\, r_{ik} + B(x, z, p)$$

ist dann und nur dann stetig, wenn die Funktionen $A_{ik}(x, z, p)$, $B(x, z, p)$ für alle $x \in \Omega$ (Ω stellt hierbei ein Gebiet in der Ebene der Veränderlichen x_1, x_2 dar) und für beliebige $z \in (-\infty, +\infty)$ und $p \in P$ stetig sind. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so besitzt die Funktion $F(x, z, p, r)$ außerdem stetige Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial r_{11}} = r_{22} + A_{11}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial r_{12}} = -r_{21} + A_{12}\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_{21}} = -r_{12} + A_{21}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial r_{22}} = r_{11} + A_{22}\,.$$

Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen die Gleichung (3) elliptisch ist. Es sei $z(x_1, x_2)$ eine beliebige Funktion aus $C^{(2)}(\Omega)$. Dann gilt

$$T(\Phi, z) = (z_{x_2x_2} + A_{11})\, \xi_1^2 - 2\,(z_{x_1x_2} - A_{12})\, \xi_1 \xi_2 + (z_{x_1x_1} + A_{22})\, \xi_2^2\,.$$

Die quadratische Form $T(\Phi, z)$ ist genau dann definit, wenn in Ω die Ungleichung

$$(z_{x_2x_2} + A_{11})\,(z_{x_1x_1} + A_{22}) - (z_{x_1x_2} - A_{12})^2 > 0$$

erfüllt ist.

Es sei $z(x_1, x_2)$ eine Lösung der Gleichung (3). Dann gilt

$$z_{x_1x_1} z_{x_2x_2} - z^2_{x_1x_2} + \sum_{i,k=1}^{2} A_{ik} z_{x_i x_k} + B = 0 .$$

Folglich genügt für die Elliptizität der Gleichung (3), daß die Ungleichung

$$A_{11} A_{22} - A^2_{12} - B > 0$$

für alle $(x_1, x_2) \in \Omega$ und für alle endlichen Werte von z, p_1, p_2 erfüllt ist. Man kann beweisen, daß diese Bedingung für die Elliptizität der Gleichung (3) auch notwendig ist.

Man sieht leicht ein, daß die quadratische Form

$$T(\Phi, z_0) = \sum_{i,k=1}^{2} F^0_{r_{ik}} \xi_i \xi_k \tag{4}$$

überall das gleiche Vorzeichen beibehält, wenn der Operator $\Phi(z)$ in bezug auf die Funktion z_0 elliptisch ist. Daraus leiten wir ab, daß es Funktionen gibt, für die die quadratische Form (4) in Ω positiv-definit ist, daß es Funktionen gibt, für die diese Form negativ-definit ist, und daß schließlich Funktionen existieren, für die sie ihr Vorzeichen ändert.

Wir klären dies am Beispiel der einfachsten Monge-Ampèreschen Gleichung

$$z_{x_1x_1} z_{x_2x_2} - z^2_{x_1x_2} = \varphi(x_1, x_2) , \tag{5}$$

wobei $\varphi(x_1, x_2)$ eine im Gebiet Ω stetige Funktion ist. Für den Operator

$$\Phi(z) = z_{x_1x_1} z_{x_2x_2} - z^2_{x_1x_2} - \varphi(x_1, x_2)$$

hat die Form $T(\Phi, z)$ die Gestalt

$$T(\Phi, z) = z_{x_2x_2} \xi_1^2 - 2 z_{x_1x_2} \xi_1 \xi_2 + z_{x_1x_1} \xi_2^2 .$$

Offensichtlich ist für die Funktionen $z = \frac{k^2}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ die Form $T(\Phi, z)$ positiv-definit, für die Funktionen $z = -\frac{k^2}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ ist sie negativ-definit, und für die Funktionen $z = \frac{k^2}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ schließlich ändert sie ihr Vorzeichen.

Die Ungleichung

$$\varphi(x_1, x_2) > 0$$

ist die Bedingung für die Elliptizität der Gleichung (5). Somit sind die Lösungen der elliptischen Gleichung (5) notwendigerweise konvexe Funktionen. In der Tat, wenn $u(x_1, x_2)$ eine Lösung der Gleichung (5) ist, so gilt überall im Gebiet Ω die Beziehung $u_{x_1x_1} u_{x_2x_2} - u^2_{x_1x_2} = \varphi(x_1, x_2) > 0$, folglich ist $T(\Phi, u)$ überall in Ω eine definite Form, die ihr Vorzeichen nicht ändert.

Neben der Lösung $u(x_1, x_2)$ besitzt die Gleichung (5) noch die Funktion $v(x_1, x_2) = -u$ als Lösung. Deshalb treten bei der Gleichung (5) zwei Klassen von Lösungen auf: Für die eine Klasse ist die Form $T(\Phi, u)$ für jede Lösung positiv-definit, für die andere ist diese Form für jede Lösung negativ-definit.

Diese Tatsache läßt sich einfach geometrisch interpretieren: Die Lösungen aus der ersten Klasse sind nach unten konvexe Funktionen, die Lösungen aus der zweiten Klasse nach oben konvexe Funktionen.

Ebenso weist jede elliptische Gleichung vom MONGE-AMPÈREschen Typ (3) zwei Klassen von Lösungen auf. Für die Lösungen der ersten Klasse ist die Form $T(\Phi, z)$ positiv-definit, für die Lösungen der anderen Klasse negativ-definit.

c) Ein Analogon zur einfachsten MONGE-AMPÈREschen Gleichung für Funktionen von m Veränderlichen ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} z_{x_1 x_1} & z_{x_1 x_2} & \cdots & z_{x_1 x_m} \\ z_{x_2 x_1} & z_{x_2 x_2} & \cdots & z_{x_2 x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{x_m x_1} & z_{x_m x_2} & \cdots & z_{x_m x_m} \end{vmatrix} = \varphi(x, z, Dz). \tag{6}$$

Als Analogon zur allgemeinen MONGE-AMPÈREschen Gleichung im m-dimensionalen Fall sieht man natürlicherweise eine Gleichung der Form

$$\begin{vmatrix} z_{x_1 x_1} + A_{11} & z_{x_1 x_2} + A_{12} & \cdots & z_{x_1 x_m} + A_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{x_m x_1} + A_{m1} & z_{x_m x_2} + A_{m2} & \cdots & z_{x_m x_m} + A_{mm} \end{vmatrix} + B(x, z, Dz) = 0$$

an; hierbei sind $A_{ik} = A_{ki}$ und B stetige Funktionen in x, z, p. Diese Gleichungen weisen ebenfalls zwei Klassen von Lösungen auf, wobei alle geometrischen Eigenschaften der Lösungen der Gleichung (6) zu denen der Lösungen der einfachsten zweidimensionalen MONGE-AMPÈREschen Gleichung analog sind.

Für nicht lineare elliptische Gleichungen wurde das DIRICHLETsche Problem am ausführlichsten untersucht. Ebenso wie im Fall linearer elliptischer Gleichungen besteht es darin, eine Funktion zu ermitteln, die im Inneren des Gebietes der gegebenen nichtlinearen elliptischen Gleichung genügt und auf dem Rand des Gebietes in eine vorgegebene Funktion übergeht.

2. Das Maximumprinzip. Der Eindeutigkeitssatz für das DIRICHLETsche Problem

In der Theorie der elliptischen Gleichungen spielt das sogenannte *Maximumprinzip* eine wichtige Rolle. Es besteht darin, daß unter bestimmten Bedingungen die Lösungen elliptischer Gleichungen im Inneren des Gebietes weder positive Maxima noch negative Minima aufweisen können.

Wir verweilen vorerst beim Fall linearer Gleichungen.

Das Maximumprinzip. *Es sei im Gebiet Ω die Gleichung*

$$L(z) \equiv a_{ik}(x)\, z_{ik} + b_i(x)\, z_i + c(x)\, z = 0 \tag{7}$$

gegeben. Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten dieser Gleichung in Ω stetig sind und daß für alle $x \in \Omega$ die quadratische Form

$$a_{ik}(x)\, \xi_i\, \xi_k$$

positiv-definit und die Funktion $c(x)$ nicht positiv ist. Es sei ferner $z(x) \in C^{(2)}(\Omega)$ eine Lösung der Gleichung (7).

Dann kann $z(x)$ innerhalb von Ω weder negative Minima noch positive Maxima haben.

Im § 10 des Kap. 11 wurde das Maximumprinzip für lineare Gleichungen unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß für den Koeffizient $c(x) < 0$ gilt.[1])

Aus dem Maximumprinzip folgt unmittelbar der Eindeutigkeitssatz für die Lösung des DIRICHLETschen Problems einer linearen elliptischen Gleichung zweiter Ordnung. Das Maximumprinzip und der Eindeutigkeitssatz waren für elliptische Gleichungen Gegenstand vielfältiger Untersuchungen. Es wurde festgestellt, daß die Forderung nach der Stetigkeit für die Koeffizienten der Gleichung (7) sowie die Bedingung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit der Lösung wesentlich abgeschwächt werden können. Es genügt nämlich, die Koeffizienten der Gleichung als Elemente des Raumes L_p und die Lösung in Klassen von Funktionen mit verallgemeinerten Ableitungen zu betrachten. Der Leser kann entsprechende Resultate in [10], [12] finden. In [1], [2] wurden zur Untersuchung des Maximumprinzips und des Eindeutigkeitssatzes für elliptische Gleichungen geometrische Methoden verwendet.

Wir wenden uns jetzt dem Eindeutigkeitssatz für das DIRICHLETsche Problem nicht linearer elliptischer Gleichungen zu.

Es sei $F(x, z, p, r)$ eine Funktion, die für alle $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$, $r \in R$ definiert und für alle zulässigen Werte der Argumente stetig differenzierbar ist. Wie wir im Punkt 1 feststellten, erzeugt die Funktion F auf der Funktionenklasse $C^{(2)}(\Omega)$ den Operator

$$\Phi(z) = F(x, z, Dz, D^2 z) .$$

Wir werden sagen, daß der Operator $\Phi(z)$ *elliptisch konvex* ist, wenn aus der positiven (negativen) Definitheit der quadratischen Form

$$T(\Phi, z) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial F(x, z, Dz, D^2 z)}{\partial r_{ik}} \xi_i \xi_k$$

in bezug auf die Funktionen $z^0(x)$, $z^1(x) \in C^{(2)}(\Omega)$ folgt, daß diese Form ebenfalls in bezug auf die Funktionen $z^\tau(x) = (1 - \tau) z^0 + \tau z^1$ positiv-(negativ-) definit ist, wobei τ sich in den Grenzen von 0 und 1 ändert.

Der Eindeutigkeitssatz für das DIRICHLETsche Problem. *Die Funktion $F(x, z, p, r)$, die für alle $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$, $r \in R$ definiert und stetig differenzierbar ist, erzeuge den elliptischen konvexen Operator $\Phi(z)$. Auf den Lösungen $z^1(x)$, $z^2(x) \in C^{(2)}(\Omega)$ der Gleichung*

$$F(x, z, Dz, D^2 z) = 0$$

---

[1]) Die im § 10, Kap. 11 betrachtete Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (7) durch das Vorzeichen der linken Seite, deshalb hat dort die Bedingung für den Koeffizient $C(x)$ die Gestalt $C(x) > 0$.

sei der Operator $\Phi(z)$ positiv-(negativ-)elliptisch. Wenn auf dem Rand von Ω die Funktionen $z^1(x)$ und $z^2(x)$ zusammenfallen und

$$F_z(x, z, p, r) \leqq 0\,, \qquad (F_z(x, z, p, r) \geqq 0)$$

für alle $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$, $r \in R$ gilt, so stimmen die Funktionen $z^1(x)$ und $z^2(x)$ in Ω überein.

Dieser Satz gestattet verschiedene Verallgemeinerungen in der oben angedeuteten Richtung.

Aus dem Eindeutigkeitssatz für die allgemeine nicht lineare Gleichung vom elliptischen Typ können als einfache Folgerungen folgende Eindeutigkeitssätze erhalten werden.

1. *Das* DIRICHLET*sche Problem für die quasilineare Gleichung*

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x, Dz)\, z_{ik} + b(x, z, Dz) = 0\,,$$

wobei $a_{ik}(x, p)$ und $b(x, z, p)$ stetig differenzierbare Funktionen für alle $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$ sind, besitzt nicht mehr als eine Lösung, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Für beliebige $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$ gilt

a) $$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x, p)\, \xi_i\, \xi_k > 0\,,$$

b) $$b_z(x, z, p) \leqq 0\,.$$

2. *Das* DIRICHLET*sche Problem für die* MONGE-AMPÈRE*sche Gleichung*

$$\Phi(z) = z_{11}\, z_{22} - z_{12}^2 + \sum_{i,k=1}^{2} A_{ik}(x, Dz)\, z_{ik} + B(x, z, Dz) = 0\,,$$

$$A_{ik} \equiv A_{ki}\,,$$

wobei $A_{ik}(x, p)$ und $B(x, z, p)$ stetig differenzierbare Funktionen für alle $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$ sind, besitzt höchstens eine Lösung, in bezug auf die die quadratische Form $T(\Phi, z)$ positiv (negativ) ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Für beliebige $x \in \Omega$, $z \in (-\infty, +\infty)$, $p \in P$ gilt

$$\text{a)} \quad -B + A_{11}\, A_{22} - A_{12}^2 > 0\,, \qquad \text{b)} \ B_z \leqq 0\,.$$

(Es wird die Eindeutigkeit in der Klasse von Lösungen der Gleichung (7) untersucht, bezüglich der die Form $T(\Phi, z)$ positiv-definit ist. Die Bedingung b) wird durch die Bedingung $B_z \geqq 0$ ersetzt, wenn die Eindeutigkeit der Lösung des DIRICHLETschen Problems in der Klasse von Lösungen der Gleichung (7) betrachtet wird, bezüglich der die Form $T(\Phi, z)$ negativ-definit ist.)

Für die m-dimensionalen Analoga der MONGE-AMPÈREschen Gleichung gelten für die Lösung des DIRICHLETschen Problems ähnliche Eindeutigkeitssätze.

In den oben formulierten Eindeutigkeitssätzen für quasilineare und MONGE-AMPÈREsche Gleichungen wurde von solchen Lösungen gesprochen, die zweite stetige Ableitungen besitzen. Diese Sätze behalten jedoch ihre Gültigkeit auch

bei schwächeren Voraussetzungen bezüglich der Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung. So genügt es zum Beispiel, daß man die Zugehörigkeit der Lösung zur Klasse $W_p^{(2)}$ für ein gewisses $p > m$ fordert (m ist die Dimension des Raumes). Vom geometrischen Standpunkt aus gesehen ist der Eindeutigkeitssatz für die MONGE-AMPÈREsche Gleichung von besonderem Interesse: Zu Spezialfällen der MONGE-AMPÈREschen Gleichung führen die grundlegenden Probleme der „Geometrie im Großen", die mit Fragen der Existenz und Eindeutigkeit einer Fläche mit gegebener innerer Metrik, mit gegebener Funktion der Hauptnormalkrümmungen u. a. in Zusammenhang stehen. Es sind Methoden erarbeitet worden [13], [14], die es unter recht schwierigen Bedingungen gestatten, ein Analogon zum Maximumprinzip auf die erwähnten Spezialfälle der MONGE-AMPÈREschen Gleichungen anzuwenden und somit Eindeutigkeitssätze für die Lösung des DIRICHLETschen Problems für diese Gleichungen zu erhalten.

3. Existenzsätze

Einen zentralen Platz in der Untersuchung der Lösbarkeit nichtlinearer elliptischer Gleichungen nimmt das DIRICHLETsche Problem ein. Die Beweise der Existenzsätze für die Lösung dieser Aufgabe sind überaus schwierig, und im Rahmen dieses Anhanges können wir nur einen sehr kurzen Abriß der grundlegenden Methoden und Resultate geben.

Die Hauptrichtung der Untersuchungen im erwähnten Gebiet wurden durch zwei Probleme von D. HILBERT (dem 19. und 20.) bestimmt, die von ihm im Jahre 1900 formuliert wurden. Das erste hatte die Hypothese zum Inhalt, daß alle hinreichend glatten Lösungen elliptischer Gleichungen mit analytischen Koeffizienten ebenfalls analytische Funktionen sind; das zweite bestand im folgenden: Es war zu beweisen, daß das Variationsproblem der Bestimmung einer Funktion, die auf dem Rand einen gegebenen Wert annimmt und die dem Funktional

$$J(z) = \int_{\Omega} \varphi(x, z, Dz)\, dx$$

seinen kleinsten Wert erteilt (wobei $\varphi(x, z, p)$ eine beschränkte und nach unten konvexe Funktion der Veränderlichen $p_1, \ldots, p_m$ ist), stets eine Lösung besitzt, wenn man diese in einer hinreichend großen Klasse von Funktionen sucht. Da die EULERsche Gleichung für die Funktion, auf der das Funktional sein Extremum annimmt, eine quasilineare elliptische Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

ist, so verflocht sich in den nachfolgenden Untersuchungen dieses Problem eng mit der Untersuchung des DIRICHLETschen Problems für quasilineare elliptische Gleichungen.

Die ersten fundamentalen Resultate für nicht lineare elliptische Gleichungen allgemeinen Typs mit zwei Veränderlichen, in denen die Lösung der HILBERTschen Probleme enthalten war, wurden in den klassischen Arbeiten von S. N. BERNSTEIN in den Jahren 1908–1912 erhalten. S. N. BERNSTEIN zeigte, daß dreimal stetig differenzierbare Lösungen nicht linearer analytischer Gleichungen elliptischen Typs analytische Funktionen ihrer Argumente sind. Weiterhin wurden von ihm bezüglich der Lösbarkeit des DIRICHLETschen Problems für die Gleichung

$$F(x_1, x_2, z, z_1, z_2, z_{11}, z_{12}, z_{22}) = 0 \tag{8}$$

folgende Resultate erhalten. Unter der Voraussetzung, daß die Funktion F in allen Argumenten analytisch ist und daß die Randbedingungen ebenfalls analytisch sind, beweist S. N. BERNSTEIN, daß die ursprüngliche Aufgabe eine Lösung in der Klasse der analytischen Funktionen besitzt, wenn in das DIRICHLETsche Problem für die Gleichung (8) auf analytische Weise ein Parameter $t \in [0, 1]$ so eingeführt werden kann, daß das DIRICHLETsche Problem für $t = 0$ eine analytische Lösung besitzt, für $t = 1$ in die ursprüngliche Aufgabe übergeht und daß man schließlich für alle $t \in [0, 1]$ gleichmäßige Abschätzungen für die Lösungen aller DIRICHLETschen Hilfsprobleme in der Metrik des Raumes $C^{(2)}$ erhalten kann (dabei wird nur die Existenz der Lösung vorausgesetzt). Für quasilineare Gleichungen genügen schon Abschätzungen der Lösungen der Hilfsaufgaben in der Metrik von $C^{(1)}$.

Abschätzungen für Lösungen von Differentialgleichungen, die nur unter der Voraussetzung der Existenz der Lösung erhalten werden und bei deren Ermittlung nur die Eigenschaften der Koeffizienten der Gleichung und die Eigenschaften der Randbedingungen der Aufgabe benutzt werden, nennt man gewöhnlich *apriori-Abschätzungen*. Für analytische DIRICHLETsche Probleme im Falle zweier Veränderlicher zeigte es sich, daß die Frage nach der Lösbarkeit des DIRICHLETschen Problems auf die Frage des Nachweises von apriori-Abschätzungen in der Metrik von $C^{(2)}$ für allgemeine Gleichungen und in der Metrik von $C^{(1)}$ für quasilineare Gleichungen zurückgeführt werden kann.

Für quasilineare elliptische Gleichungen

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x, Dz)\, z_{ik} + b(x, z, Dz) = 0$$

mit analytischen Koeffizienten, die für alle $x \in \Omega$, $|z| \leqq M$, $p_1^2 + p_2^2 \geqq 1$ die Bedingung

$$|b| \leqq R_M \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}(x, p)\, p_j\, p_k$$

erfüllen, wobei R_M eine nur von M abhängige Konstante ist, sind apriori-Abschätzungen der Absolutbeträge der ersten Ableitungen für das DIRICHLETsche Problem nachgewiesen worden. Dabei wird vorausgesetzt, daß das Gebiet Ω durch eine analytische Kurve mit streng positiver Krümmung begrenzt wird,

die Relation $\frac{\partial b}{\partial z} \leqq 0$ gilt und eine apriori-Abschätzung des Betrages der Lösung zur Verfügung steht. Die Existenz einer apriori-Abschätzung des Betrages der Lösung ist garantiert, wenn $\frac{\partial b}{\partial z} \leqq \text{const} < 0$ gilt.

Für die erwähnte Klasse von Gleichungen wurde die Lösbarkeit des DIRICHLETschen Problems bewiesen. Das Variationsproblem für das Minimum des Funktionals

$$\int_\Omega \varphi(x, z, Dz)\, dx\,, \tag{9}$$

wobei φ die Ungleichung

$$\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_j\, \partial p_k} \xi_j \xi_k \geqq \alpha_0 \sum_{k=0}^{2} \xi_k^2\,, \qquad \alpha_0 = \text{const} > 0$$

erfüllt, führt auf die Lösung des DIRICHLETschen Problems für eine quasilineare Gleichung der oben erwähnten Klasse; somit erweist sich diese Variationsaufgabe ebenfalls als lösbar. Die Resultate von S. N. BERNSTEIN konnten auf die Räume $C^{k,\alpha}$ der HÖLDER-stetigen Funktionen übertragen werden. In diesen Räumen werden die aufgezählten Resultate einfacher und natürlicher formuliert. Die grundlegenden Sätze von S. N. BERNSTEIN über allgemeine elliptische Gleichungen und Variationsprobleme wurden bei verhältnismäßig schwachen Forderungen an die Glattheit bewiesen. (Es genügt die Zugehörigkeit der Lösung zum Raum $C^{2,\alpha}$ im Falle allgemeiner Gleichungen und zum Raum $C^{1,\alpha}$ im Falle von Variationsproblemen zu fordern.) Die erwähnten Beweise basieren auf den Arbeiten von J. S. SCHAUDER über apriori-Abschätzungen und über die Lösbarkeit von Randwertaufgaben für lineare elliptische Gleichungen in Räumen HÖLDER-stetiger Funktionen. J. LERAY und J. SCHAUDER arbeiteten topologische Methoden zur Lösung elliptischer und einiger anderer Funktionalgleichungen aus. Diese Methoden stellen eine weitgehende Verallgemeinerung der Methode von S. N. BERNSTEIN der Fortsetzung bezüglich eines Parameters dar.

Parallel dazu wurde in einer Reihe von Arbeiten, deren Anfänge bei D. HILBERT liegen, die Lösung von Variationsproblemen auf anderem Wege in Angriff genommen. Es wurden sogenannte direkte Methoden geschaffen, die eine Minimalfolge liefern, die zu der Funktion konvergiert, welche das Extremum des gegebenen Funktionals realisiert. Dabei gelingt es ohne zusätzliche Untersuchung, lediglich die Zugehörigkeit dieser Funktion zu einem Raum der Gestalt $W_p^{(1)}$, $p > 1$, nachzuweisen. Es ist natürlich, diese Funktion als verallgemeinerte Lösung des Variationsproblems anzusehen. In derartigen Konstruktionen spielt die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen in der Regel keine Rolle.

Im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher kann man eine hinreichende Glattheit der Lösung sichern, wenn man dem Integranden im Funktional (9) verschiedene Glattheitsforderungen auferlegt.

Der Beweis der Glattheit der verallgemeinerten Lösungen im Falle $m > 2$ erforderte die Ausarbeitung einer neuen Methodik der apriori-Abschätzungen in $C^{1,\alpha}$, die die Spezifik einer großen Anzahl von Veränderlichen berücksichtigt. Eine derartige Methodik ist für Funktionale der Gestalt (9) ausgearbeitet worden, in denen der Integrand $\varphi(x, z, p)$ für $|p| \to \infty$ die Wachstumsordnung $|p|^\alpha$, $\alpha > 1$, hat. Es wurden eine Reihe von Sätzen über die Lösbarkeit und die Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung für das Variationsproblem (9) formuliert; in vielen Fällen zeigte es sich, daß die der Funktion φ auferlegten Forderungen nicht weiter abgeschwächt werden können. Es wurden Sätze über die klassische Lösbarkeit quasilinearer elliptischer Gleichungen der Gestalt

$$a_{jk}(x, z, Dz) \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \, \partial x_k} + a(x, z, Dz) = 0$$

(indivergente Gestalt) und

$$\frac{\partial}{\partial x_k} a_k(x, z, Dz) + a(x, z, Dz) = 0$$

(divergente Gestalt) formuliert und bewiesen. In den Bedingungen dieser Sätze tritt eine gewisse Abstimmung der Wachstumsordnung für die in die Gleichung eingehenden Funktionen auf, bei der diese oder jene Regularität der Lösung gesichert ist. Eine ausführliche Darlegung aller diesbezüglichen Fragen kann man in [10] und in [8] finden. In letzter Zeit erschien eine Reihe von Arbeiten, in denen entartete Variationsprobleme untersucht werden (der Fall $\alpha = 1$). Diese Aufgaben stehen mit dem klassischen Problem über die minimale Fläche in engem Zusammenhang.

Eine Reihe von Arbeiten ist Existenzsätzen für die Monge-Ampèresche Gleichung gewidmet. In den Arbeiten von A. D. Alexandrow wurden in geometrischen Termini einige Probleme formuliert, die mit dem Aufbau konvexer Flächen mit Hilfe ihrer inneren Metrik, mit Hilfe der Gaussschen Gesamtkrümmung sowie anderer Charakteristiken zusammenhängen. Außerdem wurden geometrische Methoden zur Lösung dieser Aufgaben ausgearbeitet. Vom analytischen Standpunkt aus betrachtet geht es hier um die Konstruktion der verallgemeinerten Lösungen für einige Spezialfälle von Monge-Ampèreschen Gleichungen. Im Falle, daß die geometrischen Charakteristiken der Aufgabe hinreichend glatte Funktionen sind, erweisen sich die verallgemeinerten Lösungen ebenfalls als glatt [14].

In letzter Zeit wurden verallgemeinerte Lösungen für große Klassen von Monge-Ampèreschen Gleichungen und ihrer mehrdimensionalen Analoga untersucht (s. [3], [14]). Für die Monge-Ampèresche Gleichung wurde im Falle hinreichend glatter in die Gleichung eingehender Koeffizienten und hinreichend glatter Randbedingungen die Glattheit der verallgemeinerten Lösung nachgewiesen.

Die verallgemeinerten Lösungen des Dirichletschen Problems (siehe z. B. [5]—[7]) wurden für eine große Klasse quasilinearer stark elliptischer Systeme beliebiger Ordnung untersucht.

LITERATURHINWEISE

Literatur zu Teil I

[1] MICHLIN, S. G., Проблема минимума квадратичного функционала, Moskau 1952.
[2] SMIRNOW, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, T. V, 2. Auflage, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1967 (Übers. a. d. Russ.).
[3] SOBOLEW, S. L., Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1964 (Übers. a. d. Russ.).

Literatur zu Teil II

[1] ACHIESER, N. I., Лекции по вариационному исчислению, Moskau 1955.
[2] BLISS, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago, The univ. of Chicago Pr. (1947).
[3] COURANT, R., und HILBERT, D., Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1, 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1931, Bd. 2, 1. Aufl., Springer Verlag, Berlin 1937.
[4] LAWRENTJEW, M. A. und LJUSTERNIK, L. A., Основы вариационного исчисления, т. 1, часть 1, ОНТИ, 1935.
[5] MICHLIN, S. G., Проблема минимума квадратичного функционала, Moskau 1952.
[6] SMIRNOW, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, T. IV, 4. Auflage, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1967 (Übers. a. d. Russ.).
[7] FRIEDRICHS, K., Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung der Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Mathematische Annalen, Bd. 109, H. 4–5 (1934), 465–487.

Literatur zu Teil III

[1] KANTOROWITSCH, L. W., und AKILOW, G. P., Funktionalanalysis in normierten Räumen, Akademie-Verlag, Berlin 1964 (Übers. a. d. Russ.).
[2] MICHLIN, S. G., О разрешимости линейных уравнений в гильбертовых пространствах, Moskau 1959.
[3] MICHLIN, S. G., Vorlesungen über lineare Integralgleichungen, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1962 (Übers. a. d. Russ.).
[4] PETROWSKI, I. G., Лекции по теории интегральных уравнений, Moskau 1951.
[5] RIESZ, F., und SZ.-NAGY, B., Vorlesungen über Funktionalanalysis, 2. Aufl., VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1968.
[6] SMIRNOW, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, T. IV, 4. Aufl., VEB Dtsch. Verl d. Wiss., Berlin 1967 (Übers. a. d. Russ.).
[7] SOBOLEW, S. L., Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1964 (Übers. a. d. Russ.).
[8] TRICOMI, F. G., Integral equations, New York, London 1957.

Literatur zu Teil IV

[1] Oleinik, O. A., A boundary value problem for linear elliptic-parabolic equations, University of Maryland, January, 1965.

[2] Smirnow, M. M., Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, Moskau 1966.

[3] Tricomi, F. G., Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, Mem. Lincei, 1923, Ser. V, XIV, fasc. VII (Russ. Übers.: Moskau, Leningrad 1947).

Literatur zu Teil V

[1] Wilenkin, N. J., Специальные функции и теория представлений групп, Moskau 1965.

[2] Wischik, M. I., О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сб. **29 (71)** (1951), 615—676.

[3] Hobson, E. W., The theory of spherical and ellipsoidal harmonies, Cambridge 1931.

[4] Günter, N. M., Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik, B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957.

[5] Carleman, T., Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, Bd. LXXXVIII, 1936.

[6] Courant, R., and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, volume II. Partial differential equations, New York, London 1962.

[7] Courant, R., and D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1, 2. Auflage; Bd. 2, 1. Auflage, Springer, Berlin 1931 bzw. 1937.

[8] Ladyshenskaja, O. A., Смешанная задача для гиперболического уравиения, Moskau 1953.

[9] Landkof, N. S., Основы современной теории потенциала, Moskau 1966.

[10] Miranda, C., Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955.

[11] Michlin, S. G., Проблема минимума квадратичного функционала, Moskau 1952.

[12] Michlin, S. G., Многомерные сингулярные интегралы и интергальные уравния, Moskau 1962.
(Engl. Übers. bei Pergamon Press, Oxford 1965).

[13] Michlin, S. G., Numerische Realisierung von Variationsmethoden, Akademie-Verlag, Berlin 1969 (Übers. a. d. Russ.).

[14] Muschelischwili, N. I., Singuläre Integralgleichungen, Akademie-Verlag, Berlin 1965 (Übers. a. d. Russ.).

[15] Petrowski, I. G., Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955 (Übers. a. d. Russ.).

[16] Slobodezki, L. N., Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч-зап. Ленингр. пед. ин-та им Герцена **197** (1958) 54—112.

[17] Smirnow, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, T. III, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1954 (Übers. a. d. Russ.).

[18] Sobolew, S. L., Об одной теореме функционального анализа, Матем. сб. **4 (46)**, 3 (1938).

[19] Sobolew, S. L., Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1964 (Übers. a. d. Russ.).

Literatur zu Teil VI

[1] Courant, R., and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, volume II. Partial differential equations, New York, London 1962.
[2] Courant, R., und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2, 1. Auflage, Springer, Berlin 1937.
[3] Ladyshenskaja, O. A., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Moskau 1953.
[4] Petrowski, I. G., Lektionen über partielle Differentialgleichungen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955 (Übers. a. d. Russ.).
[5] Smirnow, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, T. II, 8. Auflage, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1967 (Übers. a. d. Russ.).
[6] Sobolew, S. L., Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1964.
[7] Sobolew, S. L., Уравнения математической физики, Moskau 1954.
[8] Tychonow, A. N., und Samarski, A. A., Differentialgleichungen der mathematischen Physik, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1959 (Übers. a. d. Russ.).
[9] Schilow, G. E., Математический анализ. Специальный курс, Moskau 1960.

Literatur zu Teil VII

[1] Slobodezki, L. N., Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для диффереациальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Герцена **197** (1958), 54—112.
[2] Sobolew, S. L., Уравнения математической физики, Moskau 1954.
[3] Tychonow, A. N., О решении некорректно поставленных задач и метода регуляризации, ДАН СССР **151**, 3 (1963), 501—504.
[4] Hörmander, L. K., Zur Theorie der allgemeinen Differentialoperatoren mit partiellen Ableitungen.

Literatur zu Anhang 1

[1] Agranowitsch, M. S., Dynin, A. S., Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области, ДАН СССР **146**, 2 (1962), 511—514.
[2] Bizadse, A. W., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Moskau 1966.
[3] Jegorow, J. W., Kontratjew, W. A., О задаче с косой производной, ДАН СССР **170**, 4 (1966), 770—773.
[4] Lopatinski, I. W., Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулянным интегральным уравнениям, Укр. матем. журн. **5**, 2 (1953), 123—151.
[5] Petrowski, I. G., О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, УМН **1**, 3—4 (1946), 44—70.
[6] Slobodezki, L. N., Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Герцена **197** (1958), 54—112
[7] Smirnow, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, T. V, 2. Auflage, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1967 (Übers. a. d. Russ.).
[8] Sobolew, S. L., Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1964 (Übers. a. d. Russ.).
[9] Schapiro, S. J., Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа, Изв. АН СССР, сер. матем. **17**, 6 (1953).
[10]—[11] Agmon, S., Douglis, A., and Nierenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions.

I—II. Communications on pure and applied Math.; XII (1959), 623—727; XVII (1964), 35—92.
[12] ATIYAH, M. F., and SINGER, I. M., The Index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Society **69**, 3 (1963), 422—433.
[13] BORELLI, R. L., The singular second order oblique derivative problem, J. of Math. and Mech. **16**, 1 (1966), 51—82.

Literatur zu Anhang 2

[1] BABITSCH, W. M., Фундаментальные решения гиперболических уравнениях с переменными коеффициентами, Мат. сб. **52 (94)** (1960).
[2] BOROWIKOW, W. A., Фундаменталные решении уравнении с постоянными коеффицентами, Труды Моск. матем. о-ва **8** (1949), 199—257.
[3] Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, V, ЛГУ, 1961.
[4] GELFAND, L. M., und SCHILOW, G. E., Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Bd. III, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1964 (Übers. a. d. Russ.).
[5] GELFAND, I. M., und SCHILOW, G. E., Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Bd. I, 2. Auflage, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1967 (Übers. a. d. Russ.).
[6] GARDING, L., Cauchy's problem for hyperbolic equations, University of Chicago, 1957 (Russ. Übersetzung IL, 1961).
[7] COURANT, R., and HILBERT, D., Methods of mathematical physics, volume II. Partial differential equations, New York, London, 1962.
[8] PETROWSKI, I. G., О задаче Коши для системы уравнений с частными производными, Матем. сб. **2 (44)** (1937).
[9] SMIRNOW, W. I., Lehrgang der höheren Mathematik, T. II, 8. Auflage, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1968 (Übers. a. d. Russ.).
[10] HADAMARD, J., Le probléme de Cauchy . . . , Paris 1932.
[11] MATHISSON, M., Le probléme de M. Hadamard, Acta Math. **71** (1939).
[12] RIESZ, M., L'integral de Riemann-Liouville et le probléme de Cauchy . . . , Acta Math. **81** (1949).
[13] STELLMACHER, K., Eine Klasse huyghenscher Differentialgleichungen und ihre Integration, Math. Ann. **130**, 3 (1955), 219—233.

Literatur zu Anhang 3

[1] WISCHIK, M. I. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференци альных уравнений, Труды ММО **1** (1952), 183—246.
[2] GELFAND, I. M., und SCHILOW, G. E., Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, УМН **8**, 6 (1953), 3—54.
[3] GELFAND, I. M., und SCHILOW, G. E., Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Bd. I, 2. Auflage, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1967;
Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Bd. II, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1962;
Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Bd. III, VEB Dtsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1964 (Übers. a. d. Russ.).
[4] DESIN, A. A., Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах, УМН **14**, 3 (1959), 21—73.
[5] DIKOPOLOW, G. W., und SCHILOW, G. E., О корректных краевых задачах для уравненний в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем. **24** (1960), 369—380.

[6] PALAMODOW, W. P., О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АНСССР, сер. матем. **24** (1960), 381—386.

[7] PALAMODOW, W. P., Об условиях корректной разрешимости в целом некоторого класса уравнений с постоянным коэффициентами, ДАН СССCР **132**, 3 (1960), 528—530.

[8] PALAMODOW, W. P., Об общем виде решения однородного дифферентиалного уравнения с постояннщыми коеффициентами, ДАН СССР **137**, 4 (1961), 774—777.

[9] PANEJACH, B. P., Об общих системах дифференциальных уравнении с постоянными коэффициентами, ДАН СССР **138**, 2 (1961), 297—300.

[10] PETROWSKI, I. G., Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'equations différentielles матем. сб. **5**(**47**) (1939), 3—68.

[11] SOBOLEW, S. L., Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques, матем. сб. **1** (**43**) (1936), 39—72.

[12] TREVES, F., Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients, Rio de Janeiro, 1961 (Russ. Übers.: Moskau, „Mir", 1965).

[13] HÖRMANDER, L., On the theory of general partial differential operators, Acta Math. **94** (1955), 161—248 (Russ. Übers.: Moskau IL, 1959).

[14] HÖRMANDER, L., Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963.

[15] SCHILOW, G. E., Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, УМН **10**, 4 (1955), 89—100.

[16] SCHILOW, G. E., Математический анализ, второй специальный курс, Moskau, 1965.

[17] EHRENPREIS, L., Solution of some problems of division, I, Amer. J. of Math. **76** (1954), 883.

[18] EHRENPREIS, L., The fundamental principle and some of its applications, Warschauer Konferenz über Funktionalanalysis, 1960.

[19] GARDING, L., et MALGRANGE, B., Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptic, C. R. Acad. Sci. Paris **247** (1958), 2083.

[20] HÖRMANDER, L., Local and global properties of fundamental solutions, Math. Scand. **5** (1957), 27—39.

[21] FUGLEDE, B., Apriori inequalities connected with systems of partial differential equations, Acta Math. **105** (1961), 177—195.

[22] LEVI, H., An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. Math. (2), **66** (1957), 155—158.

[23] MALGRANGE, B., Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Solutions élémentaire, C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953), 1620.

[24] L. SCHWARZ, Theorie des distributions, 1, 2, Hermann, Paris 1950, 1951.

Literatur zu Anhang 4

[1] ALEXANDROW, A. D., Исследования о принципе максимума, I—VI. Изв. высш. уч. зав., матем. **5** (1958); **3**, **5** (1959); **3**, **5** (1960); **1** (1961).

[2] ALEXANDROW, A. D., мажорантах решений и условиях единственности для эллиптических уравнений, Вестн. ЛГУ **7** (1966).

[3] BAKELMAN, I. J., Геометрические методы решения эллиптических уравнений, Moskau 1965.

[4] BERNSTEIN, S. N., Собрание сочинений, т. III (Уравнения в частных производных), Изд-во АН СССР, 1960.

[5] Browder, F. E., Вариационные краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка, перев. с англ., Сов.-Амер. симпозиум по уравн. с частн. произв., Новосибирск, 1963.
[6] Browder, F. E., Нелинейные эллиптические краевые задачи, перев. с англ., Сов.-Амер. симпозиум по уравн. с частн. произв., Новосибирск, 1963.
[7] Wischik, M. I., Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, Труды Моск. матем. о-ва **12** (1963), 125—184.
[8] De Giorgi, E., Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari, Memorie delle Acc. Sci. Torino, Ser. 3, t. 3, p. 1 (1957), 25—43 (Russ. Übers.: Mathematika 4, 6 (1960)).
[9] Courant, R., and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, volume II. Partial differential equations, New York, London 1962.
[10] Ladyshenskaja, O. A., und Uralzewa, N. N., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Moskau 1964.
[11] Leray, J., und Schauder, J., Topologie et equations fonctionelles, Ann. Sci. de l'Ecole norm. sup. **51** (1934), 45—78.
[12] Miranda, C., Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955.
[13] Pogorelow, A. W., Изгибание выпуклых поверхностей, Moskau 1951.
[14] Pogorelow, A. W., Об уравнениях Монжа—Ампера эллиптического типа, Изд. Харьк. ун-та, 1960.

SACHVERZEICHNIS

